

CRITICA DIALETTICA DELLA GEOMATICA

Tamara Bellone ⁽¹⁾ – Luigi Mussio ⁽²⁾

⁽¹⁾ Politecnico di Torino – DIATI – Corso Duca degli Abruzzi, 24 – 10139 Torino
Tel. 011-364-7709 – Fax 011-564-7699 – e-mail tamara.bellone@polito.it

⁽²⁾ Politecnico di Milano – DICA – Piazza Leonardo da Vinci, 32 – 20133 Milano
Tel. 02-2399-6501 – Fax 02-2399-6602 – e-mail luigi.mussio@polimi.it

Riassunto – Una critica dialettica della Geomatica parte da una ricognizione storica sulle origini di un mestiere antico. Dopodiché un argomento importantissimo e giustamente esteso, quanto necessario, tratta della centralità epistemologica del Trattamento delle Osservazioni, perché la Geomatica, in particolare, e le discipline del rilevamento, in generale, sono soprattutto discipline del calcolo che segue la misura e precede l'analisi. Analogamente importante ed esteso è il riferimento allo spazio, oggetto precipuo della misura, del calcolo e dell'analisi, la cui comprensione ed interpretazione parte da una concezione sensista dello stesso. Da ultimo, riconoscendo la non neutralità di ogni scienza e tecnica, problemi di etica e politica, con un pizzico d'utopia, sono presi in considerazione, perché solo una prassi dà dignità ad una teoria (qualunque essa sia).

Introduzione

Nessuna disciplina scientifica, seppure nuovissima, può avere un futuro, se non sa trovare le radici del suo essere nel passato, per quanto molto diverso possa essere. Questo perché, dal punto di vista metodologico, oppure dal punto di vista delle teorie matematiche e/o filosofiche, come pure da quello delle esperienze pratiche (in discipline pregresse e/o affini), un qualche portato deve certamente dare corpo e prospettiva alla nuovissima disciplina.

Tutto ciò è ancora più vero, quando un settore scientifico disciplinare che ha nobili origini ed una ancora più antica nascita, persa nella notte dei tempi, è già oggi (e forse ancora maggiormente in un futuro prossimo) oggetto di una crescita impressionante ed una significativa diversificazione, pur attorno ad un centro che ha stretti legami tanto con la nobile origine, quanto con la profonda antichità. In questo caso, perdere le radici del passato significa mutilare il proprio futuro.

Infatti oggi giorno la Geomatica è un coacervo di discipline del rilevamento e della rappresentazione (metrica e tematica), divenute viepiù immateriali (e di conseguenza, user-friendly e diffusissime), il cui gran contenuto metrico e matematico le caratterizza, distinguendole da altre discipline d'indagine o rilievo. Allora sottoporre a critica dialettica la Geomatica significa riconoscerne origini ed antichità, e studiare approfonditamente le basi metrologiche e matematiche che ne sono fondamentali.

Pertanto occorre sconfiggere tanto le tendenze elitarie a rinchiudersi in qualche nicchia protetta d'eccellenza (eccellenza che certamente deve essere perseguita, ma non esclusivamente), quanto la diaspora dissipativa che rincorre tutte le mode, più o meno passeggiare (fin a perdere contatto con il centro del suddetto settore). L'esatto contrario è ibridare le conoscenze, dalla matematica alla fisica, nonché dalle scienze naturali alle scienze umane, passando ovviamente per il mondo sterminato delle tecnologie.

Un appello ai comportamenti etici ed alla responsabilità politica è qui indispensabile e fondamentale, perché proprio nulla è neutro dalle teorie alla prassi, quando si esce da un'insulsa ed inutile torre d'avorio e non si vuole accettare un pensiero unico dominante (forse errato e certamente pericoloso). D'altra parte, tutta la storia dell'avventura umana associata è insieme una sfida ed un'opportunità, dove i rischi calcolati devono basarsi su qualche relativa sicurezza (e non assolutamente sull'azzardo).

Le radici di un mestiere antico ¹

La Bibbia ², nel libro antico-testamentario della Sapienza (11, 20), fa disporre ogni cosa secondo numero (o calcolo, perché qualsiasi numero è nulla senza il calcolo), peso e misura ³. Concetti simili a questi, propri delle religioni monoteiste occidentali (ebraismo, cristianesimo ed islamismo), si trovano anche nelle religioni orientali. Inoltre concetti affini, anche se talvolta meno elaborati, si trovano in altre popolazioni lontane, come nei popoli africani sub-sahariani, in quelli polinesiani ed amerindi pre-colombiani.

Tutto ciò non fa sentire del tutto isolata la scienza greca (che pure è e resta un'eccellenza, nel mondo antico) con i suoi concetti scientifici di: ipotesi, assioma, simmetria, sistema e prassi (pur facendo debita attenzione alle difficoltà di traduzione). Infatti un'importante considerazione di Immanuel Kant stabilisce che la dottrina della natura diventa una scienza, vera e propria, solo nella misura in cui, ad essa, può essere applicata la matematica.

In questo modo, è possibile individuare una struttura a livelli logica, relativamente stabile, che si articola in sette livelli: stelle, numeri, colori, piante, forme, poesia e musica. Per contro, occorre invece distinguere una concezione circolare del tempo preistorico, nei miti (come nelle saghe e nelle leggende, nonché in varie religioni orientali), contrapposto ad una concezione lineare del tempo storico (come nelle religioni rivelate occidentali e nella più moderne ideologie).

D'altra parte, il mondo preistorico è basato sulla memoria di descrizioni cosmologiche e temporali, e non su una struttura sistemica. Infatti antichissima (ovvero già dei babilonesi e degli egizi ⁴) è la scoperta della precessione degli equinozi, cosa che induce ad una concezione circolare del tempo. Eppure tuttavia, forse proprio il tempo lunghissimo (del periodo della precessione) fa poi propendere per una concezione lineare del tempo stesso.

In ogni modo, la gerarchia della segmentazione temporale parte proprio dalla precessione, riconoscendo il Sole all'equinozio di primavera nella costellazione dei Gemelli (alla fine della preistoria) e poi in quella del Toro (al sorgere delle prime civiltà). Dopodiché il Sole all'equinozio di primavera passa nella costellazione dell'Ariete (con la formazione dei primi grandi imperi e la fissazione di leggi, quali il Decalogo di Mosè) e poi in quella dei Pesci ⁵ (con l'annuncio virgiliano di una nuova era ⁶).

L'ultimo livello gerarchico, prima della rotazione giornaliera, è dato dal ciclo delle stagioni, delimitate degli equinozi e dai solstizi, sicuramente ben individuabili (rispettivamente per l'uguaglianza tra il giorno e la notte, come pure per la maggiore durata della notte, oppure del giorno, a seconda dell'essere all'inizio dell'inverno od all'inizio dell'estate). Proprio il confronto tra il giorno equinoziale e la configurazione del cielo, oltre alla memoria tramandata ⁷, permette la scoperta della precessione.

¹ Questo paragrafo è liberamente ripreso e riassunto principalmente da: Il mulino di Amleto – Saggio sul mito e sulla struttura del tempo, di Giorgio De Santillana e Hertha von Dechend (Adelphi, Milano, 2011).

² Gli autori di questo lavoro non sono antropologi, né archeologi e neppure storici dell'antichità e/o filosofi della scienza antica, ma geomatichi ed esperti di trattamento delle osservazioni. In questa veste, si occupano di questi argomenti solo per ricercare le fonti, storiche e culturali, della scienza e della tecnica della misurazione: del cielo (ove necessario), della Terra e dei manufatti, ivi consistenti.

³ Quasi coeva, la matematica pitagorica è numero, musica ed astronomia (cui deve far seguito la matematica applicata degli ingegneri e di altri tecnici).

⁴ La spiegazione scientifica della precessione degli equinozi è attribuita ad Ipparco di Nicea, un astronomo appartenente a quella grande scuola di astronomia, greca ed ellenistica, da Aristarco di Samo a Claudio Tolomeo (che scrivendo l'Almagesto ne conserva la memoria storica).

⁵ Adesso il Sole all'equinozio di primavera è prossimo alla costellazione dell'Acquario, ma nulla merita di essere affermato, a riguardo, essendo coloro che scrivono completamente disinteressati all'astrologia (che certamente non è una scienza, come l'alchimia).

⁶ Più tardi, l'annuncio virgiliano è stato falsamente letto, come una profezia laica, circa la nascita di Gesù Cristo, mentre Virgilio, poeta latino, muove i suoi pensieri tra le filosofie epicurea e stoica. Inoltre Gesù stesso nasce a Nazareth (e come tale è chiamato, definendosi egli stesso il Figlio dell'uomo) e semmai diventa il Cristo, dopo la sua presunta resurrezione (che ha testimoni solo tra i suoi discepoli) e, ancora più tardi, è chiamato il Figlio di Dio dalle chiese cristiane.

⁷ Parte essenziale della documentazione scientifica sono i cataloghi stellari, come quello compilato da Timòcari di Alessandria (il primo grande catalogo stellare, nell'occidente antico).

Con Claudio Tolomeo l'astronomia, supportata dalla geodesia (per altro, già studiata ed applicata da tempo, ad esempio, da Eratostene di Cirene), diventa cartografia (che non è più solo un elemento complementare della storia, come con Erodoto). Infatti è lo stesso astronomo a disegnare, oltre alla mappa del cielo, anche una rappresentazione geografica dell'Ecumene (ovvero della Terra, allora nota, dalle isole Canarie alla Cina e dal circolo polare all'equatore).

Un passo preliminare alla fondazione della cartografia, da parte dell'astronomia, è la fondazione della geometria, a sua volta supportata dalla topografia (già con Talete e Pitagora, e poi con Euclide, Archimede, Apollonio di Perga, Erone di Alessandria e Pappo di Alessandria). Invece la fisica, così come è intesa dal Rinascimento in poi, non ha una sua origine dall'astronomia (quanto piuttosto dalla filosofia delle esperienze, con Aristotele⁸), pur con la significativa eccezione di Archimede⁹.

Tutto ciò porta alla considerazione che, già dalla preistoria, l'evoluzione umana non è genetica, ma culturale. Allora basi genetiche sono certe strutture mentali (dalla grammatica e la sintassi del linguaggio, all'aritmetica dei numeri interi, dal riconoscimento delle forme alle nozioni di ordine e di simmetria, ecc.). Tuttavia il loro riempimento di contenuti ed arricchimento sono solo culturali e fanno sì che l'imprecisione del linguaggio rilevi una mancanza di precisione nel pensiero, nello studio e nell'osservazione.

In questo contesto, un primo percorso è scientifico e filosofico, da Anassimandro¹⁰ in poi, laddove questi postula l'indeterminazione dell'origine e del principio costitutivo delle cose, un tempo senza limiti (perché circolare) ed uno spazio multi connesso (e conseguentemente senza frontiera). Invece un secondo percorso è ingegneristico e politico che, in collegamento con il primo, costruisce ed impone la tecnologia, necessaria al miglioramento della vita associata.

Pertanto l'aratro (dalla rivoluzione neolitica, con la domesticazione di piante ed animali, e le conseguenti nascita dell'agricoltura ed avvio dell'allevamento), la ruota (dalle civiltà del bronzo) ed il mulino ad acqua, lungo fiumi e canali, ed a vento, lungo le coste dei mari (dalla prime civiltà antiche) caratterizzano un unico continuum di civiltà, dalle coste della Cina, attraverso le pianure dell'India, della Mesopotamia e dell'Egitto, fino alle coste mediterranee, nordafricane ed europee¹¹.

Più antica ancora e molto più diffusa sulla Terra, è la conquista del fuoco, generato per attrito, tra un perno ed una superficie cava da abradere, provocando scintille (e non solo conservato, a seguito di incendi naturali). Resta da osservare come l'attrito di oggetti rotanti sia da ascrivere allo stesso principio fisico della ruota e del mulino, e come dalla fisica pratica (con la tessitura e lavorazione dei pellami, della ceramica e dei metalli), si sia avviato un cammino che porta alla civiltà.

D'altronde, proprio le figure antichissime del perno, per generare il fuoco, e degli assi della ruota e del mulino costituiscono l'immagine fisica di un grande mulino (in molti miti, saghe e leggende), nello scardinamento dell'asse polare, generato dalla precessione degli equinozi. Fino all'inizio dell'età imperiale romana, la stella Sirio non risente della precessione degli equinozi ed è usata, per l'orientamento al nord; dopo tale epoca, inizia a risentirne ed il riferimento al nord è dato dalla Stella Polare (ultima del timone del piccolo carro).

⁸ Aristotele lega la fisica direttamente alla matematica, questa alla logica e quest'ultima alla filosofia delle esperienze. Proprio dai limiti di queste esperienze deriva poi la rigidità della scienza scolastica, contrapposta alla libertà di ricerca neoplatonica e rinascimentale. Per contro, grazie all'aritmetica (soprattutto dei piccoli numeri interi), l'astronomia si lega all'astrologia (almeno fino a Newton).

⁹ Archimede è davvero poliedrico e si occupa di matematica, fisica, astronomia, ingegneria, ecc.

¹⁰ Di Anassimandro è anche il principio di ragion sufficiente che tanta parte ha nella scienza della misura (e che ha una diffusione straordinaria e verosimilmente indipendente, in moltissime parti della Terra)

¹¹ Più tardi, ma ugualmente unitari per il trasporto della cultura, sono invece i passaggi all'Europa continentale e, più a nord, fino alle isole britanniche ed alla Scandinavia, come pure ad est, attraverso la penisola coreana, al Giappone. Diversi sono invece i popolamenti dell'Africa sub sahariana, delle Americhe e dell'Australia/Oceania, in quanto le due estensioni nord-sud e l'enorme isolamento non

A suo modo, questo passaggio è mitico ¹², in quanto annunciato dal grido “il grande Pan è morto”, sentito da una tromba in mezzo al mare, da una nave di passaggio, e ripetuto, a terra, dal capitano di questa nave. La notizia è oggetto di studi accurati, essendo giunta fino all'imperatore Tiberio, promotore di questi studi che confermano proprio l'avvenuto scardinamento dell'asse polare, anche se una rilettura, tardiva e falsa, ne dà una diversa interpretazione.

Infatti una pura e semplice coincidenza temporale rileva quasi contemporanei questo fenomeno astronomico e la morte in croce di Gesù di Nazareth. D'altra parte, la cristianità, dopo il trionfo sul paganesimo, travasa gli antichi miti pagani nella nuova teologia cristiana, come pure compie una rilettura interessata dell'antico testamento ebraico. Così oltre alla conferme profetiche, dall'Egitto, si trae il culto della Madonna (paragonata ad Iside) ed un'infanzia di Gesù (ricopiata da quella di Horus, figlio di Iside).

Inoltre dopo la mitica (ed inesistente) età dell'oro ed il crepuscolo degli dei, l'attribuzione dei nomi alle cose, terrestri e celesti, costituisce l'inizio delle scienze e, in particolare, dell'astronomia (nonché delle scienze e delle tecniche da essa derivate). In questo contesto, nascono la scienza e la tecnica della misurazione, con le scale metriche lineari e le misure delle superfici, dei volumi e dei pesi, ed un avvio della scrittura è il passaggio dai pittogrammi delle costellazioni ai segni degli ideogrammi ¹³.

Come già detto in precedenza, frutto di questa nascita è anche la formazione di una cartografia (geografica), dove la Terra è suddivisa in cinque regioni: due polari, due temperate ed una equatoriale, più l'Olimpo e l'Ade, come è narrato nelle Georgiche di Virgilio. Nella Divina Commedia, Dante Alighieri prende a modello questo schema, trasformando la geografia pagana nel mondo cristiano, ovvero l'Olimpo nel Paradiso e l'Ade nell'Inferno (con la significativa aggiunta del Purgatorio ¹⁴).

A riguardo, occorre constatare come non esista una vera frattura fra la magia e la religione, cosicché il manicheismo e lo gnosticismo, derivato da esso, sono la più diretta derivazione dello sciamanesimo. Inoltre ancora nel paleolitico, il fabbro (cioè colui che costruisce ed aggiusta, prima con le pietre e poi con i metalli) precede lo sciamano (ovvero il medico che guarisce dalle malattie e dai malanni) che è un'antichissima figura, largamente diffusa ovunque.

I primi viaggi di esplorazione avvengono per mare ed i pericoli della navigazione sono narrati nel racconto del gorgo, già tra la Grecia e l'isola di Eubea, e poi nello Stretto di Messina, tra i mostri di Scilla e Cariddi ¹⁵ (come nell'Odissea di Omero). Più tardi, questo gorgo si situa nella regione equatoriale (come nell'Inferno dantesco, con il viaggio di Ulisse, fino in vista della Montagna del Purgatorio), ma anche a nord-ovest delle isole britanniche (come nelle saghe e leggende celtiche e/o vichinghe).

Le incertezze geografiche (che si fanno risalire fino all'impresa degli Argonauti ¹⁶, narrata da Esiodo) portano viceversa il gorgo dalla geografia all'astronomia (cioè dalla Terra al cielo), mettendolo in relazione con lo scardinamento dell'asse della ruota o macina del mulino celeste. Del resto, Eridano non è il fiume Po, ma un

hanno permesso quella grande comunanza di piante ed animali (presente in tutto il vasto territorio temperato: asiatico, europeo e nord-africano).

¹² Un mito, vero e proprio, confermato tuttavia dalle scoperte archeologiche, è il passaggio dal neolitico alla protostoria, caratterizzato da un medioevo antico di cui non si hanno memorie storiche, ma solo tracce documentarie fossili.

¹³ Diversa, rispetto all'Egitto, è la nascita della scrittura cuneiforme sillabica, dapprima sumerica, poi babilonese, assira e fenicia. Infatti questa scrittura origina soprattutto dai segni numerari delle cretule (cioè dei sigilli) dei vasi contenitori, per la conservazione, il trasporto ed il commercio di beni. Più complessa, è la genesi della scrittura alfabetica (fenicia, ebraica, greca e latina, ma anche tardo babilonese ed egizia, nello stile demotico) che passa per le scritture cretesi minoica (lineare A, non tradotta) e micenea (lineare B, riconosciuto come greco antico), costruendo le consonanti, a partire dalle sillabe, cui aggiungere, ancora più tardi, le vocali.

¹⁴ Il Purgatorio è un'invenzione del cristianesimo medioevale di cui non si ha traccia nel mondo antico, né in quello paleocristiano.

¹⁵ Più tarda è infatti la navigazione nel Mediterraneo occidentale, ben più tempestoso della sua parte orientale, fino allo Stretto di Gibilterra. Una conseguenza diretta è il mito di Atlantide (quasi certamente la Sardegna) e la sua scomparsa (come terra del mito), una volta arrivati a Gibilterra.

¹⁶ Le incertezze geografiche sono altresì una costante fino ai viaggi di Cristoforo Colombo e dei suoi contemporanei.

fiume celeste dell'emisfero meridionale ¹⁷ e, come scrive Strabone (un geografo del mondo antico), la Via Lattea (una cicatrice, nel cielo, dopo il deragliamento del carro del Sole, guidato da Fetonte).

Infatti due sfere concentriche celesti hanno un asse comune di rotazione e sono caratterizzate da due tracce (che hanno la forma di cerchi massimi), rispettivamente l'equatore celeste e l'eclittica la cui intersezione è nei due punti equinoziali. A sua volta, la nube galattica della Via Lattea sta su un'altra sfera concentrica ed incrocia lo zodiaco equatoriale, attualmente in corrispondenza dei solstizi dell'eclittica. L'armonia delle sfere è una costante dell'astronomia antica che continua fino a Keplero ¹⁸.

Complementari al mondo dei viventi sono l'Olimpo e l'Ade la cui porta è a sud, nella parte della Terra ignota nell'antichità (che non conosce l'America, né l'Oceania e neppure la dimensione dell'Africa sub-sahariana). D'altra parte, non esiste molta terra emersa a sud dell'equatore, in particolare, prescindendo dall'Antartide, ed invece ne presuppone il clima, come mostrano i fiumi infernali: dopo la transizione dell'Acheronte, Flegetonte (infuocato), Stige (paludoso) e Cocito (ghiacciato) ¹⁹.

Anche il diluvio (o meglio le sue conseguenze) sono un avvio per la descrizione geografica del territorio, in molti popoli mediorientali e nord-mediterranei (per lo più, originari dall'Asia interna settentrionale ²⁰). Invece in Egitto (la cui popolazione arriva dall'Africa sahariana, all'epoca della sua progressiva desertificazione) non è presente il racconto del diluvio, anche se descrizioni geografiche sono richieste per provvedere alla risistemazione del territorio dopo le piene periodiche del Nilo ²¹.

Inoltre dalla saga sumerica di Gilgamesh, al Demiurgo del Timeo platonico, l'esplorazione dello spazio ²² avviene soprattutto con la navigazione, nei mari e lungo i grandi fiumi (del resto, l'Australia è raggiunta e popolata molto prima dell'Europa). Altre esplorazioni avvengono salendo le montagne e/o attraversando i deserti, ma non penetrando le foreste ²³ (infatti la scimmia antropomorfa scende dagli alberi ed abbandona le foreste, iniziando a percorrere le savane, ecc.).

A riguardo, l'urbanizzazione e soprattutto l'architettura maggiore, seppure costrette, a volte, dalla morfologia dei luoghi, hanno una loro caratterizzazione geografica sulla base di certe caratteristiche ²⁴ della geografia celeste (cioè astronomica, con un universo destrorso, fatto coincidere con il principio filosofico del bene cui si contrappone un principio del male, proprio di un aborrito universo sinistrorso). D'altra parte, i miti e le religioni antiche sono matematica ed astronomia, e non riti di fertilità animistici.

Infine resta da segnalare come il compito dell'astronomia antica sia formare le costellazioni (dove il nome stesso significa proprio questa attività), distinguendo anche i pianeti dalle stelle, a partire da Giove (il più grande) e Venere (il più luminoso, unificando in esso la Stella del mattino e la Stella della sera). In questo

¹⁷ Secondo Ovidio, Eridano è invece il Po, ma esso è anche il Rodano e, per altri, addirittura il Gange (divenuto famoso, in occidente, a seguito delle conquiste di Alessandro Magno), come pure il Nilo (dalle sorgenti misteriose ed alla cui scoperta lavorano esploratori fino a tutto l'800).

¹⁸ Secondo Pitagora e Filolao, poi Platone (nel Timeo) ed Aristotele (nel De Caelo), la struttura del cosmo è composta da quattro elementi, più un movimento esterno, in perfetta corrispondenza ai cosiddetti cinque solidi platonici. Infatti il tetraedro è il fuoco, l'ottaedro è l'aria, l'icosaedro è l'acqua e l'esaedro o cubo è la terra, mentre il dodecaedro è il suddetto movimento esterno.

¹⁹ Oltre ad Eridano, un altro fiume celeste è il Lete che segna la soglia d'ingresso dei Campi Elisi.

²⁰ Ovviamente anche queste popolazioni originano dall'Africa centro orientale, ma da moltissimo tempo addietro, attraverso l'Arabia e poi la regione iraniana hanno raggiunto l'Asia centrale, ancora all'epoca delle glaciazioni.

²¹ La diversa tempistica, tra lo sviluppo della civiltà sumerica ed il popolamento della bassa valle del Nilo, fa sì che la conoscenza scientifica abbia inizio nella Mezzaluna fertile e si sia poi diffusa in Egitto e, dopo ancora, nelle isole e sulle coste settentrionali del Mediterraneo.

²² L'esplorazione dello spazio avviene su una terra non certamente piatta, ma sferica, e con una concezione dell'universo geocentrica (con rarissime eccezioni, come Aristarco di Samo ed Archimede). Queste idee, prescindendo dalla brama di conquista, sono una forte molla proprio per questa esplorazione, almeno fino ai viaggi di Cristoforo Colombo e dei suoi contemporanei.

²³ Non ha invece senso parlare di traversate di pascoli, prati, campi ed orti, perché solo la rivoluzione neolitica, con la domesticazione di piante ed animali, portando alla nascita dell'agricoltura ed all'avvio dell'allevamento, crea la necessità di estirpare i boschi e regolare il territorio, conquistato per le attività umane della vita associata.

²⁴ Ancora oggi le facciate di molte chiese sono disposte ad ovest, nella direzione del tramonto, come pure molti cimiteri sono orientati sud-nord, essendo il nord la direzione della notte.

modo, la creazione dell'universo (da parte di chicchessia) è in realtà una misurazione, di una realtà informe preesistente, per conferire ordine al caos, costruendo così un cosmo.

Dopodiché come le varie parti del cielo sono distinte in costellazioni, anche la prima geografia terrestre è distinta dalla presenza di diverse specie di alberi (ad esempio, l'Europa centrale e settentrionale e l'Asia centrale, più vicina, sono caratterizzate dalla presenza del faggio). In questo modo, nonostante una concezione circolare del tempo ed una configurazione geocentrica dello spazio (o forse proprio per questo), gli antichi hanno legato le cose ai numeri, determinati dalla misurazione.

Lasciamo stare simili casi di applicazione illegittima. Speriamo invece che sia divenuta plausibile la necessità di spostare molto più indietro nel passato gli inizi del pensiero scientifico e dell'osservazione dei fenomeni naturali. Chi rifletta sui "primi passi" tanto esaltati da Aristotele, si asterrà poi dal ritenere "evidente", "ovvio" o "naturale" il fatto che si praticino la filatura e la tessitura, che si cuocia la ceramica e si fondano i metalli, che si innestino le piante e si incrocino gli animali, che si costruiscano strumenti musicali a corda e si dichiarino "sacri" certi numeri, che si raggruppino le stelle in "figure" – e si può provare che la somiglianza con gli animali reali non era ricercata intenzionalmente – e si concepisca uno zodiaco all'interno del quale costruire le "case" dei pianeti (i quali tra l'altro dovettero pur essere scoperti a un certo punto), che si costruiscano barche a vela e si elaborino regole di navigazione grazie alle quali – molto prima della scoperta della bussola da parte dei Cinesi – fu possibile attraversare il Pacifico. Chi dunque rifletta sui risultati, invece di spiegare i fenomeni citati e molti altri come soluzioni "ovvie" prodottesi spontaneamente, come luoghi comuni, che si diffondono con estrema facilità, che si producono ben spesso "indipendentemente" l'uno dall'altro e "necessariamente" – allora dunque, quando avrà risalito la scala mobile chiamata "tempo" per un tratto sufficientemente lungo – comincerà a fiutare l'esistenza di Leonardi e Galilei della preistoria. E comincerà a meravigliarsi di fronte alla diffusione della civiltà e con ciò a imparare che – per dirla con una formulazione molto forte – "l'umanità" è il prodotto di un lunghissimo processo di trasmissione e accrescimento, di perdita e ri-nascimento delle conoscenze scientifiche (Hertha von Dechend, Osservazioni conclusive per l'edizione tedesca di: Il mulino di Amleto – Saggio sul mito e sulla struttura del tempo).

Prima di fornire qualche curiosità conclusiva, sempre con riferimento al testo citato, si riporta un elenco, di certo incompleto, delle principali scoperte matematiche, fisiche, astronomiche, geodetiche e cartografiche del mondo antico occidentale (ben consci che altro è scoperto nell'Oriente indiano e cinese):

- il teorema di Talete nello spazio 3D;
- il teorema di Pitagora;
- la descrizione dei cinque solidi regolari da parte di Platone;
- i postulati ed i teoremi della geometria piana e solida di Euclide;
- le coniche (ed una prima idea di coordinate) di Apollonio di Perga;
- la trigonometria di Ipparco di Nicea e Claudio Tolomeo;
- la geometria del cerchio e della sfera, e la descrizione dei tredici solidi quasi regolari di Archimede;
- la meccanica delle leve, l'idrostatica e l'ottica degli specchi, ancora di Archimede;
- l'ipotesi geocentrica di Aristotele, fatta sistema da parte di Claudio Tolomeo;
- l'ipotesi eliocentrica di Aristarco di Samo, sostenuta da Archimede;
- la compilazione di un primo catalogo stellare da parte di Timòcari di Alessandria;
- le prime esplorazioni narrate, nell'impresa degli Argonauti e con i viaggi di Ulisse;
- la circumnavigazione dell'Africa da parte dei fenici;
- la determinazione della misura del raggio terrestre²⁵ da parte di Eratostene di Alessandria;

²⁵ La determinazione deriva dall'osservazione dell'ampiezza delle ombre nei pozzi al solstizio d'estate, in due posti lungo uno stesso meridiano, e nella misura "empirica" della loro distanza (data dai tempi medi di percorrenza delle carovane).

- ❑ l'ipotesi dell'esistenza delle Americhe ²⁶ di Ipparco di Nicea;
- ❑ la redazione di una prima mappa geografica dell'Ecumene noto da parte di Claudio Tolomeo;
- ❑ la costruzione dell'eolipila (cioè un motore, a getto di vapore ²⁷) da parte di Erone di Alessandria;

Per completezza, occorre qui segnalare una rilettura del tempo ciclico, fatta da Giovanni Keplero e basata sulle congiunzioni di Giove e Saturno che avvengono ogni circa 20 anni e cadono, per circa 200 anni, in una delle quattro triplicità dello zodiaco ²⁸, passando poi alla successiva, con un periodo di circa 800 anni. A sua volta, questo periodo è circa la trentaduesima parte del periodo costituito dalla precessione degli equinozi, lungo circa 26.000 anni, come già detto in precedenza.

Datazione	Dicitura di Keplero	Archeologia e storia
4000 a.C.	Creazione del mondo	Sumeri
3200 a.C.	Il patriarca Enoch	Antico Egitto
2400 a.C.	Il patriarca Noè	Creta minoica
1600 a.C.	Il liberatore Mosè	Grecia micenea
800 a.C.	Il profeta Isaia	Grecia classica e fondazione di Roma
0	Gesù Cristo	Impero romano
800 d.C.	L'imperatore Carlo Magno	Alto medioevo
1600 d.C.	Giovanni Keplero (vivente)	Età moderna

Al contrario uno scarso parallelismo si ritrova tra l'ordine ebraico dei giorni della settimana (utilizzando tuttavia la dicitura astronomica per sabato e domenica, invece di quella ebraica e cristiana, in uso nelle lingue neolatine ²⁹), l'ordine dei corpi celesti, proposto dall'Almagesto (di Claudio Tolomeo) e l'ordine degli stessi corpi, elencato nel De Revolutionibus (di Niccolò Copernico), dove solo Saturno permane al posto sette, mentre il Sole e la Luna si scambiano rispettivamente i posti uno e quattro.

Nome del corpo celeste	Posizione nell'Almagesto	Posizione nel De Revolutionibus	Giorno della settimana	Posizione nella settimana
Sole	4	1	Domenica	1
Mercurio	2	2	Mercoledì	4
Venere	3	3	Venerdì	6
Luna	1	4	Lunedì	2
Marte	5	5	Martedì	3
Giove	6	6	Giovedì	4
Saturno	7	7	Sabato	7

²⁶ L'ipotesi si fonda sul diverso regime delle maree negli oceani Indiano ed Atlantico che fanno supporre almeno una loro separazione (ovviamente Ipparco di Samo non può invece sapere di un'ulteriore separazione tra gli oceani Indiano e Pacifico).

²⁷ Da notare che apparecchi simili successivi sono datati solo dal 1600; ad esempio, con la pentola a pressione di Denis Papin.

²⁸ Le quattro triplicità sono costituite per il Fuoco da: Ariete, Leone e Sagittario, per la Terra da: Toro, Vergine e Capricorno, per l'Aria da: Gemelli, Bilancia ed Acquario, e per l'Acqua da: Cancro, Scorpione e Pesci.

²⁹ Infatti nelle lingue neolatine, sabato è il giorno del riposo di Dio e deriva dall'ebraico, e domenica è il giorno del Signore e solennizza la festività cristiana. Al contrario, nelle lingue germaniche, i nomi usati per tradurre entrambi fanno riferimento a Saturno ed al Sole.

Appendice A – Cercando Sophia tra eros e logos³⁰

Come potrebbe filosofia separarsi da filologia senza diventare una ricerca del tutto astratta e formale? Non è mossa forse dall'istanza di comprendere, e magari ordinare, il linguaggio in cui tutti viviamo e che continuamente trasformiamo con lo stesso parlarlo? E non insegna la vera filologia quale abisso spalanca ogni parola, come il "pozzo del passato" tutto esprima fuorché un morto e inalterabile "così fu"? Filosofia e filologia si riflettono vicendevolmente e si comprendono l'una sullo specchio dell'altra³¹.

Può perciò non essere inutile commentare filologicamente quella straordinaria "invenzione" dello spirito greco, senza la quale nulla è comprensibile della civiltà dell'Occidente, che ancora, per quanto dubbiosamente, chiamiamo filosofia. Quale sfondo si rivela in questo nome? Quali le sue radici? Cosa significa la *sophia* che il filosofo "ama", ovvero, filologicamente parlando, sente come il suo problema, la sua cosa, ciò che lo chiama radicalmente in causa? *Sophia*, sapere o sapienza, poteva riferirsi a ogni arte, a ogni capacità di fare – da quella del carpentiere (Iliade, XV 412³²), a quella di colui che stabiliva le leggi della città, fino a quella che iniziava alla contemplazione delle cose divine.

È dal grembo fecondo del multiverso delle *sophiai artes* che si genera la filosofia. Come se dal loro stesso intimo emergesse l'istanza di conoscersi, di comprendere la propria ragione d'essere, il proprio principio e il proprio fine. In questo senso Pericle, nel grande discorso che leggiamo in Tucidide, chiama tutti i cittadini di Atene amanti del bello e amanti della *sophia*. Nulla di debole o ozioso – logo concreto per eccellenza! In Atene si persegue e onora il saper fare, e per saper fare è necessario pensare, saper dare ragione di ciò che si opera, compito impossibile senza discussione, competizione, *agòn*.

E un'opera ben fatta, che sia davvero "in forma", e per ciò anche utile, quella soltanto è lecito chiamare bella, *kalòn*.

In un testo capitale per la nostra civiltà, che ci si ostina a volte ancora a leggere in una chiave "spiritualistica", Il Simposio platonico, risuona lo stesso timbro di una filosofia rivolta alle prassi. L'amore, eros, platonico non si svolge affatto da contemplazione a contemplazione, ma attraverso momenti fattivi, in un prepotente crescendo di quella capacità di produrre che è (come i tragici sanno, da Eschilo a Euripide) "tremenda" caratteristica del nostro essere. A generare, e a generare nel bello cose belle, quasi costringe il grande demone Eros. La filosofia intende far luce, o vedere nella luce, ciò che accomuna le diverse forme in cui quella capacità si incarna. Proprio nel coglierne e "amarne" ciò che le distingue, essa ne ricerca l'unità. La distinzione neppure potrebbe essere logicamente affermata, infatti, se non si comprendesse l'unità dei distinti.

Ancora la filologia insegna a ricordare, e cioè a riportare al cuore del presente, a ripensare oggi, il senso di quei frammenti di Eraclito, apparentemente contraddittori, dove il filosofo ci viene incontro e il suo nome si fa problema, staccandosi dalla visione del mondo mitica e religiosa³³. Il primo frammento afferma che è necessario che gli uomini filosofi siano *historas* di molte cose. *Historia* sta a significare quel vedere che è proprio del testimone oculare – ma un vedere che diventa esperienza, che riflette su ciò che vede e sa comunicarlo³⁴. Il secondo dice che il sapere molte cose (*polymathia*) non insegna ad avere intelletto, se no lo avrebbe insegnato anche a quei "saggi" che Eraclito vede ancora immersi nella cultura del mito. Ma l'*historia* non comporta un vedere – sapere molte cose? No; *historia* è vedere da sé, assumersi la responsabilità del vedere e sapere; *polymathia* è, invece, prendere l'opinione a maestra, imparare dai più, o da costumi, tradizioni, credenze.

Il filosofo deve essere *histor* perché fa, sì, esperienza di molte cose e molti fatti, ma non viaggia dagli uni agli altri semplicemente, tantomeno li assume dai racconti altrui. Il suo intelletto è, sì, sempre per via, ma ciò che egli interroga a ogni momento del suo cammino è la ragione che tutte le cose pilota – se questa ragione si trovi, se gli occhi dell'intelletto possano illuminarla e in quali limiti³⁵.

Logo concreto la filosofia: essa mira a dire soltanto la verità (a differenza delle Muse di Esiodo), nel senso che il suo dire deve saper corrispondere all'essenza di ciò di cui fa esperienza – e facciamo esperienza delle forme del nostro pensare e agire immanenti alla totalità del reale. L'armonia che tutte collega non appare, ma certamente non può non vederla l'intelletto, poiché uno rimane il mondo dei desti. Dall'amore, che è

³⁰ Dalla lezione magistrale del Prof. Massimo Cacciari (filosofo ed uomo politico), all'Università degli Studi di Bologna, nell'occasione del conferimento della Laurea honoris causa in Filologia classica.

³¹ Le discipline del rilevamento, dalla loro nobile origine scientifica, con la Geodesia, alle loro modernissime tecniche, con la Geomatica, sono essenzialmente un linguaggio, fondato sulla Matematica applicata, sulla Statistica, ecc., ed oggi sostenuto maggiormente dall'essere diventate pressoché immateriali.

³² Il carpentiere è un costruttore e, a quell'epoca, sicuramente anche un misuratore, perché nessun costruttore può prescindere dal dimensionamento metrico dell'opera da realizzare.

³³ Già l'aritmetica e l'algebra sumeriche e caldee, come la geometria egizia, precedono l'adozione, più tarda, della matematica e di altre forme di scrittura, a fini mitici e religiosi (ricordando bene che l'aritmetica e l'algebra mesopotamiche, dopo i primi conteggi nei depositi, servono all'astronomia ed alle costruzioni, così come la geometria egizia sia insieme astronomia ed agrimensura).

³⁴ E' del tutto evidente, come l'interpretazione geodetica e geomatica vada oltre il testo proposto, ma è altresì innegabile che tutte le discipline del rilevamento abbiano a loro fondamento la visione, cosicché la comunicazione di ciò che è visto sia possibile, perché esso è diventato geometria (cioè numeri che sintetizzano le misure e modelli numerici che le interpretano).

³⁵ Questo è precisamente il ruolo dei metodi che collegano le misure ai modelli e che, con il Trattamento delle Osservazioni, sono il centro epistemologico delle discipline del rilevamento.

fattiva ricerca, per ognuna di esse ³⁶, dalla filologica cura per il linguaggio di ognuna, a quell'armonia, più potente di tutte le udibili, vuole librare la filosofia.

Fin qui, la lezione del Prof. Cacciari cui aggiungere poche altre osservazioni, sulle discipline del rilevamento. La Geodesia nasce dal desiderio di conoscere forma e dimensioni della Terra, e si collega all'Astronomia, cioè ad una tensione verso la conoscenza dell'Universo che non si realizzerà mai compiutamente, così come il compito del filosofo è pensare l'impensabile, nella tensione "erotica" tra dicibile e indicibile. Nello stesso tempo, le discipline del rilevamento nascono da esigenze materiali: quali l'agrimensura e l'arte della navigazione, perché potersi orientare è necessario, per operare sul terreno e sui mari.

Le discipline del rilevamento hanno una tradizione operativa vastissima, che man mano evolve, contemporaneamente od in seguito alle innovazioni tecnologiche, talvolta promuovendole. Infatti la tradizione filosofica occidentale si basa sulla *praxis*, al contrario di altre tradizioni filosofiche, più rivolte alla contemplazione (nel secolo scorso, Antonio Gramsci afferma l'unità tra teoria e pratica, ed anche Hannah Arendt ritiene che l'agire e l'attività teoretica rispondano ad un bisogno naturale dell'uomo e che realizzare entrambi generi armonia).

La Geomatica usa un linguaggio (in via di evoluzione, come tutti i linguaggi) che partendo da Matematica, Statistica e Calcolo numerico, attinge a varie tecniche, prese a prestito dalla Linguistica e/o dall'Ingegneria della Conoscenza (ed in primis dall'Informatica), per trattare le osservazioni ed i dati, raggruppandoli in base a determinati parametri, interpretandoli e sintetizzandoli, ove possibile, per poi analizzarne le relazioni di dipendenza (cioè di connessione, dipendenza funzionale e correlazione), scegliendo i modelli più adeguati, da validare con cura.

Analogamente il filosofo è colui che vede, sperimenta e collega con il logos i dati raccolti, rendendoli più chiari (cioè colui che non si perde nel particolare, ma sa cogliere i legami con il tutto). Infine scopo della filosofia è promuovere amicizia con i *sophoi*, così anche la comunità dei geodeti, geomatici e, in generale, di tutti coloro che si occupano del rilevamento e della rappresentazione (cartografica) ha sommo bisogno, al suo interno, di rispetto ed amicizia, perché solo così una comunità cresce, si rafforza, supera le avversità e soprattutto è utile ai bisogni delle comunità più vaste che la ospitano.

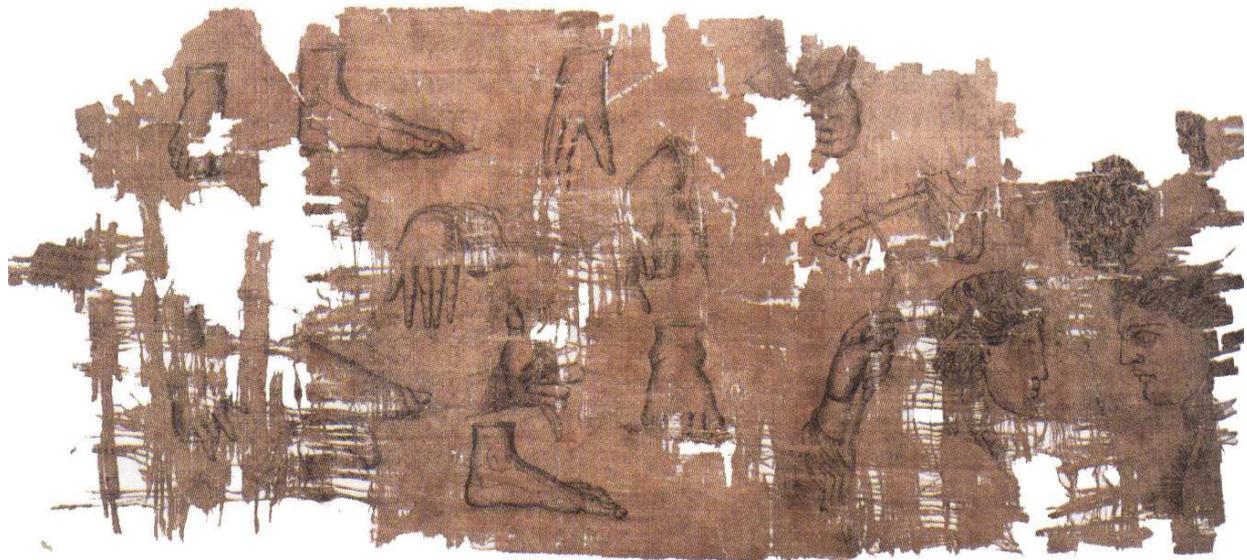
D'altra parte, chiudersi in una torre d'avorio è certamente una strategia vuota e perdente: vuota perché è inutile, del tutto, e perdente, perché le cose inutili, prima o poi, sono tralasciate o dismesse. A tale proposito, la torre d'avorio può essere un rischio, tanto per un singolo (esperto o praticante), quanto per un certo gruppo, più o meno grande, fino a raggiungere l'intera comunità (come può dimostrare la storia di quelle discipline, superate dai fatti e dagli eventi, che devono rimanere nella storia della cultura, ma non servono più in quanto scienza e tecnica).

Evitare il rischio della torre d'avorio richiede sicuramente una grande apertura al nuovo, non solo nel proprio settore disciplinare, ma anche in campi disciplinari, affini e/o complementari. Infatti oggi le discipline, già fortemente moltipicatesi, nel corso dell'800 e della prima metà del '900, si sono tanto diversificate ed espanse, fino a raggiungere i confini di molte altre, cosicché diventa ragionevole ed incoraggiante muoversi una logica di ibridazione delle stesse, apprendendo il nuovo ed il diverso, con attenzione e cura, sempre nel pieno rispetto delle competenze degli altri cui si va incontro.

³⁶ Potrebbe sembrare un tema lontano, ma è difficile pensare che altro, dall'interesse (anche utilitaristico, ma non solo) per il sistema Terra ed il mondo degli uomini, sia la molla che porta, da sempre, a misurare, modellare e calcolare. Certamente la parola "amore" è poesia, ma anche la poesia può collegarsi al linguaggio delle discipline del rilevamento, se il suddetto interesse, librandosi, vola alto.



Bernadino Luini, Ercole e Atlante ³⁷ (Accademia Scientifico – Letteraria, affresco, Milano)



Il cosiddetto Papiro di Artemidoro ³⁸

³⁷ Il dipinto riprende un mito antico delle storie tra dei, semidei ed altre figure mitologiche dell'antichità.

³⁸ Il cosiddetto Papiro di Artemidoro è un documento, molto controverso, di Geografia e Cartografia antica. Infatti vero o falso che sia è una prova diretta od indiretta dell'importanza della Geografia e della Cartografia, nel mondo antico, dapprima medio orientale e nord africano, successivamente greco ed ellenistico, ed infine romano e bizantino. Circa la controversia, essa è una disputa tra gli archeologi, assertori dell'autenticità del papiro, ed i grecisti, assertori della falsità dello stesso. Del resto, già nell'800, circolano copie, false e ben contraffatte, di documenti antichi e, di conseguenza, anche questo potrebbe esserlo. In ogni caso, se falso, è ben confezionato e mette insieme, riprendendole da altre fonti, testi antichi di geografia, particolari cartografici ed altre immagini di siti dell'antichità. Non è compito di chi si occupa di Geomatica prendere posizione in materia, mentre resta l'importanza di segnalare la presenza di una documentazione antica (o di più documenti, abilmente collegati, se l'insieme è un falso, abbastanza recente), a testimonianza dell'esigenza di sviluppare un complesso di scienze, del cielo e della Terra, dall'Astronomia, alla Geodesia e da questa alla Cartografia.

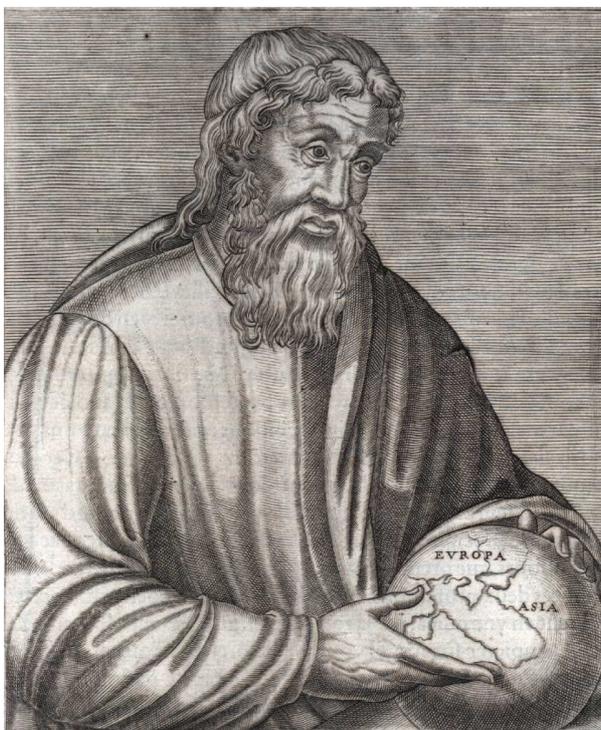
Appendice B – La Terra non è mai stata piatta (da un articolo di Umberto Eco ³⁹)

Quando si è iniziato a riflettere su quale fosse la forma della Terra, era stato abbastanza realistico per gli antichi ritenere che essa fosse quella di un disco. Per Omero il disco era circondato dall'Oceano e ricoperto dalla calotta dei cieli, e – a giudicare dai frammenti dei presocratici, talora imprecisi e contraddittori a seconda delle testimonianze – per Talete era un disco piatto; per Anassimandro aveva la forma di un cilindro e Anassimene parlava di una superficie piatta, contornata dall'Oceano, che navigava su una sorta di cuscino di aria compressa.

Solo Parmenide pare ne avesse intuito la sfericità e Pitagora la riteneva sferica per ragioni mistico-matematiche.

Su osservazioni empiriche si erano invece basate le successive dimostrazioni della rotondità della terra, come testimoniano i testi di Platone e Aristotele. Dubbi sulla sfericità sopravvivono in Democrito ed Epicuro, e Lucrezio nega l'esistenza degli Antipodi, ma in generale per tutta l'antichità posteriore la sfericità della Terra non viene più discussa.

Che la Terra fosse sferica lo sapeva naturalmente Tolomeo, altrimenti non avrebbe potuto dividerla in trecentosessanta gradi di meridiano, e lo sapeva Eratostene, che nel III secolo a.C. aveva calcolato con una buona approssimazione la lunghezza del meridiano terrestre, considerando la diversa inclinazione del Sole, a mezzogiorno del solstizio di primavera, quando si rifletteva nel fondo dei pozzi di Alessandria e di Syene (l'odierna Assuan), città di cui si conosceva la distanza.



Il geografo Strabone ⁴⁰ (incisione del XVI secolo)

Malgrado molte leggende ..., tutti gli studiosi del medioevo sapevano che la Terra fosse una sfera. Anche ... (si) può facilmente dedurre che, se Dante entra nell'imbuto infernale ed esce dall'altra parte vedendo stelle sconosciute ai piedi della montagna del Purgatorio, questo significa che egli sa benissimo che la Terra è tonda. Ma della stessa opinione erano stati Origene e Ambrogio, Alberto Magno e Tommaso d'Aquino, Ruggero Bacone, Giovanni di Sacrobosco, tanto per citarne alcuni.

Nel VII secolo Isidoro di Siviglia (che pure non era un modello di accuratezza scientifica) calcolava la lunghezza dell'equatore. Indipendentemente dalla precisione delle sue misure, chi si pone il problema della lunghezza dell'equatore ovviamente ritiene che la Terra sia sferica. Tra l'altro la misura di Isidoro, sia pure approssimativa, non si discosta moltissimo da quelle attuali.

Allora perché si è a lungo creduto, e ancora oggi molti lo credono, che il mondo cristiano delle origini si fosse allontanato dall'astronomia greca e fosse tornato all'idea della Terra piatta?

³⁹ Pubblicato su La Repubblica di sabato 22 novembre 2014.

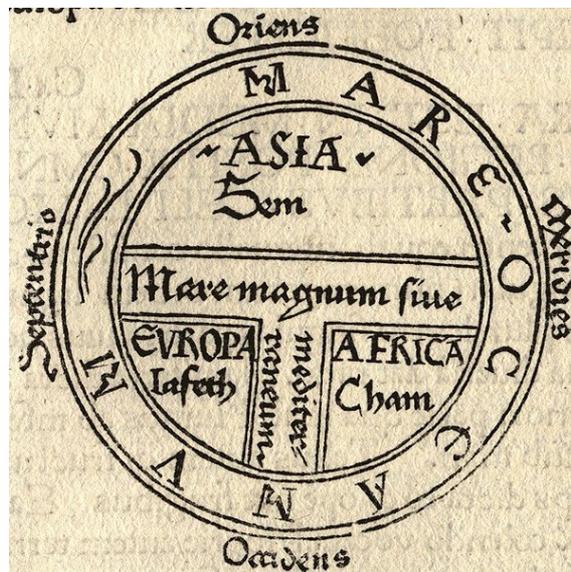
⁴⁰ Storico, oltretutto geografo, di formazione eclettica e stoica, tra la tarda età ellenistica e la prima Roma imperiale.

Si provi a fare un esperimento, e si domandi a una persona anche colta che cosa Cristoforo Colombo volesse dimostrare quando intendeva raggiungere il Levante per il Ponente, e che cosa i dotti di Salamanca si ostinassero a negare. La risposta, nella maggior parte dei casi, sarà che Colombo riteneva che la Terra fosse rotonda, mentre i dotti di Salamanca ritenevano che la Terra fosse piatta e che, dopo un breve tratto di navigazione, le tre caravelle sarebbero precipitate dentro l'abisso cosmico.

Una parte del pensiero ottocentesco, irritato dal fatto che varie confessioni religiose stessero opponendosi all'evoluzionismo, ha attribuito a tutto il pensiero cristiano (patristico e scolastico) l'idea che la Terra fosse piatta. Si trattava di dimostrare che, come si erano sbagliate circa la sfericità della terra, così le Chiese potevano sbagliarsi circa l'origine delle specie. Si è quindi sfruttato il fatto che un autore cristiano del IV secolo come Lattanzio (nel suo *Institutiones divinae*), siccome nella Bibbia l'universo viene descritto sul modello del tabernacolo, e quindi in forma quadrangolare, si opponesse alle teorie pagane della rotondità della Terra, anche perché non poteva accettare l'idea che esistessero degli Antipodi dove gli uomini avrebbero dovuto camminare con la testa all'ingiù. Infine, era stato scoperto che un geografo bizantino del VI secolo, Cosma Indicopleuste, in una sua *Topographia Christiana*, sempre pensando al tabernacolo biblico, aveva sostenuto che il cosmo fosse rettangolare, con un arco che sovrastava il pavimento piatto della Terra. Nel modello di Cosma la volta ricurva rimane celata ai nostri occhi dallo stereoma, ovvero dal velo del firmamento. Sotto si stende l'ecumene, ovvero tutta la Terra sui cui abitiamo, che poggia sull'Oceano e monta per un declivio impercettibile e continuo verso nord-ovest, dove si erge una montagna talmente alta che la sua presenza sfugge al nostro occhio e la sua cima si confonde con le nubi. Il Sole, mosso dagli angeli – a cui si debbono anche le piogge, i terremoti e tutti gli altri fenomeni atmosferici – , passa al mattino da oriente verso il meridione, davanti alla montagna, e illumina il mondo, e alla sera risale a occidente e scompare dietro la montagna. Il ciclo inverso viene compiuto dalla luna e dalle stelle.

Molti autorevoli libri di storia dell'astronomia, tutt'oggi studiati, asseriscono che le opere di Tolomeo rimasero ignote a tutto il medioevo (il che è storicamente falso) e che la teoria di Cosma divenne l'opinione prevalente sino alla scoperta dell'America. Ma il testo di Cosma, scritto in greco, fu reso noto al mondo occidentale solo nel 1706 e pubblicato in inglese nel 1897. Nessun autore medievale lo conosceva.

Come si è potuto sostenere che il medioevo considerasse la terra un disco piatto? Nei manoscritti di Isidoro di Siviglia, che pure, l'abbiamo visto, parlava dell'equatore, appare la cosiddetta "mappa a T" dove la parte superiore rappresenta l'Asia, in alto, perché in Asia stava secondo la leggenda il Paradiso terrestre, la barra orizzontale rappresenta da un lato il Mar Nero e dall'altro il Nilo, quella verticale il Mediterraneo, per cui il quarto di cerchio a sinistra rappresenta l'Europa e quello a destra l'Africa. Tutto intorno sta il gran cerchio dell'Oceano.



Mappa di Isidoro di Siviglia

L'impressione che la terra fosse vista come un cerchio è data anche dalle mappe che appaiono in molti manoscritti medievali. Come era possibile che persone che ritenevano la terra sferica facessero mappe dove si vedeva una terra piatta? La prima spiegazione è che lo facciamo anche noi. Criticare la mancanza di tridimensionalità di queste mappe sarebbe come criticare la mancanza di tridimensionalità di un nostro atlante contemporaneo. Si trattava, allora come oggi, di una forma convenzionale di proiezione (o meglio rappresentazione) cartografica.

Ma dobbiamo tenere in considerazione altri elementi. Il primo ci viene suggerito da Agostino, il quale ha ben presente il dibattito aperto da Lattanzio sul cosmo a forma di tabernacolo, ma al tempo stesso conosce le opinioni degli antichi sulla sfericità del globo. La conclusione di Agostino è che non bisogna lasciarsi impressionare dalla descrizione del Tabernacolo biblico perché, si sa, la Sacra Scrittura parla spesso per metafore, e forse la Terra è sferica. Ma siccome sapere se sia sferica o no non serve a salvarsi l'anima, si può ignorare la questione.

Questo non vuole dire che non ci fosse un'astronomia medievale. Tra XII e XIII secolo vengono tradotti l'Almagesto di Tolomeo e poi il *De coelo* di Aristotele. Una delle materie del quadrivio insegnato nelle scuole medievali era l'astronomia, ed è del XIII secolo quel *Tractatus de sphaera mundi* di Giovanni di Sacrobosco che, ricalcato su Tolomeo, costituirà un'autorità indiscussa per alcuni secoli a venire.

Da un altro articolo di Umberto Eco, pubblicato su La Repubblica di lunedì 23 febbraio 2009, si possono poi trarre, a mo' di conclusione, le seguenti considerazioni che ben collegano una rappresentazione cartografica all'immagine di un modello 3D che, a sua volta, rappresenta la Terra intera (in scala), senza deformazioni. Tutto ciò serve a confermare l'idea di una Terra rotonda e non piatta, con un cammino che porta lo studio della sua figura dalla sfera all'ellissoide, nel '700, e poi da questo al geoide, a partire dall'800.

..., il Medioevo era epoca di grandi viaggi ma, con le strade in disfacimento, foreste da attraversare e bracci di mare da superare fidandosi di qualche scafista dell'epoca, non c'era possibilità di tracciare mappe adeguate. Esse erano puramente indicative. Spesso quello che preoccupava maggiormente l'autore non era di spiegare come si arriva a Gerusalemme, bensì di rappresentare Gerusalemme al centro della terra. Infine si cerchi di pensare alla mappa delle linee ferroviarie che propone un qualsiasi orario in vendita nelle edicole. Nessuno da quella serie di nodi, in sé chiarissimi se si deve prendere un treno ..., potrebbe estrapolare con esattezza la forma dell'Italia. La forma esatta dell'Italia non interessa a chi deve andare alla stazione.

Si veda ora questa immagine del Beato Angelico nel duomo di Orvieto. Il globo (di solito simbolo del potere sovrano) tenuto in mano da Gesù rappresenta una Mappa a T rovesciata. Se si segue lo sguardo di Gesù si vede che egli sta guardando il mondo e quindi il mondo è rappresentato come lo vede lui dall'alto e non come lo vediamo noi, e quindi capovolto. Se una mappa a T appare sulla faccia di un globo vuole dire che essa era intesa come rappresentazione bidimensionale di una sfera.



Beato Angelico, Cristo Giudice (Cappella di San Brizio, Duomo di Orvieto)

Misure metodi e modelli eleganti e fallibili ⁴¹

Il matematico e fisico quantistico britannico Paul Dirac qualifica come elegante la matematica solitamente adottata per modellare la fisica e, in generale, la scienza. I filosofi della scienza Rudolf Carnap e Karl Raimund Popper dichiarano fallibili tutti i modelli solitamente adottati per modellare la fisica e, in generale, la scienza. A riguardo, notevole è la controversia tra i due filosofi, rispetto al modo di evidenziare la fallibilità, tuttavia essa non è qui molto rilevante.

Infatti mentre il primo fa ricorso al principio d'induzione per costruire conferme sperimentali, a supporto di una teoria, il secondo propone la falsificazione delle congetture scientifiche, attraverso confutazioni basate su contro-esempi fondati. Tuttavia proprio la selezione dei contro-esempi richiede, implicitamente e di nuovo, ancora una volta una sorta di principio d'induzione, di fatto, diminuendo la portata innovativa della proposta, da un punto di vista operativo.

In questo contesto, non solo i modelli, ma anche le misure ed i metodi sono eleganti e fallibili, tenuto conto di una certa loro intercambiabilità (per cui una misura può diventare la componente di un modello, come pure da un modello può originare un nuovo metodo, mentre un metodo può richiedere od addirittura far scaturire nuove misure, ecc.) e del fatto che il loro essere concreti li obbliga ad essere soggetti ad errori (e perciò fallibili), per quanta scienza e tecnica si applichi loro (al fine di farli eleganti).

Fino ad oggi nessuna teoria ... informale ha potuto sfuggire all'assiomatizzazione. ... Ma questo significa che le dimostrazioni ... possono venir sottomesse a una perentoria procedura di verifica e questo può venir fatto in modo ... meccanico. ... Bene, è certo che escludiamo di avere alcun contro-esempio formalizzabile nel sistema, ma non abbiamo affatto garanzia alcuna che il nostro sistema formale contenga tutto il materiale empirico o quasi empirico cui eravamo realmente interessati e con cui avevamo a che fare nella teoria informale. Non c'è alcun criterio formale per la correttezza di una formalizzazione (Imre Lakatos).

Non abbiamo nessun motivo di spaventarci del fatto che il livello di conoscenza a cui oggi siamo, sia tanto poco definitivo quanto lo sono stati tutti i precedenti (Friedrich Engels, Ant-Dühring).

Allora una prima conseguenza diretta è l'impossibilità di separare nettamente una qualsiasi disciplina dalla sua storia. Pertanto se, da un lato, occorre aumentare il contenuto di una materia specifica, aumentandone insieme il rigore, dall'altro, solo ripetute procedure di controllo possono far superare le incertezze ed i dubbi, seppure in modo sempre molto precario e provvisorio. Inoltre una seconda conseguenza lega le incertezze ed i dubbi al linguaggio e, in generale, alla cultura con cui si studia una certa disciplina.

Infatti una qualsiasi disciplina attraversa sempre periodi di scienza normale, alternati a periodi di rivoluzione scientifica. Nei periodi del primo tipo, certi paradigmi sono assunti (quasi come dogmi) ed una disciplina si consolida, matura e si specializza, sulla base di una sua propria metafisica (dove metafisica significa solo andare oltre le cose fisiche, come sono ormai soliti dire i giovani filosofi della scienza e storici della scienza e della tecnica, senza alcun risvolto ideologico e/o religioso).

Per contro, nei periodi del secondo tipo, certi paradigmi sono abbandonati e certi altri sono assunti, almeno in parte, in opposizione ai primi che tuttavia possono poi essere compresi, più tardi, come un sottosistema dei secondi. A riguardo, occorre notare come, per quanto improvvise e dirompenti, quasi tutte le rivoluzioni scientifiche (come quasi tutte le rivoluzioni) abbiano chiari segni premonitori, come i tentativi di ampliare gli interessi, di mettere in discussione certi assunti e/o teorie, di fare nuove esperienze, ecc.

⁴¹ Questo paragrafo è liberamente ripreso e riassunto da: Dimostrazioni e confutazioni – La logica della scoperta matematica, di Imre Lakatos ed a cura di John Worrall e Elie Zahar, data la prematura scomparsa dello stesso Lakatos (Feltrinelli Editore, Milano, 1979).

Nessuna teoria è sempre in accordo con tutti i fatti compresi nel suo campo, ma non sempre la colpa è della teoria. I fatti sono costituiti da ideologie anteriori, e un conflitto tra fatti e teorie può essere una prova di progresso. Questo è anche un primo passo nel nostro tentativo di trovare i principi impliciti in nozioni d'osservazione familiare. ... Le discussioni che preparano alla transizione a una nuova era ... difficilmente si possono limitare alle caratteristiche manifeste della concezione ortodossa. Rilevano spesso idee nascoste, le sostituiscono con idee di diverso genere e mutano sia classificazioni manifeste che classificazioni celate (Paul Karl Feyerabend – Contro il metodo).

L'oscillazione dialettica, tra la nuova metafisica dei paradigmi e delle rivoluzioni scientifica (di Thomas Kuhn) e la sopraccitata opposizione al metodo, è risolta da Lakatos con la proposizione di programmi di ricerca al cui interno, temporalmente ben delimitato, affrontare costantemente l'analisi critica dei fondamenti teorici, di una certa disciplina, alla luce delle evidenze sperimentali (e viceversa), con lo scopo specifico, di dare corpo a quella stessa disciplina o di correggerla, oppure di doverla abbandonare.

Tutto ciò significa che la rilettura, critica e dialettica, di una certa disciplina va ben oltre ed è molto diversa da una sua prima lettura, essenzialmente didattica. Infatti la storia di questa data disciplina è anche la storia di tutti quei percorsi, tortuosi e contraddittori, che l'hanno vista nascere, crescere e consolidarsi. Al contrario, la didattica elementare della stessa disciplina prevede la sua semplificazione all'essenziale, per impossessarsi di una teoria base, dei suoi metodi principali e delle sue applicazioni più importanti.

Un altro problema, affatto secondario, è quello della traduzione tra teorie diverse che, come per la traduzione tra lingue diverse, fa compiere salti culturali, essendo invece una traduzione letterale una cattiva traduzione. D'altra parte, i nuovi problemi di una certa disciplina mostrano spesso connessioni inattese con alcune altre discipline, apparentemente lontanissime, cosicché i collegamenti trovati istituiscono un arricchimento della disciplina specifica ed un'ibridazione positiva della cultura, nel suo complesso.

Per più di duecento anni c'è stata una disputa tra dogmatici e scettici. I dogmatici sostengono che attraverso il nostro intelletto e/o i sensi possiamo raggiungere il vero e sapere di averlo raggiunto. D'altra parte gli scettici sostengono che non possiamo affatto raggiungere il vero ... e non siamo in grado né di sapere se possiamo raggiungerlo né di avere la certezza di averlo raggiunto. In questa grande disputa, le cui argomentazioni sono state molto spesso aggiornate, ... ogni volta che il dogmatismo ... entrava in crisi, una nuova versione forniva ancora ... l'autentico rigore e i fondamenti definitivi, ripristinando così l'immagine ... infallibile, inconfutabile ... La maggior parte degli scettici si rassegnò all'inespugnabilità di questa forza epistemologica dogmatica. E' proprio ora di rimettere in discussione questo dogma (Imre Lakatos).

Nel dibattito, filosofico e matematico, tra la validità di una prova sperimentale, opposta ad una dimostrazione rigorosa, notevole è l'invenzione di una lezione socratica, proposta da Lakatos, a mo' di dialogo platonico, sulla congettura di Eulero che il numero di facce di un poliedro regolare e, in generale, di un solido convesso, addizionato al numero dei suoi vertici, ecceda di due il numero dei suoi spigoli (problema, a sua volta, collegato al problema dei quattro colori, necessari e sufficienti per redigere una carta ⁴²).

Una semplice verifica inizia rimuovendo una sola faccia (portando così la suddetta differenza da due ad uno) e spianando la superficie esterna; dopodiché triangolata questa superficie piana e rimossi, ad uno ad uno, tutti i triangoli (a partire da quelli sul contorno ⁴³ e tenendo connessa la triangolazione), fino a mantenerne uno solo, è immediato ritrovare l'uno della sopraccitata differenza (avendo un triangolo tre vertici, una faccia e tre lati, cosicché la somma algebrica di questi numeri dà ancora il numero uno).

⁴² Quest'ultimo problema, oltre che d'interesse in cartografia, è utile per la foto interpretazione e l'analisi d'immagine, in fotogrammetria e nel telerilevamento.

⁴³ In questo modo, assieme ad una faccia, si rimuovono un lato, oppure due lati ed un vertice, in ogni caso, con una differenza nulla.

Varie obiezioni possono essere mosse alla verifica proposta, non per invalidarla, riguardo ai poliedri regolari ed ai solidi convessi, ma nei confronti di una sua estensione ad altri tipi di solidi. Queste obiezioni sono, in generale, basate su contro-esempi locali che attaccano la sola procedura di verifica e contro-esempi globali che demoliscono la congettura stessa ⁴⁴. D'altra parte, è molto facile proporre solidi più complessi ⁴⁵: concavi, multi-connessi (o con cavità interne) e composti, per appoggio, uno sull'altro ⁴⁶.

A rigor di termini non esiste nulla che sia una dimostrazione matematica; in ultima analisi noi non possiamo far altro che dare indicazioni; ... le dimostrazioni sono ciò che ... chiamiamo chiacchiere, ornamenti retorici ..., disegni sulla lavagna ..., artifici per stimolare l'immaginazione ... (Godfrey Harold Hardy).

Ci sono tre specie di proposizioni ...:

- quelle che sono vere e per le quali non vi sono restrizioni né eccezioni, ...;
- quelle che si basano su qualche principio falso e che quindi non possono in ogni caso venire ammesse;
- quelle che, sebbene conseguano da principi veri, ammettono tuttavia restrizioni o eccezioni in certi casi ... come dice il proverbio l'eccezione conferma la regola (Imre Lakatos).

Infatti un'alternativa praticabile alla capitolazione, con il rifiuto dell'intera congettura, è fornita dal rifiuto dei contro-esempi, considerati mostruosità ed eliminati, proprio per questo motivo. Inoltre è anche possibile eliminare solo qualche contro-esempio (considerato un'eccezione), come pure accomodare opportunamente alcune mostruosità. Un caso eclatante è la proposizione di una logica a tre valori: vero, falso e dipendente (dove il dipendere può anche essere graduato in probabilità).

Un'altra via, di più complessa elaborazione, ma capace di fornire risultati migliori, consiste nel miglioramento della congettura con l'incorporazione delle restrizioni, come lemmi accessori che ne garantiscono la validità (ad esempio, nel caso specifico, la possibilità di spianamento, di triangolazione e di rimozione ordinata di tutti i triangoli ⁴⁷). Per quanto riguarda invece il numero di lemmi richiesti, evitando un assurdo regresso all'infinito, basterebbe arrestarsi ai lemmi banalmente evidenti ⁴⁸.

In questo modo, il miglioramento di una congettura ingenua, con la formulazione di un teorema, è spesso effettivo, seppure non sempre il miglioramento è necessario, quando il risultato ottenuto non risulta troppo dissimile dalla congettura ingenua iniziale. Quasi sempre poi, il percorso costruttivo della dimostrazione va a zig-zag, in funzione del miglioramento progressivo e dell'acquisizione dei contro-esempi. Infine il teorema ottenuto, nella sua formulazione, prescinde dalla storia della sua scoperta.

E' uno dei principali meriti delle dimostrazioni quello di insinuare un certo scetticismo riguardo al risultato dimostrato (Bertrand Russell).

⁴⁴ Anche nelle discipline del rilevamento, è notevole il dibattito, filosofico e matematico, tra le dimostrazioni rigorose, della Geodesia, e le prove sperimentali, di tutte quelle tecniche, oggi giorno collettivamente denominate Geomatica.

⁴⁵ Prima di arrivare agli esempi dati dai solidi complessi, già alcuni solidi rotondi (come il cilindro ed il cono) non soddisfano la congettura di Eulero.

⁴⁶ Per contro, è invece possibile costruire solidi complessi che soddisfano la congettura di Eulero. Ad esempio, il piccolo dodecaedro stellato di Keplero è composto da 60 facce triangolari equilatera (che insistono, a cinque a cinque, a mo' di piramide pentagonale, su ciascuna faccia del dodecaedro), 32 vertici e 90 spigoli (laddove il dodecaedro convesso ha 12 facce pentagonali, 20 vertici e 30 spigoli) ed anche il grande dodecaedro stellato di Louis Poinsot è composto da 60 facce triangolari equilatera (che entrano, a tre a tre, a mo' di piramide triangolare, in ciascuna faccia di un icosaedro), 32 vertici e 90 spigoli (laddove l'icosaedro convesso ha 20 facce triangolari equilatera, 12 vertici e 30 spigoli). Si badi tuttavia che descrivere i due solidi concavi stellati, in entrambi i casi, come composti da facce pentagonali, variamente intrecciate tra loro, porti a 12 facce, 12 vertici e 30 spigoli, non soddisfacendo la congettura di Eulero. Per completezza, si segnala che i solidi stellati di Keplero – Poinsot sono quattro, dovendosi aggiungere, ai due precedenti, anche il grande dodecaedro stellato di Keplero (composto da 12 facce pentagonali, 20 vertici e 30 spigoli) ed il grande icosaedro stellato di Poinsot (composto da 20 facce triangolari equilatera, 12 vertici e 30 spigoli), entrambi soddisfacenti la congettura di Eulero.

⁴⁷ Queste condizioni sono soddisfatte per tutti i poliedri semplici, con facce semplicemente connesse.

⁴⁸ In ogni caso, come dice saggiamente l'autore del libro qui liberamente ripreso e riassunto, le dimostrazioni sono un gioco da giocare, finché è divertente, e da interrompere, quando viene a noia.

Così non solo le confutazioni agiscono come lievito per l'analisi della dimostrazione, ma l'analisi della dimostrazione può agire come lievito per le confutazioni (Imre Lakatos).

Alcuni esempi di matematica e fisica servono ad illustrare la tortuosità dei percorsi della ricerca. Infatti la matematica, nata come aritmetica presso i Sumeri e così assunta dai pitagorici greci, si scontra con i numeri irrazionali (nella misura delle grandezze geometriche, tramite proporzioni) e diventa geometria⁴⁹ che una lettura dogmatica di Euclide fa diventare la geometria dell'universo (fino alla sintesi critica kantiana), per essere poi messa in discussione dalle geometrie non-euclidee, nel primo '800.

Invece la fisica e l'astronomia, abbandonate le concezioni aristoteliche e tolemaiche sui moti dei corpi⁵⁰ ed il geocentrismo⁵¹, si strutturano secondo le scoperte galileiane e newtoniane (in questo caso, oltre la sintesi critica kantiana), per essere poi messe in discussione dalla fisica relativistica e dalla fisica quantistica, agli inizi del '900. In entrambi i casi, solo un misto di teorie e di evidenze sperimentali permette la loro evoluzione e crescita⁵².

Inoltre tra l'800 e la prima metà del '900, un contributo all'analisi delle dimostrazioni è offerto dai logici (come George Boole, Gottlob Frege, Giuseppe Peano, Bertrand Russell, Ludwig Wittgenstein ed i positivisti logici) e dai matematici assiomatici (come Karl Weierstrass, David Hilbert ed i broukisti). Tuttavia limiti ai possibili miglioramenti derivano dai due teoremi di incompletezza e di indecidibilità di Kurt Gödel (dove un semplice esempio consiste nell'impossibilità di provare che un qualsiasi numero⁵³ sia solo trascendente).

- ❑ Regola 1: Se hai una congettura, preparati a dimostrarla e a confutarla. Esamina attentamente la dimostrazione e fai un elenco di lemmi non banali (analisi della dimostrazione); trova conto esempi sia alla congettura (contro-esempi globali) sia ai lemmi sospetti (contro-esempi locali).
- ❑ Regola 2: Se hai un contro-esempio globale scarta la congettura, aggiungi all'analisi della dimostrazione un conveniente lemma che verrà confutato dal contro-esempio e sostituisci la congettura scartata con una congettura migliore che incorpori il lemma come condizione. Non permettere che una confutazione venga liquidata come una mostruosità. Cerca di rendere espliciti tutti i lemmi nascosti.
- ❑ Regola 3: Se hai un contro-esempio locale, fai un controllo per vedere se è anche globale. Se lo è, puoi facilmente applicare la Regola 3.
- ❑ Regola 4: Se hai un contro-esempio che è locale ma non globale, cerca di migliorare la tua analisi della dimostrazione sostituendo il lemma confutato con uno non falsificato.
- ❑ Regola 5: Se hai contro-esempi di qualsiasi tipo, cerca di trovare, mediante un tirare a indovinare deduttivo, un teorema più profondo per il quale essi non siano più contro-esempi (Imre Lakatos⁵⁴).

Matematici importanti, del calibro di Adrien-Marie Legendre, Carl Friedrich Gauss, Augustin-Louis Cauchy⁵⁵, Camille Jordan, Henri Poincaré ed altri geometri dell'800, si sono cimentati nella dimostrazione di questa congettura, con vario successo, e l'hanno poi estesa con la presentazione di contro-esempi, l'enunciazione di confutazioni e la formulazione di nuove congetture, a loro volta, da doversi dimostrare, per poter assurgere al ruolo di nuovi teoremi.

⁴⁹ La matematica nasce invece come geometria, in Egitto, e così è assunta dalla Scuola ionica greca.

⁵⁰ La teoria aristotelica per il moto dei corpi lega le forze alle velocità, invece che le forze alle accelerazioni (laddove l'accelerazione è un'invenzione galileiana, fondata sull'esperimento del piano inclinato e confermata dalla meccanica newtoniana).

⁵¹ Il geocentrismo, oltre a contrapporsi all'eliocentrismo, inventa un'inesistente distinzione tra il mondo sublunare corruttibile ed il mondo delle sfere celesti incorruttibile.

⁵² Di norma, una teoria precede le sue verifiche sperimentali, basandosi solo su poche osservazioni e sulla loro contraddizione con una teoria precedente, fermo restando che nessuna serie di osservazioni, per quanto lunga, può dimostrare alcunché.

⁵³ Un numero con illimitato e non periodico è trascendente (e non irrazionale), se non deriva da alcuna equazione algebrica (da qui, la difficoltà evidente di poterlo escludere, sempre e comunque).

⁵⁴ Lakatos, nella sua lezione socratica, trascritta a mo' di dialogo platonico, si diverte a costruire, smontare e rimontare tesi ed ipotesi, ma queste cinque regole possono comunque costituirne una sintesi, ben ragionata.

⁵⁵ Cauchy include tra i poliedri semplici anche i poliedri con facce e/o spigoli curvi, purché singoli (cioè non aderenti lungo spigoli e/o nei vertici), privi di cavità, semplicemente connessi e privi di facce ad anello (cioè semplicemente connesse), essendone unica la topologia.

Una domanda pertinente si chiede quanto avanti possa spingersi la tensione dei concetti e delle idee che fa passare da modelli semplici ed a modelli via, via più complessi della realtà in esame. Una risposta sensata segnala limiti certamente finiti, data la ragionevole finitezza del tutto, ma anche la sua notevole estensione, nonché l'indeterminazione e l'incertezza degli sviluppi futuri (a loro volta fondati, sulla constatazione di altre indeterminazioni ed incertezze, per quanto riguarda il passato).

Un altro problema, affatto collaterale, è la scelta del linguaggio che, insieme a tutta la cultura che ne fa uso, determina sicuramente la formulazione del problema stesso, dalla sua enunciazione alla sua risoluzione. Infatti benché la grammatica profonda sia sostanzialmente unica (conformemente alla lezione chomskiana⁵⁶), il lessico, la sintassi e gli stili dipendono fortemente dal contesto culturale⁵⁷ e, in questo modo, un certo problema diventa un altro, già passando da una data epoca ad un'altra successiva, più o meno lontana.

La matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse. ... Quando un linguaggio è stato ben scelto, constatiamo con meraviglia che tutte le dimostrazioni fatte per un oggetto conosciuto, si applicano immediatamente a molti oggetti nuovi; non c'è nulla da cambiare, neppure le parole, perché i nomi sono diventati gli stessi (Henri Poincaré).

Quando l'insieme delle proprietà di un ente matematico che usiamo nella dimostrazione di una proposizione circa questo ente non determina l'ente in questione, la preposizione può venir estesa per applicarla a un ente più generale (Maurice René Fréchet⁵⁸).

La costruzione dell'eptaedro di Hilbert, a partire dall'ottaedro, tolti quattro triangoli (sfalsati tra sopra e sotto) ed aggiunti tre quadrati, disposti come i tre piani cartesiani ortogonali dello spazio 3D, è un ulteriore esempio del modo di procedere per congetture e confutazioni. Infatti l'eptaedro è un solido concavo e non-stellato, con ben quattro volumi distinti (pur essendo semplicemente connesso, dalle nervature centrali), ma risponde positivamente alla congettura di Eulero, laddove si aggiunga ai vertici l'insieme vuoto⁵⁹.

La dimostrazione, proposta da Lakatos, fa uso delle matrici di connessione tra vertici, delimitazione di spigoli con vertici⁶⁰, contiguità tra spigoli, perimetrazione di facce con spigoli⁶¹ ed adiacenza tra facce. Queste matrici sono alla base della teoria delle reti di tipo geodetico su cui si fondano le discipline tecniche del rilevamento, con le reti geodetiche e topografiche, la triangolazione aerea della fotogrammetria analitica e digitale, e la strutturazione delle basi di geodati dei sistemi informativi geografici e territoriali.

Infine resta da segnalare come una generalizzazione della congettura di Eulero, ritrovata più e più volte nel corso dell'800, sottragga dal numero due (eccedenza tra il numero di facce, sommato al numero di vertici, rispetto al numero di spigoli) il doppio del numero di tunnel (cioè il numero di multi-connessioni) ed aggiunga, a questo risultato, il numero di facce ad anello (cioè il numero di facce multi-connesse), restando ovviamente possibili altre generalizzazioni della stessa congettura⁶².

⁵⁶ Un dibattito, non troppo assonante, tra il linguista generativo/trasformazionale americano, Noam Chomsky, e il filosofo strutturalista, Michel Foucault, stabilisce insieme l'essere innata della grammatica profonda (a riprova di un'unica origine della specie umana) e le caratteristiche sociali del linguaggio, parlato e scritto (a conferma della natura di classe delle sovrastrutture politiche e culturali).

⁵⁷ Un pellirossa, di professione geologo, descrive una montagna, in inglese, in termini geologici, chiamandola invece la sede del Grande Spirito, quando si esprime in un dialetto amerindo (perché non esiste una letteratura scientifica, in quelle lingue).

⁵⁸ Fréchet, forse sconosciuto ai più (se non direttamente interessati alle tematiche dell'Analisi Matematica), è un matematico francese, quasi contemporaneo, ed uno degli ultimi maestri.

⁵⁹ L'aggiunta ai vertici anche dell'insieme vuoto è proposta e giustificata proprio per la stranezza della sua costruzione.

⁶⁰ Questa matrice è altresì detta di configurazione (o disegno) la cui trasposizione dà luogo alla matrice di incidenza di spigoli nei vertici.

⁶¹ La trasposizione di questa matrice dà luogo alla matrice di aderenza di facce negli spigoli; questa stessa matrice è altresì detta di cross-connessione tra facce (separate tra loro da angoli diedri) e spigoli.

⁶² L'opera di Lakatos si conclude con due appendici (entrambe estranee agli scopi del presente lavoro). Infatti la prima tratta di un secondo caso storico, per il metodo delle dimostrazioni e confutazioni, sulla difesa di Cauchy del principio di continuità e la seconda mette a confronto l'approccio deduttivo (della matematica e della fisica teorica) con l'approccio euristico (di molte scienze applicate).

La trattazione del primo esempio, nell'opera di Lakatos, si conclude subito dopo la presentazione di queste generalizzazioni, con l'aggiunta di poche altre considerazioni sulla validità delle dimostrazioni, contrapposta alla loro provvisorietà, derivata dal metodo delle congetture e delle confutazioni. Tuttavia i curatori dell'opera propongono una breve conclusione, ricordando la brusca interruzione, a causa della prematura scomparsa dello stesso Lakatos.

Così in una lunga nota, i curatori ricordano che la matematica, nata principalmente come aritmetica (con i popoli mesopotamici, quali Sumeri, Assiri e Babilonesi), diventa geometria (dapprima con gli egizi e poi soprattutto con i greci), laddove anche l'astronomia e la fisica sono ricondotte nella stessa branca della matematica. Infatti l'intento di tutte queste osservazioni e del loro prosieguo è mostrare come misure, metodi e modelli, eleganti e fallibili, siano richiesti per far avanzare la conoscenza della realtà.

Per le stesse ragioni, il Secolo d'oro, successivo all'Umanesimo ed al Rinascimento e precedente all'Età dei Lumi, vede la nascita della Scienza nuova, ma anche un passaggio dalla geometria all'algebra⁶³, in quanto trasforma la geometria sintetica euclidea nella geometria analitica cartesiana. Questa ha comunque un suo illustre precedente nelle intuizioni di Apollonio di Perga, come la trigonometria degli astronomi rinascimentali ha un altro illustre precedente nella tarda matematica alessandrina.

Dopodiché la prima metà dell'800 fa tesoro della scoperta, tardo seicentesca, settecentesca e del primo ottocento, dell'analisi matematica, cosicché si può assistere una vera e propria ripresa della geometria, con la trasformazione nella geometria proiettiva⁶⁴, nella geometria differenziale⁶⁵ e nella topologia. Ricchissimo e fecondo è questo periodo, per lo sviluppo della matematica ottocentesca e per quanto segue, altrettanto egregiamente, nel primo novecento.

Tuttavia proprio sul crinale del cambio di secolo, tra '800 e '900, la critica delle fondamenta della matematica porta la logica, in primo piano, assegnandole un ruolo molto importante nell'analisi delle dimostrazioni, dalla disamina dei lemmi nascosti, alla discussione dei contro-esempi. Tutto ciò fa passare la logica stessa dal campo della filosofia teoretica a quello della matematica, ma nel contempo suscita un'enorme discussione nel campo della matematica, perché sembra toccarne proprio le fondamenta.

Infatti un vero e proprio punto di svolta si manifesta, tra l'inizio del '900 ed i suoi anni '20, dove di fronte ad esigenze hilbertiane, assiomatiche e fondazioniste, si contrappongono teoremi gödeliani su un'incertezza ineliminabile, perché i sistemi matematici sono incompleti (ovvero non possono fondarsi solo su se stessi) e la matematica stessa presenta problemi indecidibili. D'allora, la matematica, contro qualche residuo tentativo universalista, diventa puramente convenzionalista⁶⁶.

... come sappiamo che il controllo della dimostrazione è sempre accurato? ... la ... insaziabile sete di certezza sta diventando davvero noiosa! Quante volte ... devo dire che non conosciamo nulla di certo? Il ... desiderio di certezza ... fa sollevare dei problemi molto noiosi mentre ... rende ciechi a quelli interessanti (John Worrall e Elie Zahar, curatori dell'opera di Imre Lakatos).

⁶³ Questo passaggio non è invece sottolineato dalla precedente lezione di Lakatos che prolunga l'egemonia della geometria fino alla scoperta delle geometrie non-euclidee, alla loro interazione con l'analisi matematica ed alla nascita della geometria differenziale e della topologia (cioè alla prima metà dell'800).

⁶⁴ A rigore, la geometria proiettiva ha origini più vecchie, discendendo dalla scoperta pre-rinascimentale delle leggi della prospettiva e dalla sua formulazione nel '600, ma solo nell'800 si rafforza e si struttura, cosicché nel secondo '900, ma altrove, rispetto al contesto europeo (in particolare, in India), diventa la base dell'informatica grafica.

⁶⁵ La geometria differenziale è alla base di moltissimi studi di geodesia geometrica, oppure e meglio, proprio moltissimi studi di geodesia geometrica sono l'avvio della geometria differenziale, come una branca autonoma della matematica.

⁶⁶ Il convenzionalismo in matematica è solo uno dei tantissimi aspetti del convenzionalismo, nella vita associata, quotidiana e non solo, dell'umanità. Ad esempio, oggi la morale è liberamente contrattata e condivisa, e fondata sui principi di libertà ed uguaglianza, intesa come equità. Tutto ciò significa denunciare l'inutilità e l'inconsistenza di principi primi, escludendo che essi possano trovarsi nella matematica (per qualcuno, un nuovo Dio fantoccio?), quando si sono rifiutati tanto nelle religioni, quanto nelle ideologie a-religiose.

A complemento di quanto fin qui descritto, si riportano le formule di Karl Raimund Popper, inerenti il potere esplicativo $e(y|x)$ e la corroborazione $C(y|x)$:

$$e(y|x) = \frac{p(x|y) - p(x)}{p(x|y) + p(x)} = \frac{p(x,y) - p(x)p(y)}{p(x,y) + p(x)p(y)}$$

$$C(y|x) = e(y|x)(1 + p(x|y)p(y)) = e(y|x)(1 + p(x,y))$$

A riguardo, occorre notare che il potere esplicativo, ovvero il sostegno di un'osservazione x verso una legge y , è limitato nei suoi valori fra: -1 e $+1$, dove:

- ❑ il limite inferiore (negativo) segna una netta smentita di un'osservazione contro una supposta legge;
- ❑ il limite superiore (positivo) comporta il pieno sostegno di un'altra osservazione rispetto ad una proposta legge;
- ❑ il valore intermedio (nullo) indica l'indifferenza di ancora un'altra osservazione nei confronti di una legge, in esame, e conseguentemente la sua estraneità (dedotta logicamente, perché i numeri misurano, ma non hanno alcuna coscienza/conoscenza delle conseguenze del loro operare).

Inoltre la corroborazione evidenzia il contributo dato da una data osservazione x verso una certa legge y , particolarmente importante nel caso di un potere esplicativo positivo, perché agisce a sostegno, seppure nessuna osservazione (cioè nessun risultato sperimentale) possa servire come dimostrazione. Al contrario, se il potere esplicativo è negativo, anche la corroborazione è negativa, ovvero anziché corroborare, agisce come un contro-esempio valido e serve a smentire la legge in esame (sia nel caso di una vecchia legge che diventa obsoleta, sia in quello di una nuova legge, ancora in costruzione, che si dimostra errata). Infine il caso intermedio, con un valore nullo, serve a delimitare il campo di azione di una data legge, eliminando certe osservazioni dal novero di quelle da prendere in considerazione.

Per completezza, si noti poi che se si tratta di una legge, ben fondata, allora la sua probabilità elementare è certamente nulla (ovvero: $p(y) = 0$) e, d'altra parte, è invece pari ad uno la probabilità condizionata del valore di una possibile generica osservazione, derivata numericamente dalla legge stessa (cioè: $p(x|y) = 1$).

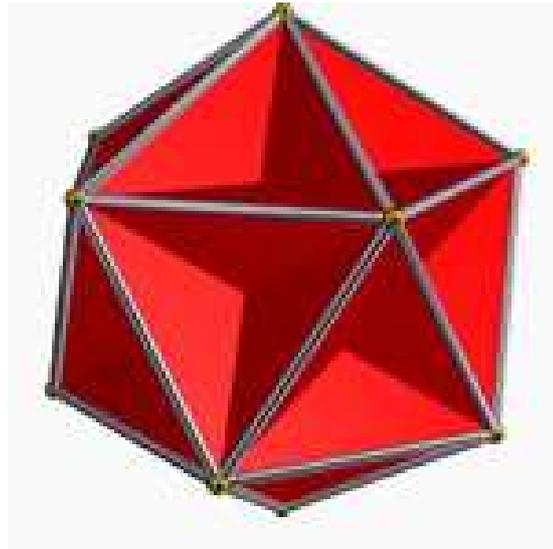
Pertanto si ha la perfetta uguaglianza tra potere esplicativo e corroborazione la cui unica espressione è:

$$C(y|x) = \frac{1 - p(x)}{1 + p(x)}$$

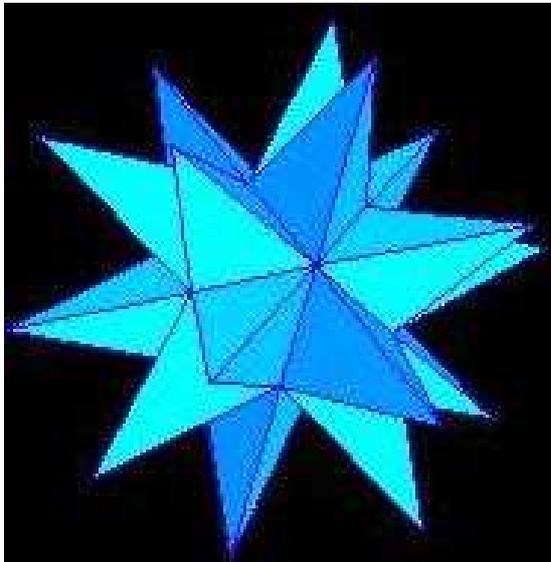
Da ultimo, si osservi come, per quanto nessun esperimento dimostri alcunché, tutte le principali statistiche, se non corrette, possono quantomeno essere ridotte nella loro deviazione (o *bias*), e comunque quasi tutte sono consistenti, cosicché la numerosità dei campioni raccolti (purché debitamente ripuliti) gioca a favore della sicurezza, entro i ragionevoli limiti della bernoullianità (cioè dell'indipendenza) dei loro elementi.



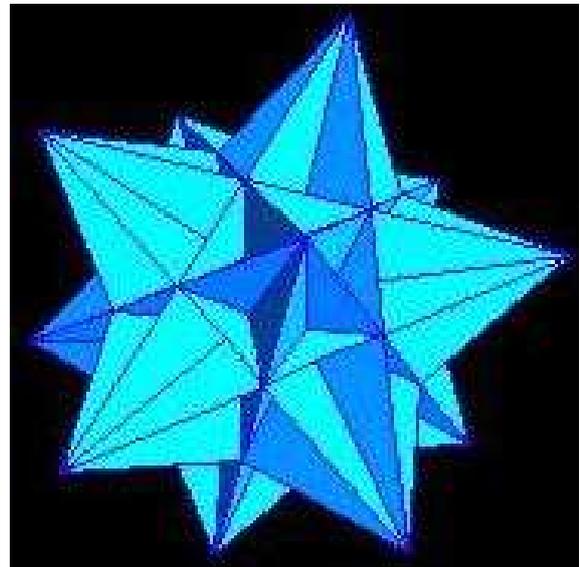
Piccolo dodecaedro stellato di Keplero



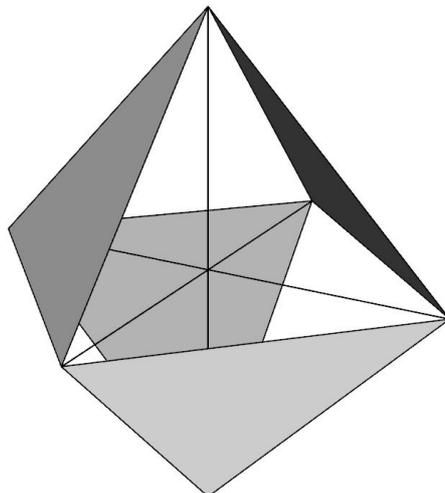
Grande dodecaedro stellato di Poincaré



Grande dodecaedro stellato di Keplero



Grande icosaedro stellato di Poincaré



Eptaedro di Hilbert

La centralità epistemologica del Trattamento delle Osservazioni

Le discipline del rilevamento, dalla loro nobile origine nella Geodesia, alla loro nuova interpretazione nella Geomatica, come già detto in precedenza, sono discipline del calcolo che i moderni sviluppi della tecnologia fanno viepiù diventare immateriali. In questo contesto, il Trattamento delle Osservazioni, indispensabile e fondamentale, da sempre, per tutte queste discipline, assume un'importanza epistemologica maggiore (quasi costituendo il loro unico centro ed il solo principio unificatore).

Quanto segue è una rilettura del Trattamento dell'Osservazioni⁶⁷, forse controcorrente, ma particolarmente intrigante, perché invita ad una comprensione, priva di orgogliose sicurezze (che ne possono fare sistema), ma attenta a molti dettagli (che lo compongono come una disciplina insieme semplice e ricca). A riguardo, occorre precisare che nelle discipline del rilevamento non è necessario il concetto di probabilità soggettiva, ma come il confronto sia utile, perché demistificante ed antiautoritario.

Particolarmente deleterio (in parte tuttora!) l'influsso del "dominio crociano" che per un quarantennio non solo devastò le facoltà intellettuali degli italiani ma ne consolidò l'arretratezza culturale coprendola con una specie di cafonesco compiacimento di se stessa. ... Chi segue una catena di sillogismi o passaggetti può venir condotto (come usava dire Federigo Enriques) ad ammettere *oborto collo* una verità senza vederne *perché*. Ma proprio vederne il perché è invece, a mio avviso, l'essenziale, ... (Bruno De Finetti, op. cit.).

Di conseguenza, la definizione delle probabilità soggettive risponde ai criteri di libertà e responsabilità, ma gli stessi criteri sono richiesti per stabilire i valori di taglio per il calcolo delle medie potate dei dati di misura, i pesi delle osservazioni, i livelli di significatività per giudicare l'attendibilità dei risultati ottenuti (in termini di rispondenza o meno alle attese e/o di comparabilità con altri risultati, già precedentemente ottenuti) e quanto altro di arbitrario⁶⁸ intercorre nell'analisi di tutti i dati.

Una guida, utile alle scelte richieste, è fornita da molteplici indicatori, quali il tempo disponibile ed i costi previsti, nonché altri fattori operativi, come l'indeterminazione (ovvero il suo contrario, cioè l'accuratezza) e la precisione delle stime attese, l'affidabilità dello schema di misura disegnato, il condizionamento del modello matematico prescelto e la robustezza del metodo di stima adottato. Come ben evidente, invece di scelte obbligate, si tratta sempre di scelte libere che si auspicano responsabili.

Per quanto riguarda poi le scelte dei modelli e dei metodi, gli approcci deterministico (o semi-deterministico, con le analisi in frequenza) ed aleatorio attengono rispettivamente alla teoria delle decisioni⁶⁹ ed alla teoria della probabilità (di cui la statistica è un'applicazione operativa). Tuttavia i due approcci non sono poi così lontani, potendosi stabilire relazioni certe fra dipendenza logica e stocastica (laddove la seconda può tuttavia scomparire in una sequenza sfortunata, oppure comparire solo per un gioco numerico).

Del resto, un parallelo interessante tra la teoria della probabilità e la meccanica razionale rileva identità concettuali fra la distribuzione di probabilità e la localizzazione delle masse, il valore centrale ed il baricentro, la dispersione dei dati ed il nocciolo d'inerzia. Inoltre un altro interessante parallelo può essere istituito tra i test statistici (parametrici e non parametrici, meglio definiti come *distribution free*, nella letteratura inglese) e le verifiche meccaniche sulle azioni di sforzo e le deformazioni.

⁶⁷ Le note a seguire sono solo una traccia, parziale e limitata, di quanto esposto in: Teoria della probabilità – Sintesi introduttiva con appendice critica, di Bruno De Finetti (Einaudi, Torino, 1970), diversamente compreso ed interpretato secondo gli interessi degli autori.

⁶⁸ Pur riconoscendone un certo intercambio, De Finetti precisa il significato degli aggettivi: aleatorio, stocastico e casuale, riservando il primo alla teoria della probabilità, il secondo al calcolo delle probabilità ed il terzo alla comune espressione "per caso". Ovviamente l'associazione tra parole e concetti è sempre arbitraria (come le classificazioni ed i confini), ma precisarne i termini evita ambiguità.

⁶⁹ Un metodo serio per assegnare probabilità opera con valori discreti e distanti, ed anche la teoria delle decisioni può essere graduata, passando dalla logica binaria a quella a tre valori (vero, falso ed indeterminato, come proposto da Hans Reichenbach).

Nelle discipline del rilevamento, la maggior parte delle scelte probabilistiche si fonda sull'assunzione della normalità dei dati di misura e della massima verosimiglianza come criterio per ricavare le stime attese (che si riduce al noto criterio dei minimi quadrati, se le stime attese sono lineari). D'altra parte, questa scelta deriva dall'applicazione del limite centrale ⁷⁰ e la sua alta convergenza, relativamente alle stime lineari (dove medie e medie ponderate sono buone stime già attorno alla decina di osservazioni).

Dopodiché la verifica delle ipotesi, così come il controllo di qualità, si fonda su analogie e sull'induzione che hanno larga parte in matematica, benché non siano ben fondate, secondo i requisiti teorici della filosofia della scienza. Tutto ciò riporta al dibattito aperto, fra induzione ed deduzione, ovvero fra trascurare i dati contrari o confutare una teoria ⁷¹, dati alcuni contro-esempi (per contro, gli stessi contro-esempi possono essere dati contrari, avvicinando così i due modi di procedere).

L'autore citato presenta l'inferenza bayesiana (che discende direttamente dal teorema di Bayes per il calcolo di probabilità condizionate), evidenziando l'importanza della probabilità a priori (al posto delle classiche stime frequentiste ⁷²). Tuttavia lo stesso autore riconosce la particolarità (all'interno di queste stime frequentiste) dei test sequenziali, potendosi avviare anche questi con selezionate probabilità a priori, opportunamente pesate e sottoportabili a diverse simulazioni.

Accanto ai test e spesso preliminarmente, l'uso di certi diagrammi è particolarmente indicato, per mettere in evidenza le caratteristiche salienti di dati e risultati. In questo modo, il diagramma di densità, quello cumulato di ripartizione, il suo inverso di graduazione e l'integrale di questo ultimo di concentrazione bene si prestano a mettere in evidenza comportamenti distribuzionali. Invece i box plot sono particolarmente utili per mostrare il valore centrale, la dispersione dei dati ed eventuali loro anomalie.

Altri grafici sono poi indicati per modellare diverse forme di dipendenza, come le tabelle a doppia entrata, per la connessione, le curve di regressione e variabilità, per la dipendenza funzionale, e le rette di regressione e gli intervalli fiduciali (ad andamento di tipo iperbolico), per la correlazione. Invece le curve di potenza danno indicazioni sull'opportunità di accettare o respingere ipotesi alternative, in relazione alla loro disgiunzione o meno dall'ipotesi fondamentale (o nulla).

Pur essendo una questione ai margini delle discipline del rilevamento, un'attenzione particolare deve essere dedicata ai piccoli campioni per i quali è possibile parlare di intercambiabilità dei dati di misura, ma non della loro indipendenza, ed anche le stime di massima verosimiglianza presentano evidenti difficoltà, in assenza di informazioni a priori che ne temperano le rigidità caratteristiche ⁷³. Un'alternativa praticabile è sempre offerta da stime di minimax (o da altre ancora) che operano in base a procedure robuste, più flessibili.

Caratteristiche complementari sono date da variabili qualitative, laddove qualitative siano anche le probabilità (comparabili e condizionabili, ma non sommabili). Quasi in opposizione a queste variabili sono da citare i dati ordinati, perché spazialmente distribuiti (cioè georeferenziati) e/o dinamici nel tempo. Infatti questi insiemi di dati mostrano memoria interna (come le catene di Markov) e sono interpretabili (con approssimazioni del secondo ordine), come processi di Poisson, se a tempi discreti, oppure processi di Wiener, se continui.

⁷⁰ Il limite centrale è un teorema di Gauss che assicura la convergenza asintotica alla distribuzione normale, per le combinazioni lineari di variabili, comunque distribuite, purché equiponderate ed indipendenti. In questo stesso contesto, la legge dei grandi numeri di Jakob Bernoulli assicura la comparabilità fra grandezze stocastiche e dati di misura, data la convergenza debole (cioè solo probabilistica) delle sequenze lunghe dei secondi alle variabili, costituite dai primi (dove l'eshaustività è comunque preferibile alla sola sufficienza).

⁷¹ Proprio il dibattito fra induzione e deduzione è al centro del confronto metodologico fra Rudolf Carnap e Karl Raimund Popper.

⁷² Originariamente le stime frequentiste derivano dalla legge empirica del caso di Richard Von Mises e dalla sua definizione frequentista di probabilità che presentano il difetto di poter essere falsate da eventuali sequenze sfortunate. Tuttavia l'usuale esecuzione di test su campioni ripuliti e maggiormente l'adozione di test sequenziali fanno sì che anche l'inferenza frequentista dia risultati accettabili.

⁷³ Una concezione moderna della stima preferisce stime per intervalli alle stime puntuali, cosicché un intervallo indifferente, posizionato bene e di ampiezza accettabile, è l'informazione che sostituisce un valore centrale (falsamente considerato "vero") e la sua dispersione.

Infine un problema rilevante è dato dal campionamento che dovrebbe richiedere la bernoullianità dei dati, provvedere alla loro stratificazione ed essere logistico. Innanzitutto questo significa che tutti i dati dovrebbero essere indipendenti tra loro e comunque, nella pratica, il più indipendenti possibili. Infatti una mancanza di indipendenza determina dipendenze positive, tra la maggior parte dei dati (potendosi dimostrare che quelle negative sono teoricamente impossibili per grandi insiemi di dati).

D'altra parte, le dipendenze positive abbattano le precisioni delle stime della maggior parte delle grandezze (ad esempio, medie, medie ponderate, altre somme e prodotti), tanto più depresse, quanto maggiori sono le dipendenze. Grandi dipendenze positive sono invece utili nel caso di differenze e rapporti, ma differenze e rapporti sono sempre tra due grandezze e tutto ciò significa solo eliminare errori sistematici, facendo proprio differenze e rapporti, come raccomanda già la metrologia classica.

Dopodiché provvedere alla stratificazione significa proprio riconoscere che, per dati indipendenti, le precisioni delle stime dei loro valori centrali (e non solo) decrescono con la radice quadrata della numerosità (se espresse con le stesse unità di misura delle stime). Un ulteriore abbattimento di quelle precisioni si ottiene, grazie al teorema di decomposizione ortogonale della varianza (se i valori centrali sono medie o medie ponderate), separando varianze residue da varianze spiegate.

Infatti proprio la/e stratificazione/i mette/ono in evidenza il/i differente/i andamento/i delle medie (o delle medie ponderate), rispetto alla/e media/e generale/i. Inoltre nel caso in cui i valori centrali siano diversi dalle medie (e dalle medie ponderate), pur essendo diversa, a sua volta, la quantizzazione della dispersione ed in mancanza di un analogo teorema di decomposizione ortogonale, la dispersione residua è comunque minore della dispersione generale (data la presenza della/e dispersione/i spiegata/e).

Da ultimo, il comportamento logistico è suggerito dalla possibilità di procedere in modo esaustivo, per piccoli campioni da rilevare, in modo proporzionale (via, via decrescente), per campioni più grandi, ed in modo costante, per campioni troppo grandi (cioè composti da una qualche infinità di elementi o comunque tali da considerare). A riguardo, test opportuni, collegati alle grandezze da stimare (a partire dai dati), forniscono le espressioni analitiche delle approssimazioni logistiche specifiche.

Ancora una volta, pur essendo una questione ai margini per le discipline del rilevamento, un'attenzione particolare deve essere dedicata ai piccoli campioni e, in particolare, ai problemi dell'indipendenza dei dati, della non riammissione dei dati estratti (proprio come il non reinserimento di un gettone o di una carta, ecc. per un certo gioco) e il tempo di ritorno di un evento, spesso desiderato (cioè la probabilità di avere, per la prima volta, quell'evento, spesso considerato un successo).

Questi tre problemi sono classici nella statistica elementare e sono spiegati dalle variabili casuali discrete: binomiale (o bernoulliana), ipergeometrica e geometrica (ad eccezione della prima, anche storicamente, non molto note, nell'ambito delle discipline del rilevamento). Per questa ragione, nell'immediato prosieguo si presentano le tre variabili casuali, con le loro distribuzioni e le statistiche principali (in particolare, la media e la varianza).

Un commento conclusivo a questo breve excursus sul Trattamento delle Osservazioni rileva come la Statistica sia nata per le esigenze dell'Astronomia e della Geodesia (oltre ché della Teoria dei Giochi), ma abbia fatto molta strada, insieme all'Analisi matematica ed alla Topologia ⁷⁴, come pure insieme alla Biologia, alla Genetica, alla Demografia, all'Econometria, ecc. Resta così un importantissimo compito precipuo della Geomatica continuarne lo studio, per non perderne il passo.

⁷⁴ Anche tanta parte della Matematica origina da studi di Astronomia e Geodesia, spesso addirittura in una comunanza di persone.

La distribuzione binomiale (o bernoulliana) spiega il comportamento statistico delle estrazioni di successioni di eventi ⁷⁵ (tra loro indipendenti), contro il loro non accadere, come la somma di tutte le successioni possibili (tra loro incompatibili). Questa distribuzione è simmetrica, solo se uguali sono le probabilità elementari di avere un evento, oppure no. Inoltre trasformando la variabile casuale somma nella variabile casuale media, è facile mostrare il diminuire della varianza (proporzionalmente alla numerosità del campione).

Legenda: n dimensione del campione
 k eventi favorevoli nello stesso campione

Densità discreta di probabilità: $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ con $0 < p < 1$
 e $k = 0 \div n$

Media: $\mu = np$ Media della variabile p/n : $\mu = p$

Varianza: $\sigma^2 = np(1-p)$ Varianza della variabile p/n : $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n}$

La distribuzione ipergeometrica spiega il comportamento statistico delle estrazioni di eventi (non tra loro indipendenti, come per un'estrazione in blocco), sempre contro il loro accadere. In questo modo, la variabile è analoga alla precedente, tranne che per la pretesa/imposta modificazione della popolazione universo, dopo ogni singola estrazione. Nel caso di prove ripetute, la distribuzione è utile, se si può imporre il non accadere di certe determinate successioni (ad esempio, perché considerate indesiderate).

Legenda: N dimensione della popolazione universo
 r eventi favorevoli nella stessa popolazione
 n dimensione del campione
 k eventi favorevoli nello stesso campione

Densità discreta di probabilità: $p_k = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ con $k = 0 \div n$

Media: $\mu = np$

Varianza: $\sigma^2 = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$

⁷⁵ Un esempio di estrazioni di successioni di eventi indipendenti, metrologicamente significativo, sono le prove ripetute, in condizione di indipendenza.

La distribuzione geometrica (derivata direttamente dalla distribuzione binomiale o bernoulliana) spiega il tempo di ritorno di un evento, spesso desiderato (cioè la probabilità di avere, per la prima volta, quell'evento, spesso considerato un successo), dopo un certo numero di non accadimenti dello stesso evento (a loro volta, considerati un susseguirsi di insuccessi). Nel caso di prove ripetute, questa variabile serve a modellare l'attesa di un certo risultato, a fronte del suo non accadere.

Legenda: k eventi non favorevoli nello stesso campione

Densità discreta di probabilità: $p_k = (1 - p)^k p$ con $0 < p < 1$
e $k = 0 \div \dots$

Media: $\mu = \frac{1 - p}{p}$ Varianza: $\sigma^2 = \frac{1 - p}{p^2}$

Per completezza nell'esposizione, le distribuzioni poissoniana e binomiale negativa spiegano l'accadere di eventi rari (ma la prima ha una genesi diversa dalle precedenti, anche esiste una relazione tra la variabile casuale binomiale e la variabile casuale poissoniana, come pure tra queste due variabili casuali e la variabile casuale normale, per mezzo di un passaggio al limite, essendo questa ultima continua e non discreta, come tutte le precedenti). Nelle prove ripetute, le distribuzioni sono utili a modellare l'accadere di dati anomali ⁷⁶.

Legenda per la distribuzione poissoniana: k eventi non favorevoli nel campione

Densità discreta di probabilità: $p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ con $\lambda > 0$
e $k = 0 \div \dots$

Media: $\mu = \lambda$ Varianza: $\sigma^2 = \lambda$

Legenda per la distribuzione binomiale negativa ⁷⁷: r eventi favorevoli nel campione
 k eventi non favorevoli nello stesso campione

Densità discreta di probabilità: $p_k = \binom{r + k - 1}{k} (1 - p)^k p^r$ con $0 < p < 1$
e $k = 0 \div \dots$

Media: $\mu = r \frac{1 - p}{p}$ Varianza: $\sigma^2 = r \frac{1 - p}{p^2}$

⁷⁶ Nelle discipline del rilevamento, la maggior parte dei dati anomali è ascrivibile ad errori grossolani.

⁷⁷ La distribuzione binomiale negativa serve per l'accadere di eventi rari, non equiprobabili (come si ha per la distribuzione poissoniana).

Appendice C – Realtà e modellazione

La realtà ha una sua forma propria che sfugge spesso ad una qualsiasi modellazione fedele; tuttavia nelle svariate e differenti forme dei linguaggi espressivi, molti e vari sono tentativi di comprenderla ed interpretarla. Infatti essi passano dal racconto (parlato o scritto), al linguaggio musicale (prodotto con strumenti e/o con la voce), a varie forme dell'arte (come la pittura, la scultura e l'architettura, ma anche la fotografia ed il cinema), nonché ad altre diverse forme artistiche (come la danza, il mimo, ecc.).

Una forma particolare, insieme accurata e precisa, per comprendere ed interpretare, la realtà è offerta dal linguaggio matematico che, sotto determinate ipotesi, è capace di modellare la realtà (od almeno una parte di essa). Pertanto per quella parte compresa ed interpretata, un certo rigore è presentato, nel rispetto delle grandezze in esame, delle loro proporzioni e simmetrie, e di altre caratteristiche metriche e tematiche (per le quali sia possibile una quantizzazione delle qualità, come per i colori).

Usualmente in matematica si distinguono un approccio deterministico (tipico della geometria e dell'analisi matematica) ed un approccio stocastico (tipico della statistica e del calcolo delle probabilità). Tuttavia così come la geometria può confluire nell'analisi matematica e viceversa, come pure la statistica degli esperimenti è formalmente identica al calcolo delle probabilità dei modelli teorici, anche i due approcci deterministico e stocastico possono essere presentati come due espressioni di un'unica modellazione.

Infatti un sistema deterministico di equazioni differenziali non lineari può presentare soluzioni che vanno oltre i casi stabile, ciclico e toroidale. Allora le sue soluzioni mostrano il caos deterministico (dei cosiddetti strani attrattori a matassa) e, di conseguenza, proprio queste soluzioni caotiche possono essere analizzate come le realizzazioni di certi processi stocastici (per il cui studio impiegare tutti gli strumenti propri della statistica e del calcolo delle probabilità).

Il mare è appena increspato e le piccole onde battono sulla riva sabbiosa. Il signor Palomar⁷⁸ è in piedi sulla riva e guarda un'onda. Non che egli sia assorto nella contemplazione delle onde. Non è assorto, perché sa bene quello che fa: vuole guardare un'onda e la guarda. Non sta contemplando, perché per la contemplazione ci vuole un temperamento adatto, uno stato d'animo adatto e un concorso di circostanze esterne adatto: e per quanto il signor Palomar non abbia nulla contro la contemplazione in linea di principio, tuttavia nessuna di quelle tre condizioni si verifica per lui. Infine non sono le "onde" che lui intende guardare, ma un'onda singola e basta: volendo evitare le sensazioni vaghe, egli si prefigge per ogni suo atto un oggetto limitato e preciso.

Il signor Palomar vede spuntare un'onda in lontananza, crescere, avvicinarsi, cambiare di forma e di colore, avvolgersi su sé stessa, rompersi svanire, rifluire. A questo punto potrebbe convincersi d'aver portato a termine l'operazione che si era proposto e andarsene. Però isolare un'onda separandola dall'onda che immediatamente la segue e pare la sospinga e talora la raggiunge e travolge, è molto difficile; così come separarla dall'onda che la precede e che sembra trascinarsela dietro verso la riva, salvo poi magari voltargli contro come per fermarla. E se poi si considera ogni ondata nel senso dell'ampiezza, parallelamente alla costa, è difficile stabilire fin dove il fronte che avanza si estende continuo e dove si separa e segmenta in onde a sé stanti, distinte per velocità, forma, forza, direzione.

Insomma, non si può osservare un'onda senza tener conto degli aspetti complessi che concorrono a formarla e di quelli altrettanto complessi a cui essa dà luogo. Questi aspetti variano continuamente, per cui un'onda è sempre diversa da un'altra onda; ma è anche vero che ogni onda è uguale a un'altra onda, anche se non immediatamente contigua o successiva; insomma ci sono delle forme e delle sequenze che si ripetono, sia pur distribuite irregolarmente nello spazio e nel tempo. Siccome ciò che il signor Palomar intende fare in questo momento è semplicemente vedere un'onda, cioè cogliere tutte le sue componenti

⁷⁸ Il racconto *Palomar sulla spiaggia – Lettura di un'onda* è tratto dal romanzo *Palomar* di Italo Calvino che è una collezione di racconti sul "rapporto tra l'io e il mondo e le dimensioni della mente" (come scrive Calvino stesso in una nota all'indice di *Palomar*). Infatti sempre lo stesso autore, nella sua *Prefazione a Palomar*, del 1983, sottolinea che "Rileggendo il tutto, m'accorgo che la storia di Palomar si può riassumere in due frasi: Un uomo si mette in marcia per raggiungere, passo a passo, la saggezza. Non è ancora arrivato". In questo contesto, la *Lettura di un'onda* (fatta da *Palomar sulla spiaggia*), mostra la caoticità della realtà e conseguentemente la complessità di una sua fedele modellazione (essendo tutto questo largamente indipendente dall'approccio adottato, deterministico o stocastico, oppure misto, in quanto ciascuno di questi può essere tramutato in un altro e viceversa).

simultanee senza trascurarne nessuna, il suo sguardo si soffermerà sul movimento dell'acqua che batte sulla riva finché potrà registrare aspetti che non aveva colto prima; appena si accorgerà che le immagini si ripetono saprà di aver visto tutto quello che voleva vedere e potrà smettere.

Uomo nervoso che vive in un mondo frenetico e congestionato, il signor Palomar tende a ridurre le proprie relazioni col mondo esterno e per difendersi dalla nevralgia generale cerca quanto più può di tenere le sue sensazioni sotto controllo.

La gobba dell'onda venendo avanti s'alza in un punto più che altrove ed è di lì che comincia a rimboccarsi di bianco. Se ciò avviene a una certa distanza da riva, la schiuma ha il tempo d'avvolgersi su sé stessa e scomparire di nuovo come inghiottita e nello stesso momento tornare a invadere tutto, ma stavolta spuntando da sotto, come un tappeto bianco che risale la sponda per accogliere l'onda che arriva. Però, quando ci si aspetta che l'onda rotoli sul tappeto, ci si accorge che non c'è più l'onda ma solo il tappeto, e anche questo rapidamente scompare, diventa un luccichio d'arena bagnata che si ritira veloce, come se a respingerlo fosse l'espandersi della sabbia asciutta e opaca che avanza il suo confine ondulato.

Nello stesso tempo bisogna considerare le rientranze del fronte, dove l'onda si divide in due ali, una che tende verso riva da destra a sinistra e l'altra da sinistra a destra, e il punto di partenza o d'arrivo de loro divergere o convergere è questa punta in negativo che segue l'avanzare delle ali ma sempre trattenuta più indietro e soggetta al loro sovrapporsi alternato, finché non viene raggiunta da un'altra ondata più forte ma anch'essa con lo stesso problema di divergenza-convergenza, e poi da un'altra più forte ancora che risolve il nodo infrangendolo.

Prendendo a modello il disegno delle onde, la spiaggia inoltra nell'acqua delle punte appena accennate che si prolungano in banchi di sabbia sommersi, come le correnti ne formano e disfano a ogni marea. E' una di queste che il signor Palomar ha scelto come punto di osservazione, perché le onde vi battano obliquamente da una parte e dall'altra, e scavalcando la superficie semisommersa s'incontrano con quelle che arrivano dall'altra parte. Dunque per capire com'è fatta un'onda bisogna tener conto di queste spinte in direzioni opposte che in una certa misura si controbilanciano e in una certa misura si sommano, e producono un infrangersi generale di tutte le spinte e controspinte nel solito dilagare di schiuma.

Il signor Palomar ora cerca di limitare il suo campo d'osservazione; se egli tiene presente un quadrato diciamo di dieci metri di riva per dieci metri di mare, può completare un inventario di tutti i movimenti d'onde che vi si ripetono con varia frequenza entro un dato intervallo di tempo. La difficoltà è fissare i confini di questo quadrato, perché se per esempio lui considera come lato più distante da sé la linea rilevata di un'onda che avanza, questa linea avvicinandosi a lui e innalzandosi nasconde ai suoi occhi tutto ciò che sta dietro; ed ecco che lo spazio preso in esame si ribalta e nello stesso tempo si schiaccia.

Comunque il signor Palomar non si perde d'animo e a ogni movimento crede di essere riuscito a vedere tutto quel che poteva vedere dal suo punto d'osservazione, ma poi salta fuori sempre qualcosa di cui non aveva tenuto conto. Se non fosse per questa sua impazienza di raggiungere un risultato completo e definitivo della sua operazione visiva, il guardare le onde sarebbe per lui un esercizio molto riposante e potrebbe salvarlo dalla nevralgia, dall'infarto e dall'ulcera gastrica. E forse potrebbe essere la chiave per padroneggiare la complessità del mondo riducendola ad un meccanismo più semplice.

Ma ogni tentativo di definire questo modello deve fare i conti con un'onda lunga che sopravviene in direzione perpendicolare ai frangenti e parallela alla costa, facendo scorrere una cresta continua e appena affiorante. Gli sbalzi delle onde che s'arruffano verso riva non turbano lo slancio uniforme di questa cresta compatta che li taglia ad angolo retto e non si sa dove vada né da dove venga. Forse è un filo di vento di levante che muove la superficie del mare trasversalmente alla spinta profonda che viene dalle masse d'acqua del largo, ma quest'onda che nasce dall'aria raccoglie al passaggio anche le spinte oblique che nascono dall'acqua e le devia e raddrizza nel suo senso e se le porta con sé. Così va continuando a crescere e a prendere forza finché lo scontrarsi con le onde contrarie non la smorza a poco a poco fino a farla sparire, oppure la torce fino a confonderla in una delle tante dinastie d'onde oblique, sbattuta a riva con loro.

Appuntare l'attenzione su un aspetto lo fa balzare in primo piano e invadere il quadro, come in certi disegni che basta chiudere gli occhi e al riaprirli la prospettiva è cambiata. Adesso in questo incrociarsi di creste variamente orientate il disegno complessivo risulta frammentato in riquadri che affiorano e svaniscono. S'aggiunga che il riflusso d'ogni onda ha anch'esso una sua forza che ostacola le onde che sopravvengono. E se si concentra l'attenzione su queste spinte all'indietro sembra che il vero movimento sia quello che parte dalla riva e va verso il largo. Forse il vero risultato a cui il signor Palomar sta per giungere è di far correre le onde in senso opposto, di capovolgere il tempo, di scorgere la vera sostanza del mondo al di là delle abitudini sensoriali e mentali? Non, egli arriva fino a provare un leggero senso di capogiro, non oltre. L'ostinazione che spinge le onde verso la costa ha partita vinta: di fatto, si sono parecchio ingrossate. Che il vento stia per cambiare? Guai se l'immagine che il signor Palomar è riuscito minuziosamente a mettere insieme si sconvolge e frantuma e disperde. Solo se egli riesce e tenerne presente tutti gli aspetti insieme, può iniziare la seconda fase dell'operazione: estendere questa conoscenza all'intero universo.

Basterebbe non perdere la pazienza, cosa che non tarda ad avvenire. Il signor Palomar s'allontana lungo la spiaggia, coi nervi tesi com'era arrivato e ancor più insicuro di tutto.

Appendice D – Vitalismo⁷⁹ e riduzionismo

Fra i due punti di vista tradizionalmente opposti in biologia, vitalista e riduzionista, contrariamente all'opinione corrente, è proprio il primo di vista riduzionista ad essere metafisico, poiché esso postula una riduzione, mai stabilita sperimentalmente, dei fatti vitali alla pura chimica-fisica. Al contrario, il vitalismo si fonda sull'insieme impressionante dei fatti di regolazione e di finalità che coprono la quasi totalità delle attività vitali. Ma il vitalismo s'è screditato con l'uso di un verbalismo vuoto (il "principio organizzatore", le "entelechie" di Driesch), difetto ripreso e amplificato dai filosofi teleologici successivi (Bergson, Teilhard de Chardin). Non giudichiamo troppo severamente questi pensatori; le loro opere contengono molte aperture spesso ardite che i sapienti vincolati dal tabù meccanicista non potevano intravedere; e anche il verbalismo di Driesch testimonia il bisogno della mente di comprendere una situazione senza analogie nelle scienze del mondo inanimato. La disputa in fondo è piuttosto vana; molte proprietà, chimico-fisiche, della materia ci sono ancora sconosciute; il vecchio sogno atomista, ricostruire il nostro universo e tutte le sue proprietà qualitative col solo gioco della combinatoria delle particelle elementari e le loro interazioni è solo un programma appena iniziato (ricordiamo, per esempio, che non esiste alcuna teoria accettabile dello stato liquido della materia ...) Il biologo, se vuole progredire e comprendere i processi vitali, non può attendere che il chimico-fisico gli offra una teoria completa di tutti i fenomeni locali riscontrati nella materia vivente. Egli si sforzerà soltanto di costruire un modello localmente compatibile con le proprietà note del mezzo e di evidenziare la struttura algebrico/geometrica che assicura la stabilità del sistema senza sforzarsi di raggiungere una descrizione esaustiva del metabolismo vitale. Questo punto metodologico si scontra con la filosofia dominante attualmente, che fa dell'analisi di un sistema nelle sue ultime componenti il primo cammino da compiere per rivelarne la natura. Si deve respingere come illusoria quella concezione primitiva e quasi cannibalesca della conoscenza per la quale conoscere una cosa significa prima di tutto ridurla in pezzi, come il bambino che demolisce un orologio e ne sparpaglia gli ingranaggi per capirne il meccanismo. Certo, in molti casi, la distruzione per catastrofe di un sistema può svelare della sua struttura molti elementi interessanti. Ma per questo occorre che questa distruzione non sia troppo brutale, al punto da distruggere i fattori significativi in componenti insignificanti, come fa quasi continuamente l'analisi chimica dell'ambiente vivente. Così, in embriologia sperimentale, lo studio delle interazioni fra tessuti viventi (dopo la dissociazione e ricombinazione dei foglietti costitutivi) ha rivelato una quantità di elementi incontestabilmente molto più interessanti di tutte le precedenti analisi biochimiche. Il nostro metodo, mirante ad attribuire all'essere vivente una struttura geometrica formale che ne assicuri la stabilità, può essere caratterizzato come una sorta di vitalismo geometrico; si tratta in realtà di una struttura globale che regge i dettagli locali come l'entelechia di Driesch. Ma questa struttura può in linea di principio spiegarsi unicamente con l'aiuto di determinismi locali, teoricamente riducibili a meccanismi di natura chimico-fisica. Non so se questa riduzione possa realmente effettuarsi in tutti i dettagli; credo nondimeno che una comprensione della struttura formale sia utile, anche se la sua giustificazione chimico-fisica è incompleta e insufficiente. ...

... orbene, come proprio una completa formalizzazione dell'aritmetica urta contro le aporie della teoria degli insiemi, legate all'auto-riferimento (il barbiere è il solo uomo del paese che rade tutti gli uomini che non si radono da soli), così una formalizzazione della dinamica vitale incontra necessariamente lo stesso tipo di difficoltà, inerenti all'auto-riferimento, alla natura delle differenze tra l'io e l'altro in una parola all'ambiguità essenziale di cui soffre il concetto d'identità. Secondo il mio punto di vista, il simbolico trae origine dal conflitto tra due modi radicalmente diversi di considerare l'identità di un essere.

- Per un essere concreto, materiale, l'identità può essere definita semplicemente mediante il dominio (connesso) di spazio-tempo che tale essere occupa. Infatti due oggetti materiali sono l'un l'altro impenetrabili, come ad esempio due solidi. Così l'identità di un uomo (il suo nome) può considerarsi definita mediante la localizzazione spazio-temporale del dominio occupato dal suo corpo. (L'identità "civile" riduce tale localizzazione al luogo ed alla data di nascita).
- Per un essere astratto, come ad esempio una qualità, l'identità non riposa più su una base spaziale. Lo stesso colore, ad esempio il verde, può trovarsi contemporaneamente in due luoghi diversi dello spazio, la definizione stessa della qualità è totalmente indipendente dalla localizzazione spazio-temporale degli oggetti che la posseggono. Qui l'identità è di natura semantica, fa appello alla comprensione di un concetto. Dal momento in cui la "qualità dell'essere", lo statuto ontologico che viene accordato a un essere è più di natura semantica che di natura spaziale, niente vieta che quest'essere possa comparire simultaneamente – con apparenze per altro diverse – in luoghi distinti dello spazio (René Thom).

⁷⁹ Alla parola "vitalismo", propria della biologia, si può sostituire la parola "olismo", avente un carattere universale, capace insieme di comprendere, oltre ai fenomeni biologici, anche i fenomeni sociali e della conoscenza. Infatti poiché nessuno di questi fenomeni è solo riducibile alle sue componenti, la loro comprensione richiede anche lo studio dell'organizzazione di queste componenti, senza tuttavia attribuire a questa organizzazione una prospettiva teleologica od un disegno intelligente (passato). Tutto ciò ha precisi interessi anche per una Geomatica, una Geomatica applicata e tutte le Applicazioni geomatiche (che non sono Geomatica, ma di questa usano le varie tecnologie: metrologiche, matematiche, statistiche, numeriche, informatiche, videografiche, multimediali, ecc.), intese ad offrire contributi non solo alla descrizione, ma anche all'interpretazione del tutto e delle sue parti.

Alcune altre osservazioni, a complemento della lunga citazione precedente ⁸⁰, rilevano innanzitutto la costruzione di modelli, come la caratteristica principale della matematica moderna, in particolare nelle sue applicazioni alle scienze e tecniche, varie e diverse, che la richiedono. Infatti mentre la matematica dei secoli passati, così come quelle scienze e tecniche, riteneva di essere l'immagine vera e naturale del mondo, ormai è ben evidente, come tutti siano solo modelli adeguati, più o meno.

In questo contesto e con quel misto d'interpretazione, insieme olistica e riduzionista di fatti e fenomeni, si noti l'essere sperimentalmente indistinguibili, tra loro, fatti o fenomeni determinati, ma instabili, da fatti o fenomeni indeterminati (ribadendo insieme la precarietà e provvisorietà dei modelli, e la vacuità teorica di tanti confini e tante classificazioni, ovviamente necessari per fare scienza e costruire tecnologie, ma solo utili strumenti di lavoro e nulla più).

Una seconda osservazione evidenzia che nessun sistema è isolato per cui, in generale, anche l'interazione tra sistemi stabili (od apparentemente stabili, a causa del loro non isolamento e della loro storia pregressa) determina sistemi instabili (ovvero altri sistemi che possono passare da uno stato ad un altro, tramite una catastrofe). Del resto, le stesse catastrofi possono interagire tra loro, a loro volta, determinando catastrofi di altro tipo.

Come per i nodi ed a differenza delle simmetrie ⁸¹, non esiste una classificazione completa delle catastrofi i cui tipi più semplici si possono descrivere a grumi (tipici della condensazione), a bolle (tipici dell'ebollizione), filamentosi o lamellari (tipici di certi fenomeni biologici). Inoltre con un più preciso riferimento geometrico, una catastrofe può presentare un ombelico iperbolico (come la cresta dell'onda) od uno ellittico (come la punta di un pelo), oppure uno parabolico (come la capocchia di un fungo).

Allora fatti o fenomeni determinati, ma instabili, oppure indeterminati (in corrispondenza del tipo di linguaggio deterministico o stocastico adottato) sono anche le misure ed i modelli che le interpretano (e poi, entro certi limiti, anche i metodi che permettono di dare valori ai secondi, a partire dalle prime). Infatti durante la veglia, una persona può percepire il proprio corpo e lo spazio circostante, estendendo questa percezione a spazi più estesi grazie ad opportuni arnesi.

I primi arnesi sono attrezzi di lavoro (come le armi da caccia) che estendono di poco lo spazio, mantenendo le proprietà euclidee dello stesso spazio, mentre attrezzi più raffinati sono strumenti di misura, veri e propri che fanno passare dallo spazio euclideo (che è cartesiano ortogonale) ad un primo spazio geodetico (piano per quanto riguarda la planimetria, ma sferico con riferimento all'altimetria). Dopodiché la ripetibilità indefinita delle misure, oltre certi limiti, impone il passaggio agli altri spazi geodetici.

Pertanto queste misure, questi metodi e questi modelli (insieme alle esigenze dei magazzini e dei mercati) sono all'origine della matematica (con l'aritmetica, l'algebra e la geometria), con una storia umana che segue quasi gli stessi passi di quelli fatti da un bambino piccolo, nelle sue tante e successive fasi di apprendimento. A riguardo è interessante notare, come la comprensione geometrica sia dapprima metrologica e, solo dopo, anche grafica.

Infatti tanto i graffiti antichi, quanto i disegni dei bambini piccoli mostrano rappresentazioni appiattite, a partire da una direzione visuale privilegiata (spesso dominata da un'evidente simmetria assiale dell'oggetto rappresentato), dove i particolari sono rappresentati seguendo regole di dominanza – dipendenza, cioè

⁸⁰ Il seguito di questa appendice è liberamente ripreso e riassunto principalmente da: Stabilità strutturale e morfogenesi – Saggio di una teoria generale dei modelli, di René Thom (Giulio Einaudi Editore, Torino, 1980).

⁸¹ Per quanto riguarda le simmetrie, la classificazione completa riguarda quelle lineari (esemplificate dai fregi), planari (esemplificate dalle pavimentazioni) e spaziali (esemplificate dai cristalli), mentre tutte le simmetrie dello spazio a quattro dimensioni sono classificate solo da poco decenni.

mantenendo corrette relazioni topologiche, ma non la corretta struttura 3D, propria della geometria solida degli oggetti ⁸².

Ampliando il discorso, già fatto dalle misurazioni alla matematica, al linguaggio parlato ed alla scrittura, si può subito constatare che la scrittura sia la conquista più tarda, discendendo dalle incisioni e dalla grafica. Infatti i pittogrammi danno vita agli ideogrammi (cioè alla prima forma di scrittura vera e propria) e, solo più tardi e non ovunque, alla scrittura dapprima sillabica e solo successivamente alfabetica (innegabilmente la più semplice, ma anche la più complessa, richiedendo l'identificazione di fonemi).

Invece per quanto riguarda il linguaggio parlato, esso precede qualsiasi altra manifestazione culturale umana e, secondo l'autorevole parere di moderni linguisti, è una caratteristica dell'umanità, essenziale ed esclusiva. Due sono gli scopi del linguaggio, l'apprendimento di concetti, anche astratti (che non possono essere ridotti alla suzione ed alla lallazione degli infanti, e tantomeno ai pochi versi, sensati ed interpretabili, degli animali, anche superiori) e la comunicazione sociale.

Caratteristica fondamentale del linguaggio umano è la completa arbitrarietà del legame tra significante e significato (che sembra collegare un oggetto ad una parola, mentre collega solo un'immagine acustica, di un determinato oggetto, alla capacità di significare qualcosa per chi l'intende), come spiegato dalla grammatica strutturalista saussuriana ⁸³. Un'altra caratteristica del linguaggio umano è l'unicità della sintassi profonda, come spiegato invece dalla grammatica trasformazionale/generativa chomskiana ⁸⁴.

Le caratteristiche più importanti della sintassi profonda sono l'unicità del predicato, la possibile presenza di due soli sostantivi: il termine dell'azione e lo strumento della stessa (dopo il soggetto e l'oggetto diretto), e la trasformazione di una frase attiva, in una passiva (con un complemento d'agente) od interrogativa, oppure in una negazione (con varie combinazioni). Invece la specificazione, come gli attributi e le apposizioni, sono qualificazioni dei nomi, mentre altri attributi (detti avverbi) sono qualificazioni dei predicati ⁸⁵.

Un ulteriore passaggio verso una comprensione globale del contenuto semantico del linguaggio mette in contatto la linguistica con la psicologia e, in particolare, con la psicologia delle forme (nell'originale tedesco, della *Gestalt* ⁸⁶) e la psicologia analitica junghiana ⁸⁷ dell'inconscio collettivo e degli archetipi. Infatti i concetti di prossimità, omogeneità, chiusura, continuità di direzione, movimento comune, armonia e semplicità sono alla base tanto della percezione, quanto dell'apprendimento.

Più complesso, è il discorso sugli archetipi, dipendendo in parte dalla natura propria dell'umanità, ma in altra parte anche dalle diverse storie dell'umanità stessa ⁸⁸, cosa che ne impedisce una classificazione chiusa e sicura. Infatti ad esempio, se il fuoco è certamente un archetipo universale, caratteristico dell'umanità da tempi antichissimi, il ghiaccio è un archetipo geograficamente limitato a quelle regioni dove la temperatura permette la solidificazione dell'acqua (liquida) nel ghiaccio (solido) ⁸⁹.

⁸² Da segnalare, ma estraneo agli scopi del presente lavoro, è il dibattito tra lo psicologo infantile e pedagogista svizzero Jean Piaget ed il matematico francese René Thom, sulla precedenza tra topologia e geometria, o viceversa.

⁸³ Ferdinand de Saussure è un linguista svizzero che, con la grammatica strutturalista (del primo novecento), fa avanzare la linguistica, rispetto alla grammatica comparativa (del primo '800) di Wilhelm von Humboldt.

⁸⁴ Noam Chomsky è un linguista americano contemporaneo che, con la grammatica trasformazionale/generativa, conclude un itinerario iniziato, nel corso del '900, con il riconoscimento dei morfemi (ovvero le radici invariabili delle parole), da parte del linguista russo Nikolaj Sergeevič Trubeckoj, ed il riconoscimento dei sintagmi (ovvero i soggetti, i predicati, i complementi diretti ed indiretti, ecc.), da parte del linguista americano Leonard Bloomfield.

⁸⁵ I complementi di tempo, luogo, compagnia/unione, modo, causa, fine/scopo, ecc. sono contrazioni di frasi coordinate o subordinate.

⁸⁶ La psicologia della Gestalt è il prodotto di una corrente psicologica tedesca, riparata in America, dopo l'avvento del nazismo.

⁸⁷ Carl Gustav Jung è uno psicologo e psichiatra svizzero, originariamente allievo di Sigmund Freud, e poi in grande dissenso, proprio sulle tematiche che più lo caratterizzano.

⁸⁸ Il cavallo e gli equini sono un archetipo euroasiatico ed africano, ma non nell'America precolombiana ed in Oceania (essendo assenti, fino alla conquista coloniale europea).

⁸⁹ In generale, sono archetipi le cose di uso comune (rappresentate da nomi), le azioni di pratica frequente (rappresentate da verbi) ed alcune qualità altrettanto comuni (rappresentate da aggettivi qualificativi e/o avverbi di qualità). Di conseguenza, senza alcuna pretesa



Joseph Mallord William Turner, Luce e Colore: la Teoria di Goethe⁹⁰ (Tate Gallery, Londra)



Joseph Mallord William Turner, Pioggia, vapore e velocità (National Gallery, Londra)

di completezza, si elencano alcune attività umane, coscienti ed inconscie (di cui alcune già proprie del regno animale) che costituiscono certamente archetipi universali. Innanzitutto la nutrizione e la riproduzione, come pure il sonno (dove il sogno ne costituisce un momento cosciente, almeno in parte; laddove il delirio è invece un momento sveglio, non particolarmente cosciente) e la veglia (in particolare, con il gioco, il lavoro e l'arte). Dopodiché tra le tante cose di uso comune, alcune centrali sono la società "militare", se è gerarchicamente organizzata, o libera, in caso contrario, oppure e per lo più di tipo misto, dove un altro archetipo, ormai da lungo tempo in voga, è anche il denaro, quale simbolo universale della ricchezza.

⁹⁰ La teoria dei colori di Johann Wolfgang von Goethe è sensista e si oppone a quella ottica (ed esatta, dal punto di vista della fisica) di Isaac Newton, a tutt'oggi, sostenendone ancora le interpretazioni psicologiche ed artistiche.

Una concezione sensista dello spazio ⁹¹

Lo spazio è l'oggetto precipuo della misura, del calcolo e dell'analisi delle discipline del rilevamento, ed una concezione sensista dello stesso favorisce una sua corretta e completa comprensione ed interpretazione. Infatti queste possono partire da due operazioni umane, strettamente collegate, la visione e la manipolazione (bastando pensare a tutte le pene sofferte da quelle persone, diversamente abili, perché in difficoltà, in una od in entrambe queste operazioni) che classificano spazi ed oggetti:

- oggetti che stanno nelle mani;
- oggetti che si guardano muovendo la testa;
- oggetti che si vedono camminando loro attorno;
- spazi che contengono oggetti e si esplorano compiendo una passeggiata;
- spazi che contengono oggetti e si esplorano compiendo un viaggio;
- lo spazio Terra ⁹²;
- lo spazio Universo ⁹³.

Il primo spazio ha specifiche caratteristiche cartesiane ortogonali (anche se la definizione degli assi ha minore importanza, in questo contesto, del resto la geometria di Euclide non fa uso di coordinate cui fa accenno solo Apollonio di Perga, comunque prima di Cartesio, con la geometria analitica). Per estensione le stesse caratteristiche cartesiane sono attribuite anche al secondo e terzo spazio, dove un asse verticale (collegabile alla postura umana, in piedi o seduta) è definito dalla loro posizione.

Forse proprio le parole comuni di primo e secondo piano, paesaggio e panorama (cioè più visioni a diversa distanza) caratterizzano insieme il quarto spazio. Infatti una caratteristica importante della visione è la sua sfericità, rispetto all'osservatore che, dato un angolo di visuale non troppo ampio, si separa in una proiezione piana dell'immagine ed in una misura sferica della distanza. Proprio questa separazione è la prima comprensione ed interpretazione di uno spazio esteso.

Dopodiché sempre con riferimento allo postura della persona, questa comprensione ed interpretazione, ha una rotazione, un'estroffessione ed un'inversione dell'asse principale. Infatti l'immagine piana passa alla mappa (sempre piana, data la relativa limitatezza dell'area esplorata e poi descritta) della Terra circostante, mentre l'asse dato dalla profondità di campo, diventa l'asse verticale (per le stesse ragioni, precedentemente esposte).

Invece più complesso è spiegare l'estroffessione e l'inversione dell'asse principale, cosicché una superficie concava diventi una superficie convessa ed un asse di profondità (di campo) diventi un asse per le altezze. Tuttavia è facile riconoscere la sfericità locale della Terra circostante, bastando guardare tramontare e non rimpicciolirsi gli oggetti che si allontanano (in particolare, al mare) e come essa appaia convessa e non concava (come appare invece una qualsiasi scena), per spiegare l'estroffessione.

⁹¹ Questo paragrafo, ad eccezione della sua introduzione e della frase conclusiva, è pubblicato in: Tamara Bellone, Valentina Forcella e Luigi Mussio: *Modernità e post-modernità delle scienze e non solo (parti I e II)* – L'Universo, anno XCIII, 2013, n. 5 e 6, p. 852-871 e 1026-1043, ed è qui ripreso, perché differente è il contesto della presentazione: allora un excursus storico sulla filosofia della scienza e la storia della scienza e della tecnica (seppure nella prospettiva di un incontro proficuo fra la Geomatica e le Scienze umane), adesso come uno dei punti fondamentali della Critica dialettica della Geomatica (essendo lo spazio l'oggetto precipuo della misura, del calcolo e dell'analisi, la cui comprensione ed interpretazione parte da una concezione sensista dello stesso).

⁹² Lo spazio Terra può essere esplorato solo compiendo moltissimi viaggi e ben raramente od addirittura difficilmente (come per le regioni polari, le montagne elevate, i deserti, le giungle, ecc.) nella sua totalità.

⁹³ Lo spazio Universo è finora esplorato solo sulla Luna, direttamente dall'uomo, e solo parzialmente altrove, con sonde (all'interno del sistema solare) e visioni e/o ascolti (al di fuori di questo sistema).

Inoltre la misura di un asse, dalla superficie in su (invece che dal punto di vista in avanti), spiega l'inversione dell'asse principale. In questo modo, come la visione, relativamente lontana, ha un'immagine piana e valuta una distanza sferica, ugualmente la mappa della Terra circostante è localmente piana, mentre le sue altezze sono misurate a partire da una superficie sferica (d'altra parte, proprio la geodesia conferma le prime approssimazioni, planimetrica ed altimetrica, con un piano tangente ed un sfera locale).

La fenomenologia dell'esperienza e della conoscenza è antecedente la logica e la ragione, e cerca invece di spiegare la necessità ed il senso delle cose che si manifestano ⁹⁴. Infatti tutte le cose non sono costruite dall'intelletto ed occorre descrivere a quali condizione è ragionevole dire che qualcosa è reale, cioè come un mondo si costruisce in una coscienza. A riguardo, le prime e principali esperienze di riferimento sono visive e relative, come relative sono anche tutte le altre qualità sensoriali.

Le qualità dipendono dalle circostanze e la loro forza empirica dipende dal numero dei casi in cui una stessa caratteristica si manifesta in circostanze identiche: anche una cosa conosciuta non è mai assolutamente nota. D'altra parte, la conoscenza illimitata è un compito infinito, ma la conoscenza richiesta è solo progressiva e rispondente agli scopi razionali dell'agire. La fenomenologia non è una metafisica, ma intende studiare l'esperienza della conoscenza, a partire dalla percezione.

Esiste una sfera d'esperienza non strutturata dal giudizio, poiché qualcosa è dato prima che entrino in campo le funzioni intellettuali più elevate (come già affermato da Herbart). La datità conseguente è una categoria ed una forma di giudizio, non allude a sensazioni, bensì a forme di collegamento interne ai fenomeni reali. Una datità completa richiede un decorso di manifestazioni, non essendo un insieme di dati slegati, collegati poi da forme ad essi esterne, ma una struttura sintetica.

Si distinguono allora una datità sensoriale ed una immanente, costituita da una sintesi, più ampia possibile, di sensazioni, non esente da errori. La sensibilità è dinamismo e provvede ad una sintesi temporale ed alla costruzione di una struttura associativa e cinetica. Dopodiché nel flusso dell'esperienza, grazie all'armonia ed a continue correzioni, nasce l'idea possibile (con un certo valore non-nullo di probabilità) di un mondo esterno definitivamente reale.

Le sensazioni percepite sono manifestazioni possibili del mondo esterno, in divenire. Esse riguardano non solo la dimensione spazio-temporale, ma anche altre qualità: sensoriali, intellettive e volitive. Facendo esclusivo riferimento alla dimensione spazio-temporale, lo spazio è circostante o lontano (a volte raggiungibile o già raggiunto) ed il tempo è presente, passato (talvolta presente, a suo modo, come un ricordo, nella memoria) e futuro (talvolta già presente, in forma d'attesa, con l'immaginazione).

Il soggetto-senziente ⁹⁵ costruisce lo spazio, muovendosi in esso (come già osservato da Helmholtz), ma senza modificare alcune sue caratteristiche, come forma, colore, luminosità delle cose. Un collegamento, tra spazio e tempo, è dato da un sistema d'orientamento del corpo di ciascun essere umano. Si osservi che lo spazio non è una forma vuota kantiana, benché non sia solo un'impressione. Gli altri uomini, provvisti di esperienze simili e conoscenze analoghe, permettono utili ed importanti confronti.

⁹⁴ A riguardo, si veda diffusamente: La cosa e lo spazio – Lineamenti fondamentali della fenomenologia e critica della ragione, di Edmund Husserl (Rubbettino Editore, Soveria Mannelli (CZ), 2009).

⁹⁵ Le manifestazioni sensoriali sono legate alla spontaneità del soggetto-senziente e, dall'osservazione che nulla è assoluto, ma solo relativo, deriva la constatazione che non si abbia una certezza assoluta sull'esistenza della realtà. Allora non sarebbero reali anche le realtà psicofisiche (quali: io, tu, ecc.) e questo porterebbe a qualche contraddizione. Esigenze pratiche suggeriscono di riconoscere ed accettare (non a priori, ma a posteriori) il mondo esterno come esistente. In epoca moderna, questa affermazione (che è alla base di tutte le concezioni materialiste e positiviste, ed invece in contrasto con molte concezioni idealiste e spiritualiste) ottiene dignità filosofica a partire da Russell.

Una connessione, tra percezione e cosa percepita, è definita, a partire dalla sua datità. Non si può invece stabilire un'identità, per la presenza di contesti e/o dello sfondo, e di altre varie forme d'errore (illusioni, ricordi ingannevoli). L'esperienza e la conoscenza sono necessarie, pena cessare di vivere nel quotidiano, così come fare scienza. La datità è percepita come esistenza, quale presenza in carne ed ossa, come atto di credenza, ovvero di non-credenza (come anche nel caso di una fantasia) e di dubbio ⁹⁶.

Le percezioni si distinguono in percezioni ante-ponenti, coincidenti con la datità dell'oggetto, e percezioni presentative, coincidenti solo parzialmente con la datità dell'oggetto, e talvolta fortemente distorte. La fusione di due o più percezioni presentative avviene grazie ad una percezione ante-ponente di stessità, ovvero ad un'acquisita coscienza d'identità o di differenza (che comporta la non-fusione). E' comunque importante distinguere tra contenuto dell'oggetto e della manifestazione ⁹⁷.

Gli oggetti non sono qualcosa di vuoto, da riempire a piacimento, moltiplicando i contenuti, attraverso percezione e conoscenza. La percezione non contiene un'immagine dell'oggetto o delle sue parti, perché non lo ripete, né ripete alcuna sua parte, ma attiva sensazioni (ad esempio, il rapporto tra parte ed intero, si attiva con un'identificazione totale o parziale ⁹⁸). Relativamente alla geometria delle sensazioni, la percezione delle cose fisiche avviene nel campo visivo bidimensionale.

Dopodiché l'apprendimento delle loro integrazioni si attua nello spazio 3D la cui percezione è quasi sempre impossibile. L'apprendimento collega anche percezioni di cose diverse, ma prossime, e di parti di cose. Infatti una discontinuità qualitativa conferisce un'esistenza separata ad un particolare oggetto, percepito ed appreso, rispetto ad altri oggetti di campo. Questo dipende dell'intenzione del soggetto d'identificare una cosa ed è in relazione alle proprietà d'identità e continuità relative all'oggetto stesso.

I predicati spazio-temporali sono soggetti a possibili fluttuazioni fattuali ed esistono relazioni d'appartenenza tra i dati fisici e le loro proprietà caratteristiche ⁹⁹. Tuttavia il frazionamento strutturale di un oggetto, nelle sue parti costituenti, è diverso da quello percettivo, attraverso cui cresce la conoscenza. Solo l'apprendimento, con l'estensione allo spazio 3D, costituisce la sintesi delle connessioni percettive e l'indeterminatezza è un carattere immanente dell'apprendimento, seppure mai assoluto.

L'estensione temporale è fenomenale per le cose e pre-fenomenale per le percezioni. Il tempo è durata ed è riempito dal succedersi degli eventi, relativi alle cose, mentre in sé è cosa vaga, come lo spazio privo d'oggetti. La possibilità di unire due o più fasi permette l'identificazione sintetica di diverse percezioni ed anche il riconoscere l'assenza di modificazioni. Suoni e rumori (i cui limiti acustici umani sono dati da silenzio e frastuono) hanno un'estensione spaziale, ma soprattutto una durata temporale ¹⁰⁰.

La continuità spaziale è interrotta da punti, linee e superfici che determinano salti nelle proprietà visive (come forme, colori e luminosità) e tattili (ad esempio, rugosità e viscidità) la cui portata è più limitata (come già sostenuto da Brentano). I limiti visivi sono buio ed abbaglio, e questi sono determinanti per la definizione dei limiti del campo visivo umano (ottico ed oculomotorio). Qualsiasi interpolazione del materiale sensoriale attiene all'apprendimento e non alla percezione.

⁹⁶ La credenza è una connessione di manifestazioni che concordano, il rigetto della nullità trasforma il non-essere in essere-mutato o essere-diverso ed il dubbio è una sospensione di giudizio, in caso d'eccessiva incertezza.

⁹⁷ Le due datità sono differenti e la seconda è contenuta nella prima.

⁹⁸ Oltre intero e parte, altre oggettivazioni sono identità e non, determinatezza e possibilità.

⁹⁹ La frazionabilità dello spazio 3D in superfici, linee e punti, e dello spazio piano in linee e punti può spingersi, finché i punti (considerati entità non-geometriche) raggiungono il limite delle cellule e dei cristalli (e raramente delle molecole e degli atomi). Anche la visibilità, oltre lo spazio, rende la percezione parziale. Inoltre nulla può comunque essere detto su quanto risulti coperto e sull'interno inaccessibile dei corpi solidi, se la percezione è puramente visiva.

¹⁰⁰ Suoni e rumori non contribuiscono alla costruzione dello spazio 3D, in base alle sensazioni umane (mentre è altresì noto che appositi strumenti acustici, ma inesistenti a quell'epoca, possono fornire informazioni spaziali).

La datità oggettuale spaziale è reversibile, essendo reversibile il movimento nello spazio, mentre quella temporale è irreversibile. Un gioco tra intenzione e riempimento dà continuità all'apprendimento. Il riempimento contribuisce all'allineamento seriale dei complessi oggettuali, provvedendo alla fusione delle percezioni visive. A sua volta, l'allineamento è rigidamente ordinato per i principi d'identità e continuità delle percezioni visive, anche se la coscienza d'ordine delle relazioni è acquisita solo per gradi.

Avvicinamento ed allontanamento giocano a favore di determinatezza e completezza della datità, finché si ha un arricchimento e non un impoverimento della percezione. La variazione accettabile avviene all'interno di un intervallo delimitato dai punti cosiddetti massimali. Esiste comunque una zona centrale, dove tutte le determinazioni sono ugualmente buone ed il bilanciamento tra esigenze diverse è dato dalla necessità di garantire la sufficienza dell'informazione.

La completezza ha gradi e livelli differenti¹⁰¹ e la permanenza delle percezioni o le modificazioni percettive delle cose, del soggetto-senziente o d'entrambi fanno sì che possa esistere una coincidenza, una concordanza ed una discordanza¹⁰². Variazioni di posizione, forma, colore e luminosità si manifestano con continuità, oppure con salti finiti. La velocità di mutamento (minore o maggiore¹⁰³ ed uniforme o non) determina l'entità del corrispondente riempimento temporale.

Il campo visivo struttura figure pre-empiriche e non entità geometriche; oltretutto percepisce sensazioni e la loro qualità cambia tra il campo mediano e le zone ai margini del campo. Nella visione binoculare, i campi sono solitamente prossimi, seppure con eccezioni d'estensione, saturazione del colore, luminosità e precisione. La visione binoculare permette la determinazione della profondità, a volte, intuibile anche con la visione monoculare, grazie soprattutto all'apprendimento.

A sua volta, la profondità serve a spiegare il rilievo (o morfologia) dell'oggetto. La geometria solida può essere ricondotta a quella piana, definendo piani paralleli opportunamente raccordati tra loro, anche se esso non è il meccanismo psico-fisico della visione. Caratteristica specifica della visione è il riconoscimento di convergenze (e divergenze), dove invece esiste parallelismo cosale. Anche il proprio corpo è percepito ed appreso: in questo caso, le percezioni tattili sono più importanti di quelle visive.

Le sensazioni di movimento (quiete, movimento dell'oggetto percepito, movimento del soggetto-senziente solo visivo od anche corporeo, movimento di entrambi) affiancano le sensazioni visive e tattili. Sensazioni collaterali/complementari riguardano temperatura, sonorità, ecc. Il movimento, come ogni altro mutamento, è divenire diverso e la quiete duratura è divenire non-diverso. Il movimento, in assenza di ogni mutamento, è assumere luoghi differenti¹⁰⁴.

La percezione del movimento coincide con quella di quiete e viceversa, essendo il movimento solo relativo. Infatti prescindendo da moti anomali (comunque sempre passibili di spiegazioni fisiche esaurienti) ed altre sensazioni, solo l'apprendimento permette di distinguere quiete e movimento. Inoltre i moti delle parti in

¹⁰¹ La percezione fornisce la materia prima, grezza e l'apprendimento permette di ricavare la materia *secunda*, elaborata. Una datità più completa deriva da connessioni unitario/continuative. La sintesi è un intreccio d'informazioni parziali, non-indipendenti, e l'emergere di un'intenzione verso la conoscenza della cosa. La finitezza del campo visivo fa sì che un oggetto possa entrare ed uscire anche solo parzialmente. Un altro limite è la nebbia; limiti tattili sono temperatura, essere acuminato e collosità.

¹⁰² La prima avviene per una nuova determinazione identica, la seconda si ha per una più precisa, la terza ed ultima accade per una differente.

¹⁰³ In fluidodinamica, sono dette lente o veloci le correnti che rispettivamente permettono o non permettono la risalita di un disturbo qualsiasi che si propaga nel fluido in movimento.

¹⁰⁴ Estensione, materia, e forma sono indipendenti dal movimento, benché possano apparire diverse tra i vari movimenti e la quiete. Invece saturazione del colore e luminosità sono dipendenti dal movimento. Il suono dipende dal movimento in volume (od ampiezza) e timbro (o frequenza). La fusione di sensazioni di movimento avviene nella fase d'apprendimento, per associazione empirica a posteriori, non essendo rigido il legame tra movimenti e percezioni, caratterizzate da estensione e qualità. Inoltre esiste una continuità tra campo visivo e percezione, ed anche una capacità di superare salti finiti, a monte ed a valle dei quali si hanno due percezioni diverse e due cose percepite, prive di connessioni.

assenza di deformazioni, sono soggetti a limitazioni fisiche e/o fisiologiche ¹⁰⁵, particolarmente rilevanti ove riferiti ai movimenti dei corpi viventi ¹⁰⁶.

Il riconoscimento e la comprensione moderni della struttura della realtà psichica e delle forme del pensiero ¹⁰⁷ combatte il postulato eleatico, in base al quale quello che non si può esprimere in una proposizione non-contraddittoria non esiste e soltanto ciò che si può spiegare è reale. Nel dilemma, con Eraclito, si decide per il divenire, perché la realtà è incentrata in modo fenomenico ¹⁰⁸. L'incontro è plurale, con gli altri uomini, compresi i bambini, e gli animali superiori, capaci di reciproca comprensione.

Sette problemi mostrano tutta l'articolazione delle forme del pensiero. Il problema della proprietà rigetta il principio atomistico, sulla base della possibilità di trasportare le forme, perché ciò che resta è maggiore di ciò che muta. Gli organi doppi (come gli occhi, le orecchie, le braccia e le mani, le gambe ed i piedi) mostrano di essere ciascuno autosufficiente, ma complementari per la localizzazione spaziale. La struttura è fondata su un sistema di relazioni stazionarie o quasi stazionarie.

Essa è costituita da forma spaziale, distribuzione dei colori e della luminosità, melodia-armonia e ritmo, processi di movimento e mutamento. Le qualità e caratteristiche globali definiscono le proprietà del materiale ed il modo di essere con aspetti espressivi e fisionomici, compresi i sentimenti ed altre emozioni. La relazione tra modo di essere con qualità e struttura (ma non viceversa) permette soluzioni probabilistiche, basate sul loro grado di frequenza.

Il tutto esiste solo con le sue parti e loro posizioni, ben definite e determinate, e le parti hanno carattere di parti, solo se inserite in un tutto. La dipendenza dal tutto delle sue parti, osservata anche nel comportamento animale, è misurata dalla permanenza delle configurazioni. Invece il bilanciamento, tra il patrimonio delle tracce passate e l'esperienza attuale incontrata, è basato sulla constatazione che percepire ed apprendere non è operare su una tabula rasa, ma attingere solo dalla memoria e non dal mondo delle idee.

Il problema dell'unificazione è rivolto contro il principio di contingenza o contiguità (detto teoria della catena), perché la causa dell'unificazione non può essere solo una causale coincidenza o contiguità spaziotemporale, ripetuta più volte. Esempi sono dati della contiguità seriale, semplice od a più passi, oppure con un elemento esterno di collegamento che svolge una funzione gerarchica. Sette principi sono poi enunciati a fondamento della teoria della Gestalt ¹⁰⁹.

- Le qualità intrinseche ai dati stessi (e non quelle estrinseche) determinano la formazione di unità più ampie, la loro delimitazione, articolazione e raggruppamento.

¹⁰⁵ La coscienza dell'unità delle percezioni induce, tramite l'apprendimento, la coscienza della datità autentica. Invece la datità oggettuale non riproduce la cosa, perché la percezione non è un'immagine, ma determina solo una sua oggettività. Un ultimo esempio rileva come la percezione della colorazione degli oggetti sia funzione della forma degli stessi, ma che il colore sussiste indipendentemente da essa, oltre che dalla percezione.

¹⁰⁶ Un giudizio conclusivo sulle tematiche dello spazio delle cose rileva il loro inserimento nel clima culturale dell'epoca. Dalle geometrie non-euclidee, allo sviluppo della fisica (con la termodinamica e l'elettro-magnetismo), dalle teorie della relatività (ristretta e generale) alla teoria dei quanti, dai primordi della psicanalisi alla genesi delle scienze sociali, echì sono ben presenti. Ovviamente l'approccio dell'autore alle suddette tematiche è soprattutto non-tecnico. Un riscontro è dato dalla mancanza di qualsiasi accenno alle leggi della prospettiva, note da tempo e base della fotogrammetria (e successivamente anche del telerilevamento). Nulla invece si può dire circa gli sviluppi tecnologici futuri, come gli ultrasuoni, capaci di costruire lo spazio 3D, od onde elettromagnetiche a frequenze non-visibili, capaci di penetrare all'interno dei corpi 3D.

¹⁰⁷ A riguardo, si veda diffusamente: Fondamenti di psicologia della Gestalt, di Wolfgang Metzger (Giunti - Barbèra, Firenze, 1984).

¹⁰⁸ Ragioni non-reali sono riferite a sogni, fantasie, credenze religiose ed anche ideologiche, come pure a gradi intermedi, quali bisogni, progetti, congetture, desideri e sentimenti.

¹⁰⁹ Secondo la teoria della Gestalt, percepire ed apprendere significa separare per mezzo di un margine, dove la regola della pregnanza, del massimo ordine e della buona forma ricerca caratteristiche: semplici, unitarie, omogenee, complete, dense, continue (o meglio, gradualmente variate), lisce (al limite, rettilinee), chiuse, simili (al limite, uguali), vicine (al limite, a contatto), simmetriche, orientate secondo le direzioni principali dello spazio e stabili nel tempo.

- ❑ Sulla formazione di unità, esercita influenza determinante la reciproca appartenenza, cioè i rapporti reciproci che sono intrinseci ai dati stessi; pertanto appare unificato, in modo naturale, ciò che sta bene insieme, per natura.
- ❑ Il principio di unificazione, attuata naturalmente, dipende dalle proprietà del tutto e dai raggruppamenti, scaturiti dall'unificazione che avviene in modo tale da privilegiare se stessa, rispetto a tutte le altre disposizioni possibili.
- ❑ Una condizione obiettiva porta o meno alla formazione di un tutto, secondo le condizioni obiettive trovate, intorno o più lontano.
- ❑ In presenza di diverse validità, in campo più ristretto e più ampio, prende il sopravvento ciò che è sensato nel campo più ampio, perché le regolarità, presenti nelle situazioni semplici, non valgono in quelle più complesse automaticamente.
- ❑ Non esistono elementi già in sé compiuti, perché le parti sorgono ex-novo, di volta in volta, secondo le leggi vigenti per i loro gruppi.
- ❑ L'identità e la continuità di oggetti fenomenici nel tempo è un criterio di unificazione degli eventi, in base a relazioni di causa ed effetto.

Il problema del sistema di riferimento rifiuta il principio della determinazione, punto a punto, indifferente al contenuto della localizzazione e della misura. Ogni singolo oggetto è in relazione con un determinato sistema di riferimento, ancorato all'ambiente in cui si trova, oppure ad uno sfondo che stabilisce la localizzazione, la direzione rispetto agli assi principali dello spazio ed altre misure dell'oggetto ¹¹⁰. I sistemi di riferimento sono spesso poco appariscenti ¹¹¹.

Le dimensioni dello spazio variano da uno a tre e, in questi spazi, vari sistemi di riferimento (ciascuno detto campo) possono essere intersecati tra loro o gerarchicamente inglobati, in un sistema complesso detto intelaiatura. Un sistema di riferimento uni-dimensionale, gerarchicamente organizzato, serve alla misura del tempo, rilevato attraverso la durata degli eventi. Un altro sistema uni-dimensionale è costituito dalla componente verticale dello spazio.

Il verso di questa componente è diretto dall'alto al basso, se esprime la gravità. Al di fuori del mondo degli oggetti piccoli e mobili, questo sistema di riferimento è curvo, per la convergenza delle verticali ed appare contratto, rispetto al sistema di riferimento locale piano, dove la contrazione può raggiungere l'entità ragguardevole del 30%. Ovviamente questa affermazione non attiene al mondo della misure di precisione, ma a quello ben più vasto delle semplici impressioni.

Il problema del centramento è diretto contro il principio dell'assenza di un ordine gerarchico e della conseguente parità di peso. Infatti regole di dominanza sono presenti anche nella convivenza sociale di gruppi di persone, e già di animali superiori. Un esempio famoso di centramento è la continua commutazione dell'immagine ambigua tra un coniglio ed un'anatra. I rapporti gerarchici possibili sono molteplici, per la varietà dei punti di vista, il numero dei livelli ed il rapporto tra necessario e superfluo.

All'interno di ciò che è necessario, occorre poi distinguere le parti portanti da quelle portate, la zona di condensazione (solitamente prossima al centro di massa), il punto d'appoggio, ancoraggio o sospensione e

¹¹⁰ Un processo fondamentale di adattamento manifesta una tendenza naturale verso il centro della scena osservata.

¹¹¹ In particolare, in presenza di quiete e costanza tendono a scomparire, mentre risaltano con movimenti e trasformazioni. La definizione dei sistemi di riferimento non contrasta con il principio della relatività generale che non afferma alcun relativismo assoluto, ma equipara gravitazione e moto uniformemente accelerato, così come la relatività galileiana equipara quiete e moto uniforme. D'altra parte, nessun principio fisico equipara le quattro condizioni di moto e stato.

la linea guida che collega la zona di condensazione ed il punto d'appoggio, ancoraggio o sospensione. Nel caso poi sia in atto un movimento, altri punti d'interesse possono essere stabiliti, come il centro d'inerzia, il centro di rotazione, quello di rotazione istantanea, ecc.

Il problema dell'ordine rigetta l'alternativa tra caos e costrizione, ricercando le strutture d'ordine intrinseche e naturali. In questo modo, si evita di cadere nel meccanicismo e vitalismo, incapaci di dar conto dell'esistenza di strutture ordinate, contrastanti con le leggi della probabilità ed il secondo principio della termodinamica (che comunque continua a valere in grande), senza ricorrere ad intelligenze esterne, come l'entelechia aristotelica ¹¹².

Un ordinamento, prossimo ad essere buono, ha una discreta probabilità a diventare migliore, in base ad una regola di tendenza alla pregnanza delle forme, perché legge e libertà non si escludono. Esempi notevoli, fisici, fisiologici e psichici, sono dati dalla coordinazione motoria, dalla percezione sensoriale e dalla memoria. Del resto, un quadrato smussato nei suoi vertici resta un quadrato, anche se geometricamente è un ottagono irregolare ¹¹³.

Dalla non-pregnanza delle forme, in condizioni di prossimità, deriva un'esigenza d'aggiustamento, a fine di ottenere un miglioramento, ad esempio, tramite completamento, raddrizzamento, allineamento, livellamento, spianamento, ecc. Si badi tuttavia che il cambiamento delle assunzioni non deve portare ad un qualche ordine desiderato, ma a quello scaturito dagli oggetti percepiti ed appresi, quasi in obbedienza all'obiettività delle forme.

Il problema della causalità si propone di mantenere l'ordine esistente e di determinarne uno di grado più elevato, dove regna il disordine. Abbandonato il finalismo d'origine magica e vitalista, l'atteggiamento filosofico nei confronti del concetto di causa passa dall'idea di legge (come sostenuto da Aristotele) a quella di causa sostanziale (d'origine tardo-antica e medioevale ¹¹⁴), per arrivare al concetto di causa scatenante (fondato anche sul meccanicismo della tecnica delle macchine).

Nelle scienze, il concetto di causa scatenante porta a studiare le azioni a contatto, tramite urti, e quelle a distanza, per l'azione di campi di forze. Nelle scienze umane, il concetto di causa scatenante fa riferimento innanzitutto a processi d'assunzione ed all'ipotesi d'adduzione. Dopodiché mescolamenti (non sovrapposti), diffusione e coesione (tramite spostamenti, rotazioni, ribaltamenti, ingrandimenti, restringimenti, incurvarsi e distendersi) provvedono all'effettuarsi di modifiche.

Queste modifiche determinano la dislocazione del materiale e la propagazione degli stati che, a loro volta, si differenziano in base a dislivelli ed a gradienti. In alternativa, esse procedono ad integrarsi per azioni di raddrizzamento o livellamento, come pure le stesse trovano nuovi equilibri, bilanciando pressioni interne e tensioni superficiali. Infine questi equilibri possono essere nuovamente sconvolti per fenomeni del tipo della risonanza, cioè per effetto di un'amplificazione inattesa.

Il problema del divenire si arresta davanti ai disegni dei destini umani, perché nulla impedisce tali ricerche, ma esse sono oltre i confini delle decisioni rigorosamente attendibili. La teoria dei mondi privati, di ciascun uomo e, in particolare, dei bambini, dei popoli primitivi (oltre che degli antichi), è rispettosa delle diversità e contribuisce ad accettare un mondo esterno in divenire, così come esso è liberamente e gratuitamente incontrato da ciascuno.

¹¹² Un altro riferimento ad un'intelligenza esterna (oltretutto completamente inaccettabile, essendo un'invenzione moderna) è l'idea del disegno intelligente.

¹¹³ Una circonferenza ha un'equazione molto semplice, ma una qualsiasi linea chiusa può essere espressa in serie di Fourier. Tuttavia la prima ha una sua intrinseca rilevanza cui la seconda può avvicinarsi e non viceversa.

¹¹⁴ La stessa idea prosegue poi nel Rinascimento, fino alla nascita secentesca della scienza nuova.

Il distacco dai mondi privati ¹¹⁵, a favore di un mondo esterno comune ai più, avviene solo per gradi. La magia, insita nell'animismo dei primitivi, concepisce un'anima anche per gli oggetti inanimati, mentre fare scienza moderna significa escludere un'anima diversa dalla coscienza, razionale ed inconscia, anche per gli esseri umani. Quanto è vero, relativamente alla storia degli uomini, è altrettanto vero facendo specifico riferimento alla crescita di ciascun essere umano, passando per le sue varie età.

Una concezione empirista grossolana sostiene che, con l'aumentare del numero di successioni casuali, si arriva ad una legge causale di validità generale, mentre questo differisce dalla storia vera della conoscenza. In realtà, accade che, a partire da cause apparenti, spesso false, si arriva ad individuare le cause effettive, superando errori di misura e di modello. Pertanto la dipendenza delle parti dal tutto e la loro funzione nel tutto ha anche compiti dinamici.

Infatti nel divenire della conoscenza, queste parti provvedono all'unificazione oggettiva, mediante una composizione ed un'articolazione. A riguardo, evidenti sono le difficoltà, insite nel percepire ed apprendere le cose ed i fatti del mondo esterno, comune ai più, abbandonando le relative certezze dei mondi personali e privati, per condividere con altri una vita associata, liberamente contratta ¹¹⁶. In questo modo, l'articolazione e l'arricchimento dei sistemi di riferimento permettono, tra l'altro, il riconoscimento di:

- ❑ suoni, passando dalle ampiezze alle frequenze e dando valore alla musicalità (pentatonica, per ottave e dodecafonica);
- ❑ colori, muovendosi dal chiaro-scuro, all'opposizione forte, non-equatoriale: giallo-blu, fino all'opposizione debole, quasi equatoriale: rosso-verde;
- ❑ spazi, passando dalle piccole rotazioni degli assi principali, fino alla rotazione completa del sistema di riferimento, come nel leggere un libro capovolto;
- ❑ riconoscimento di sé, perché l'io segue il tu ed il voi (che, in inglese, sono la stessa cosa) che, a loro volta, seguono il noi.

Il divenire del concetto d'ordine non va meccanicamente dal caos originario ad un ordine prestabilito delle cose, né razionalmente da un ordine libero ad uno coercitivo, frutto di una qualche scelta della ragione, ma secondo i dettami della psicologia delle forme verso un accrescimento della completezza e complessità, aumentando la pregnanza degli eventi in esame. In conclusione, il divenire della conoscenza è un esercizio, per sviluppare la capacità di percepire ed apprendere.

Il quinto spazio è dominabile solo per somma di spazi di quarto tipo, più o meno raccordati, e la costruzione del suo assieme è solo un'operazione a posteriori. Infatti nel corso della storia, questa è stata fatta per gradi, unendo le informazioni derivate dalle esplorazioni di parti della Terra, più o meno grandi. L'idea sottostante è comunque una Terra rotonda (e conseguentemente finita, nella sua superficie), ma sufficientemente grande, per poter provvedere alla sua esplorazione, solo localmente ¹¹⁷.

¹¹⁵ Una prova dell'esistenza dei mondi privati è data dal comportamento davanti ad uno specchio, anche degli animali superiori. Del resto, la proprietà espressive evolvono dapprima da quelle spaziali a quelle strutturali e successivamente dalla dominazione al riconoscimento del valore d'uso, per arrivare infine alle emozioni ed ai sentimenti.

¹¹⁶ In queste condizioni, la ricerca, la promozione e la tutela di un bello possibile è una delle poche piccole guide, per quanto precaria e provvisoria.

¹¹⁷ I viaggi tardo-medioevali e rinascimentali, prima cinesi, nell'Oceano Indiano, e poi europei, in quello Atlantico, quelli settecenteschi, olandesi ed inglesi, nell'Oceano Pacifico, e l'esplorazione delle regioni polari, tra la fine dell'ottocento ed il primo novecento (oltre ai già menzionati viaggi dell'antichità), sono la prova provata del procedere progressivamente a tappe.

Intermezzo – La Geometria proiettiva

La Geometria proiettiva ¹¹⁸ prende le mosse dagli studi sulla prospettiva dei grandi artisti del Rinascimento (da Brunelleschi, Masaccio, Leon Battista Alberti e Piero della Francesca, fino a Bramante, Leonardo da Vinci e Raffaello), ma si sviluppa ben presto in modo indipendente, nei secoli successivi ¹¹⁹, ed attualmente ha importanti applicazioni in campi quali l'informatica grafica, la Computer Vision, l'architettura, la scenografia, ecc. La considerazione delle figure geometriche dal punto di vista della prospettiva, osserva Federigo Enriques, pone in rilievo le proprietà grafiche delle figure geometriche, separandole da quelle metriche, inducendo ad una concezione più astratta delle figure stesse.

I primi ad introdurre i metodi della prospettiva nella Geometria sono Desargues (1593 – 1661) e Pascal (1623 – 1662), soprattutto nella teoria delle coniche. L'Esprit de Géométrie che si realizza nell'opera di Descartes e l'invenzione del calcolo infinitesimale (Leibnitz e Newton) producono la prevalenza dell'analisi nella geometria, anche se si può ricordare, tra i proseguitori degli interessi di Desargues e di Pascal, De La Hire, con i suoi studi sulle polari, e Lambert, con il suo "*Traité de Perspective*" che applica la tecnica delle proiezioni ad uso cartografico. Infatti molti problemi tecnici hanno la necessità di uno strumento più adatto dei calcoli analitici: Monge, con la sua Geometria descrittiva, pone le basi per la Geometria proiettiva (si dice di lui che ha ottenuto risultati algebrici con linguaggio geometrico, così come Descartes ha ottenuto risultati geometrici usando l'algebra).

Infine con il "*Traité des propriétés projectives des figures*", Poncelet (1822) usa sistematicamente proiezioni e sezioni, e ricerca le proprietà delle figure piane con caratteristiche di invarianza (che caratterizzano proprio le proprietà proiettive). Contributi ulteriori, alla nascita della nuova scienza, sono il "*Barycentrische calculus*" di Möbius (1827), con il suo approccio analitico-proiettivo, e l'opera di Steiner (1832) e, se Poncelet, Möbius e Steiner si possono considerare i fondatori della Geometria proiettiva, colui che la rende indipendente, per quanto riguarda i suoi principi dalla geometria metrica (cioè classica), è Staudt. In seguito poi i rapporti tra la Geometria proiettiva e Geometria metrica (cioè classica) coinvolgono non solo la Geometria euclidea, ma anche le Geometrie non euclidee che, proprio in quegli stessi anni, sono scoperte.

La Geometria proiettiva è una scienza astratta che, a partire da postulati di carattere intuitivo, desume teoremi, cosicché i concetti elementari di punto, retta e piano sono posti all'interno di relazioni logiche primarie (chiamate postulati) e di relazioni logiche dedotte (chiamate teoremi). In questo modo, resta da segnalare come il contenuto intuitivo di tutti questi concetti sia indifferente, in quanto tutti i teoremi della Geometria proiettiva hanno significato anche qualora a punti, rette e piani si sostituiscano altri concetti. Principi fondamentali consolidati, si trovano, già nel secolo scorso o nell'ultimo scorcio del precedente, nelle opere magistrali di Enriques ¹²⁰, Castelnuovo ¹²¹ e Togliatti ¹²².

Forme geometriche fondamentali

La Geometria proiettiva parte dai concetti di punto, retta, piano, definiti fondamentali. Un insieme di elementi fondamentali, cioè un insieme di punti, rette e piani è una *figura*. Alcuni modi semplici di raggruppare gli elementi fondamentali producono figure che sono dette *forme geometriche fondamentali*.

¹¹⁸ Cenni di Geometria proiettiva sono presenti già nel libro sulla Prospettiva di Euclide ed Eliodoro..

¹¹⁹ Intorno al 1600, Guidobaldo Bourbon Del Monte dimostra i principi matematici, alla base della prospettiva degli artisti rinascimentali.

¹²⁰ Enriques F. (1898): Lezioni di Geometria proiettiva. Ditta Nicola Zanichelli, Bologna.

¹²¹ Castelnuovo G. (1904): Lezioni di Geometria analitica e proiettiva. Albrighi, Segati & C., Roma.

¹²² Togliatti E.G. (1950): Geometria proiettiva – In: L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli (Ed's) Enciclopedia delle Matematiche elementari e complementi con estensione alle principali teorie analitiche, geometriche e fisiche, loro applicazioni e notizie storico – bibliografiche. Editore Ulrico Hoepli, Milano.

Queste forme si basano sui diversi modi di immaginare la generazione di un elemento. Ad esempio, la retta può immaginarsi generata dall'insieme di tutti i suoi punti o dall'insieme di tutti i piani che passano per essa e, in questo modo, può essere rappresentata con due forme fondamentali:

- la retta punteggiata, costituita dagli infiniti punti di una retta, sostegno della punteggiata;
- il fascio di piani, costituito dagli infiniti piani passanti per la retta, l'asse centrale del fascio.

Analogamente per il piano, si ha:

- il piano punteggiato, costituito dagli infiniti punti del piano;
- il piano rigato, costituito dalle infinite rette del piano.

Un sistema piano comprende sia il piano punteggiato, che il piano rigato; in tal caso, la retta è concepita come sostegno della punteggiata, mentre il punto può essere considerato come l'insieme di tutte le rette che passano per esso. Inoltre se il punto posto è nello spazio 3D, può esser considerato come generato dall'insieme di tutte le rette o di tutti i piani, cosicché complessivamente si hanno tre nuove forme:

- il fascio di raggi, costituito dalle infinite rette che passano per un punto e giacciono in un piano;
- la stella di raggi, costituita dalle infinite rette dello spazio 3D che passano per un punto (detto centro della stella);
- la stella dei piani, costituita dagli infiniti piani passanti per un punto (detto ancora centro della stella).

Infine lo spazio 3D può essere considerato come costituito da:

- lo spazio punteggiato, costituito da tutti i punti dello spazio 3D;
- lo spazio dei piani, costituito da tutti i piani dello spazio 3D.

Da tutto ciò discende la distinzione per specie di tutte le forme presentate. Infatti si dicono:

- forme di prima specie, quelle generate dal movimento semplice di un loro elemento: retta punteggiata, fascio di raggi e fascio di piani;
- forme di seconda specie, quelle generate dal movimento doppio di un loro elemento, cioè dal movimento semplice di una forma di prima specie, in esse contenuta: piano punteggiato o rigato e stella di raggi o di piani;
- forme di terza specie, quelle generate da un movimento triplo, cioè dal movimento semplice di una forma di seconda specie, in esse contenuta: lo spazio punteggiato e lo spazio di piani.

Elementi impropri e postulati fondamentali

Due elementi fondamentali sono detti appartenenti, ovvero si appartengono, quando uno di essi è contenuto nell'altro (ad esempio, una retta ed un suo punto si appartengono, così come un punto od una retta ed un piano che passi per esso/a, oppure un piano ed una sua retta od un suo punto).

In Geometria proiettiva, invece della proposizione: “due rette sono parallele”, vale la proposizione: “due rette hanno la stessa direzione”, e invece di quella: “due piani sono paralleli”, vale quella: “due piani hanno la stessa giacitura”. Infatti si dice punto proprio un punto nel significato comune del termine e punto improprio (cioè un punto all’infinito) la direzione di una data retta, analogamente oltre alla retta propria (ovvero alla retta nel comune significato del termine) esiste anche la retta impropria (cioè una retta all’infinito) che è la giacitura di un dato piano. In questo modo, i postulati della Geometria proiettiva considerano gli elementi propri ed impropri indifferentemente. Infatti come postulati della Geometria proiettiva si scelgono proposizioni fondamentali (riguardanti punti rette piani e le relazioni reciproche di appartenenza) che si mantengono validi sia per gli elementi propri, che per gli elementi impropri. Altri elementi impropri sono:

- la retta impropria punteggiata (insieme di tutti i suoi punti e di tutte le direzioni di una giacitura);
- il fascio improprio di piani (insieme di tutti i piani con una stessa giacitura);
- il piano improprio punteggiato o rigato (insieme di tutte le direzioni e di tutte le giaciture);
- il fascio improprio di raggi (insieme di tutte le rette di un piano con una stessa direzione e di tutte le giaciture con una direzione comune);
- la stella impropria di raggi e di piani (insieme di tutte le rette con una stessa direzione e di tutti i piani con una direzione comune).

Proposizioni fondamentali o postulati della Geometria proiettiva

<p>a. Due punti individuano (sempre) una retta cui appartengono (cioè la loro congiungente).</p>	<p>A. Due piani individuano una retta che appartiene a entrambi (cioè la loro intersezione).</p>
<p>b. Tre punti che non appartengano ad una stessa retta, individuano un piano cui appartengono (cioè il piano che li congiunge).</p>	<p>B. Tre piani che non contengano una stessa retta, individuano un punto che appartiene a tutti e tre (ed in cui essi si intersecano).</p>
<p>c. Un punto ed una retta che non contenga il punto individuano un piano (che li comprende) cui entrambi appartengono.</p>	<p>C. Un piano ed una retta che non appartenga al piano individuano un punto (di intersezione) che appartiene ad entrambi.</p>
<p>d. Se due punti di una retta appartengono a un piano, la retta appartiene al piano.</p>	<p>D. Se due piani per una retta contengono un punto, la retta contiene il punto.</p>
<p>e. Due rette contenenti uno stesso punto (ovvero che si intersecano) appartengono allo stesso piano.</p>	<p>E. Due rette appartenenti ad uno stesso piano (cioè giacenti su questo) passano per uno stesso punto.</p>

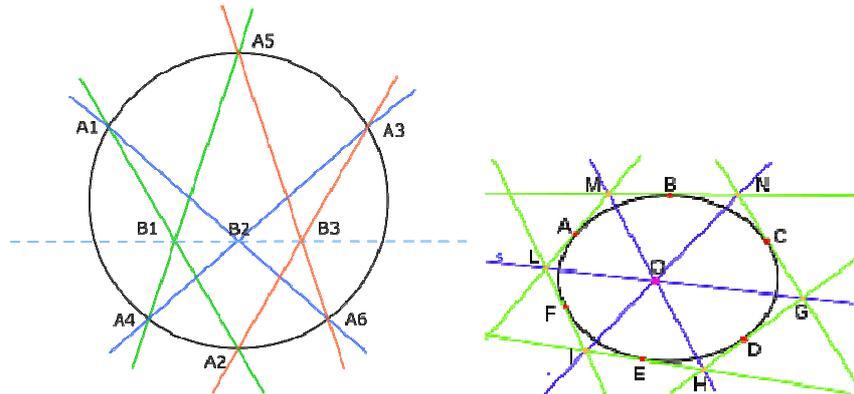
In ogni caso, vale la Legge di dualità ¹²³ per cui, ad ogni teorema, dedotto dalle proposizioni fondamentali, corrisponde un teorema correlativo (detto duale o reciproco) che si enuncia scambiando il nome di due enti geometrici, all’interno del teorema originale, lasciando invariato il nome di un eventuale terzo ente.

- Nel piano, si scambia la parola “punto” con la parola “retta” (ad esempio, a partire dal teorema originario: “due punti danno luogo ad una retta”, si arriva al teorema duale: “due rette danno luogo ad un punto”).

¹²³ La Legge di dualità è generalizzabile nella Legge di sostituibilità, dove ad un primo insieme di elementi si sostituisce un secondo insieme di elementi (alcuni dei quali possono essere comuni) per i quali valgono le stesse definizioni, gli stessi teoremi e le stesse proprietà, validi per gli elementi del primo insieme. A loro volta, entrambe le leggi si collegano alla Teoria generale delle corrispondenze che assegnano, a nuovi insiemi od altri enti, le proprietà trovate, nell’insieme od altro ente da cui ha origine la corrispondenza stabilita.

- Nello spazio 3D, si sostituisce alla parola “punto” la parola “piano” e, reciprocamente alla parola “piano” la parola “punto”, lasciando viceversa invariata la parola “retta”.

A partire da un semplice disegno, si evidenzia che il Teorema di Pascal ed il Teorema di Brianchon sono duali. Infatti il Teorema di Pascal afferma che, data una conica, presi sei punti, appartenenti ad essa, e disegnato il corrispondente esagono, inscritto nella conica, i tre punti di intersezione delle coppie di lati opposti sono allineati. A sua volta, il Teorema di Brianchon afferma che, data una conica, prese sei rette ad essa tangenti, e disegnate le diagonali principali dell'esagono circoscritto alla conica, esse si incontrano in un punto.

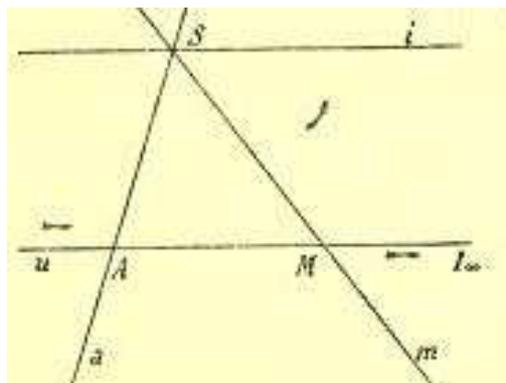


Teoremi di Pascal e di Brianchon

Sopra una forma di prima specie un elemento può muoversi in due versi distinti. Pertanto siano:

- M il punto mobile, su una punteggiata u ;
- m la rette mobile, corrispondente al fascio S ;
- A ed a le due posizioni corrispondenti di M e m .

Assunto il Postulato della continuità (di Dedekind), come usuale in tutta la geometria, mentre m si muove entro il fascio nello stesso verso, il punto M varia sopra u (percorrendo inizialmente metà della retta) e, quando m si è portata sulla parallela i ad u , condotta per S , il punto M cade nel punto all'infinito di u . Allora se m continua il suo movimento, sempre nello stesso verso, M ricompare sopra u , dall'altra parte di A (descrivendo l'altra metà della retta u , fino a ritornare in A).



Ogni forma di prima specie può essere descritta da un suo elemento che parta da una posizione fissa e si muova sempre nello stesso senso, attraverso un *movimento prospettico*. Infatti se si adatta l'idea intuitiva della retta alla definizione del punto improprio, si può immaginare la retta come linea chiusa, descritta partendo da un certo punto e ritornando allo stesso punto dalla parte opposta, dopo avere percorso tutta la semiretta, aver attraversato il punto all'infinito ed essere ritornata, al punto di partenza, percorrendo l'altra semiretta, all'indietro.

Allora introducendo il seguente postulato, si afferma che gli elementi di una forma di prima specie si possono descrivere in una disposizione circolare naturale che ha due sensi di percorrenza, uno inverso dell'altro. Pertanto le operazioni fondamentali della Geometria proiettiva, su una data figura, sono solo due:

- proiettare;
- sezionare.

In particolare, è possibile proiettare una figura:

- da un punto, detto centro di proiezione, esterno alla figura;
- da una retta, detta asse di proiezione, esterna alla figura.

mentre è possibile sezionare una figura:

- con un piano, detto piano di sezione, non appartenente ad un elemento della figura;
- con una retta, detta asse di sezione, non appartenente ad un elemento della figura.

Mediante proiezioni o sezioni, si può passare da una all'altra di due forme di prima specie, oppure da una all'altra di due forme di seconda specie. Infatti proiettando una punteggiata da un centro fuori della sua retta di sostegno si ottiene un fascio di raggi.

Teorema fondamentale della proiettività

La Geometria proiettiva studia le proprietà delle figure che sono invarianti rispetto alle proiettività. Infatti una figura piana F si può confrontare con la figura F' , proiezione di questa sopra un altro piano, perché alcuni caratteri della figura F si trasmettono ad ogni figura F' (che è proiezione di F). Si tratta allora dei caratteri cosiddetti *grafici*, altrimenti detti *proiettivi*, quali l'allineamento dei punti ed il bi-rapporto tra le lunghezze, mentre altre caratteristiche non si mantengono (ad esempio, l'area, le lunghezze e gli angoli), perché si tratta di caratteri collegati alla misura, detti *metrici*. Pertanto la Geometria proiettiva si occupa di studiare i caratteri proiettivi delle figure e delle relazioni che legano quei caratteri tra loro e, in particolare, studia le proprietà delle figure, rispetto ad una serie di trasformazioni, dette proiettive, ottenute da operazioni di proiezione e sezione che possono alterare le proprietà metriche, ma non quelle proiettive:

- appartenenza (di punti, rette e piani);
- incidenza (di punti, rette e piani);
- collinearità, secondo cui i punti allineati restano tali, anche dopo le trasformazioni;

□ continuità, con cui si susseguono gli elementi, mantenendo le loro posizioni reciproche.

Bi-rapporto

Sia r una retta proiettiva e A, B, C, D quattro punti in r , il *bi-rapporto* di questi punti è dato dalla relazione:

$$Bi - rapporto (A, B, C, D) = \frac{\frac{A-C}{A-D}}{\frac{B-C}{B-D}} = \frac{(A-C)(B-D)}{(A-D)(B-C)}$$

Il *bi-rapporto* non dipende dalla scelta del riferimento proiettivo ed è invariato per trasformazioni proiettive. Inoltre se il valore del bi-rapporto è uguale ad uno, i quattro punti formano un gruppo armonico e, nello specifico, una quaterna armonica. Inoltre per la dualità tra punti e piani, anche quattro piani di un fascio formano un gruppo armonico, se è uguale ad uno il valore del bi-rapporto, tra i seni dei loro angoli diedri ¹²⁴.

- *Proiettive* sono due forme di prima specie, tali che, ad ogni gruppo armonico dell'una, corrisponda un gruppo armonico dell'altra;
- *proiettività* è la corrispondenza fra esse, cioè una corrispondenza biunivoca che conserva i loro gruppi armonici (e gli stessi concetti si estendono anche alle forme di seconda e terza specie).

Considerate due forme con lo stesso nome (ad esempio, due piani), si dice *unito* un elemento comune alle due forme, tale che, considerato in una di esse, abbia sé stesso nell'altra, per corrispondente.

Coordinate omogenee

Le coordinate omogenee nascono dall'esigenza di rappresentare analiticamente tutti i punti dello spazio proiettivo, facendo così corrispondere bi-univocamente ai punti (propri od impropri) dello spazio 3D, i mutui rapporti delle quaterne di numeri x_1, x_2, x_3, x_4 , detti coordinate (proiettive) omogenee.

Involuzione

Involutoria è una trasformazione che, composta con sé stessa, cioè applicata due volte, dà l'identità (un semplice esempio algebrico è dato dalle potenze di -1 (il cui quadrato, come noto, è pari ad 1). Un periodo quattro è dato invece dall'unità immaginaria i (essendo: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$).

A riguardo, il Teorema fondamentale della proiettività afferma che esiste una e una sola proiettività tra due forme di prima specie, la quale, a tre elementi distinti, arbitrariamente fissati, sulla prima forma, faccia corrispondere tre elementi distinti arbitrariamente prefissati nella seconda. Questo teorema si generalizza poi al caso di forme di specie superiore.

Proiettività tra forme di prima specie

La proiettività, tra due forme di prima specie, è una corrispondenza biunivoca tra gli elementi delle due forme che conserva i bi-rapporti delle quaterne di elementi corrispondenti. Lo stesso concetto si estende alle forme

¹²⁴ Anche quattro rette di una stella formano un gruppo armonico (dati i seni degli angoli compresi), se il loro bi-rapporto è pari ad uno.

di specie superiore alla prima, intendendo per proiettività, tra due forme F e F' della stessa specie, una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di F e F' che faccia corrispondere, ad una forma di prima specie, contenuta in F , una forma di prima specie, contenuta in F' , cosicché le due forme di prima specie corrispondenti risultino riferite a quella stessa proiettività. Due esempi illustrano proiettività, tra forme di prima specie, che sono prospettive (nello spazio 3D), grazie ad opportune sezioni e proiezioni. Infatti:

- due punteggiate sghembe prospettive sono prospettive, se sezioni di uno stesso fascio di piani;
- due fasci di piani proiettivi (con assi sghembi) sono prospettivi, se proiezioni di una stessa punteggiata.

Quando su ciascuna di due forme, riferite proiettivamente, è fissato un sistema di coordinate (proiettive) omogenee, la relazione geometrica si trasforma in una relazione analitica. Così ad esempio, la relazione geometrica che definisce la proiettività: $(A, B, C, X) = (A', B', C', X')$, si traduce nella seguente relazione:

$$\frac{\frac{a-c}{b-c} = \frac{a'-c'}{b'-c'}}{\frac{a-x}{b-x} = \frac{a'-x'}{b'-x'}} \quad \text{ovvero:} \quad \frac{(a-c)(b-x)}{(b-c)(a-x)} = \frac{(a'-c')(b'-x')}{(b'-c')(a'-x')}$$

dove: a, b, c, x sono le ascisse di quattro punti su una retta. Con un solo semplice passaggio ed alcune opportune sostituzioni, si ottiene:

$$\frac{(a-x)(b'-x')}{(b-x)(a'-x')} = k \quad \text{con:} \quad k = \frac{(a-c)(b'-c')}{(b-c)(a'-c')}$$

e inoltre:

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 \quad \text{essendo:} \quad \begin{array}{ll} \alpha = 1 - k & \beta = a' k - b' \\ \gamma = b k - a & \delta = a b' - a' b \end{array}$$

cosicché in generale, una proiettività, tra forme di prima specie, è rappresentata da un'equazione bilineare (e se nella proiettività, tra le due forme, un movimento è su un segmento, anche l'altro movimento lo descrive).

Proiettività tra forme di seconda specie

Due forme di seconda specie: Σ e Σ' , si dicono proiettive, quando corrisponde un unico elemento reale di Σ' o Σ , per ogni elemento reale di Σ o Σ' , ed inoltre, agli elementi di ogni forma di prima specie, contenuti in Σ o Σ' , corrispondano elementi di una forma di prima specie, in Σ' o Σ , cosicché queste forme sono dette corrispondenti nella proiettività.

Allora due piani si dicono omografici (ovvero tra loro intercorre una relazione di omografia¹²⁵), quando sono in relazione l'uno con l'altro in modo che, ad ogni elemento (un punto od una retta) dell'uno, corrisponda un elemento (rispettivamente un punto od una retta) nell'altro, ed inoltre, ad un punto ed una retta che si appartengano, in uno dei due piani, corrispondano sempre un punto ed una retta, nell'altro piano, che si

¹²⁵ La relazione di omografia si ha anche tra stelle di rette, dove la corrispondenza omografica è punti a punti e piani a piani.

appartengano, a loro volta. Pertanto l'omografia è la corrispondenza tra due piani omografici ed un esempio di omografia, tra due piani, si ottiene proiettando un piano sull'altro (in generale, non parallelo al primo), da un punto esterno ¹²⁶.

Un'omografia tra due piani è una corrispondenza biunivoca fra i punti di due piani (mentre un punto si muove su una retta, di un piano, il punto corrispondente si muove su una retta, nell'altro piano). Infatti altri tipi di corrispondenza biunivoca sono possibili, allorché un punto, sul primo piano, si muove su una retta, il punto corrispondente, nel secondo piano, si muova su una curva.

Inoltre due forme, di seconda specie, sono proiettive, quando sono riferite in modo tale che, a ciascun elemento dell'una, corrisponda un elemento dell'altra, con la condizione aggiuntiva che, ad elementi di una forma di prima specie, nell'una, corrispondano elementi di una forma di prima specie, nell'altra.

- ❑ Se due forme di seconda specie sono omografiche, si può passare da una all'altra con un numero finito di proiezioni e sezioni.
- ❑ Se due piani sono prospettivi, sono in relazione, mediante una proiezione da un punto esterno, e la retta, ad essi comune, è unita, essa è costituita da punti uniti (corrispondenti a sé stessi).

Tra le omografie fra due piani, si ricordano alcuni casi particolari:

- ❑ Se le rette all'infinito si corrispondono, l'omografia è detta affine (e l'affinità, fra due piani, è determinata da tre coppie di elementi corrispondenti); inoltre nell'affinità, fra due piani, due punteggiate omologhe sono simili; a due rette parallele, in un piano, corrispondono due rette parallele, nell'altro piano, ed il rapporto fra le aree di due parallelogrammi corrispondenti (e fra le aree contenute, in generale, da due linee chiuse corrispondenti) è costante.
- ❑ Se le rette all'infinito si corrispondono e sono congruenti, cioè ad ogni angolo, di un piano, corrisponde un angolo uguale, nell'altro piano, l'omografia è detta similitudine (così ad ogni triangolo corrisponde un triangolo simile e, in generale, anche due qualsiasi figure corrispondenti sono simili).
- ❑ La similitudine può poi essere una congruenza, quando date due figure simili, quella in un piano è uguale (cioè congrua) a quella nell'altro.

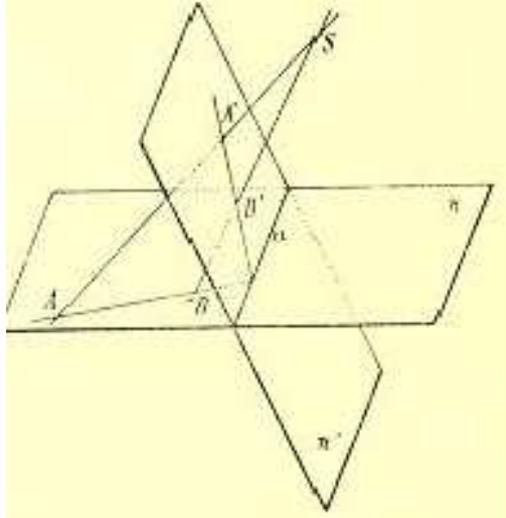
Si dice *unito* un elemento, comune a due forme, tale che, dato in una di esse, abbia per corrispondente sé stesso nell'altra.

La proiezione di un piano sopra un piano distinto, da un centro esterno ad entrambi, dà luogo ad una particolare collineazione, fra i piani stessi, in cui i punti della retta intersezione, dei due piani, sono tutti *uniti*.

- ❑ Se in un allineamento, tra due forme di seconda specie, sono uniti due elementi distinti, il sostegno delle due forme è anche esso unito.
- ❑ Se invece in una collineazione, tra due piani distinti, sono uniti tutti i punti della retta in comune (che ne costituisce l'intersezione), le congiungenti i punti di un piano con i punti corrispondenti dell'altro passano per uno stesso punto ed i due piani sono prospettivi, rispetto a questo punto, detto centro di prospettiva.

¹²⁶ Una corrispondenza discorde, tanto tra due piani (dove ad un punto corrisponde una retta e viceversa), quanto tra due stelle di rette (dove ad un punto corrisponde un piano e viceversa), è detta reciproca o correlativa.

Le omografie sono corrispondenze biunivoche che conservano le relazioni grafiche (cioè l'appartenersi di punti e piani o di punti e rette non è modificato) e si dimostra che ogni omografia, fra due piani distinti o coincidenti, si può sempre rappresentare con una sostituzione lineare fra le coordinate proiettive omogenee dei punti dei due piani.



In coordinate cartesiane, le equazioni dell'omografia sono un doppio quoziente fra tre relazioni lineari, invece quelle dell'affinità sono lineari (e diventano quelle di una similitudine se: $a_{22} = a_{11}$ e $a_{21} = -a_{12}$):

$$X = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

$$X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$$

$$Y = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

$$Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$

Le relazioni contengono nove costanti, ma dipendono da otto parametri, in quanto, se si divide ogni termine di una frazione per un coefficiente non nullo, una delle nove costanti può essere posta uguale ad uno.

Le coniche ¹²⁷

Una conica (come un'ellisse, un'iperbole o una parabola, ma anche una coppia di rette coincidenti, parallele od intersecate) è definita come il luogo dei punti soddisfacenti, con le loro coordinate cartesiane (o proiettive omogenee), un'equazione di secondo grado in due variabili. Di conseguenza, dalla definizione di proiettività e dall'osservazione della generazione del cerchio da parte di due fasci uguali di rette (formanti un cono), segue che ogni conica è il luogo delle intersezioni di rette, corrispondenti nei due fasci proiettivi (in particolare, l'ellisse è meno inclinata delle rette generatrici il cono, l'iperbole è più inclinata delle stesse rette, presentando così due rami separati, e la parabola è inclinata tanto quanto le rette generatrici il cono).

- Due punti si dicono coniugati, rispetto ad una conica, quando dividono armonicamente le intersezioni della loro congiungente alla curva.

¹²⁷ Qualsiasi conica è definita da cinque punti di cui tre non allineati.

- Se si pone una proiettività tra due piani, ad ogni conica di un piano, corrisponde una conica nell'altro piano e le due coniche risultano in relazione, tra loro, elemento per elemento, se la proiettività, tra i due piani, è un'omografia.

In coordinate cartesiane, l'equazione generale di una conica ha la seguente espressione:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

e ponendo:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad \text{e} \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad \text{con} \quad x_3 \neq 0$$

si ottiene l'equazione generale di una conica, in coordinate (proiettive) omogenee:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

In forma matriciale, la stessa equazione diventa: $x^T Ax = 0$, dove la matrice A , simmetrica e di dimensioni 3×3 , è così costituita:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

con il suo minore complementare, contenente i coefficienti della forma quadratica (in coordinate cartesiane), così formato:

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

La matrice A , espressa in coordinate (proiettive) omogenee, è definita a meno di un fattore di scala (moltiplicativo). Di conseguenza, la conica è definita da 5 gradi di libertà (ovvero dai sei elementi della matrice simmetrica, vincolati tra loro dal fattore di scala)

La discriminazione delle coniche, nelle loro diverse foggie, si attua in due passi ¹²⁸. Infatti se si ha: $\det A = 0$, la conica è *degenere* e, in particolare:

- se il *rango della matrice* A è pari a 2, la conica si spezza in *due rette parallele od intersecate* (ed è detta *conica semplicemente degenere*), dove la distinzione tra i due casi avviene ponendo l'origine degli

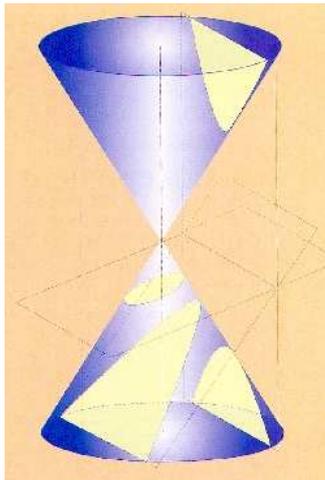
¹²⁸ Oltre alle cinque coniche reali, si possono definire altre due curve nel piano complesso (ovvero una curva non reale di secondo ordine irriducibile e due rette complesse parallele od intersecate), per un totale di sette oggetti, pari al numero delle simmetrie lineari.

assi coordinati nel centro di simmetria della conica, cosicché si ha parallelismo se è nullo uno dei due coefficienti dei termini di secondo grado, mentre si ha un'intersezione se è nullo il termine noto;

- se il *rango della matrice A* è pari a 1, la conica è costituita da *due rette coincidenti* (ed allora è detta *conica doppiamente degenera*).

Invece se si ha: $\det A \neq 0$, la *conica è non degenera* e, in particolare, analizzando, il determinante del minore complementare B , si ha una ripartizione in tre casi. Pertanto:

- se $\det B > 0$ (il minore complementare B ha due auto-valori concordi e positivi), la conica è detta *ellisse* (i cui semiassi sono proporzionali ai suddetti auto-valori) e non incontra la retta impropria (di conseguenza, una proiettività non identica è detta *ellittica*, se non esiste alcun elemento unito, in essa);
- se $\det B = 0$ (il minore complementare B ha un auto-valore nullo), la conica è detta *parabola* ed incontra la retta impropria in un punto improprio, appartenente all'asse della parabola (di conseguenza, una proiettività non identica è detta *parabolica*, se esistono due elementi uniti coincidenti, in essa);
- se $\det B < 0$ (il minore complementare B ha due auto-valori discordi), la conica è detta *iperbole* ed incontra la retta impropria in due punti impropri, appartenenti agli asintoti dell'iperbole (di conseguenza, una proiettività non identica è detta *iperbolica*, se non esistono due elementi uniti distinti, in essa).



Le sezioni coniche

Per completezza, si riporta l'equazione della retta impropria, nello spazio 3D, data dall'intersezione di un piano proprio con il piano improprio (di equazione: $x_4 = 0$):

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e invece: } x_3 = 0, \text{ nel piano di coordinate omogenee: } x_1, x_2, x_3$$

Data una conica non degenera, essa determina una corrispondenza biunivoca tra punti e rette del piano proiettivo, detta *polarità*, proprietà che accoppia punti e rette, rispetto ad una conica, cosicché preso un qualsiasi punto, a partire da questo, si può trovare una (ed una sola) retta, detta *retta polare*, e viceversa partendo da una qualsiasi retta, si può trovare uno (ed un solo) punto che è il suo polo. Di conseguenza,

facendo riferimento ad una conica: *ogni punto ha una sua retta polare ed ogni retta ha un suo polo*¹²⁹, e la conica stessa può essere vista come l'involuppo delle sue (infinite) rette polari¹³⁰.

Proiettività tra forme di terza specie

Due spazi si dicono omografici quando, ad ogni elemento dell'uno (un punto, oppure un piano), corrisponde un elemento (rispettivamente un punto, oppure un piano) dell'altro. Pertanto sono forme di terza specie:

- ❑ lo *spazio di punti*, cioè l'insieme di tutti i punti dello spazio 3D, dove lo spazio è il sostegno e l'elemento generatore è il punto;
- ❑ lo *spazio di piani*, cioè l'insieme di tutti i piani dello spazio 3D, dove il sostegno è sempre lo spazio, mentre l'elemento generatore è il piano.

La nozione di corrispondenza proiettiva, fra due forme di seconda specie, si estende allora alle forme di terza specie (senza la necessità di aggiungere altre particolari proprietà). Infatti:

- ❑ Due spazi Σ e Σ' si dicono collineari (ovvero omografici) quando, ad ogni elemento dell'uno (punto o retta, oppure piano), corrisponda un elemento (rispettivamente punto o retta, oppure piano) dell'altro, ed ad elementi che si appartengano, in uno spazio, corrispondano elementi che si appartengano, nell'altro.
- ❑ Due spazi si dicono correlativi (cioè reciproci) se a punti, rette e piani, in uno spazio, corrispondono piani (e non punti), rette e punti (e non piani), nell'altro.

Due forme, di prima o seconda specie, che si corrispondano in una proiettività, fra due spazi, sono riferite proiettivamente fra di loro.

Una proiettività è determinata, se a cinque elementi, dello stesso tipo (ovvero punti o piani), in uno spazio 3D, tali che mai quattro di essi appartengano ad una forma di seconda specie, sono assegnati gli elementi corrispondenti, nell'altro spazio, soddisfacenti la medesima condizione. Inoltre in una forma di terza specie:

- ❑ due elementi determinano una forma di prima specie, contenuta nella forma di terza specie;
- ❑ tre elementi, non appartenenti ad una forma di prima specie, determinano una forma di seconda specie, contenuta nella forma di terza specie;
- ❑ un elemento ed una forma di prima specie che non si appartengono determinano una forma di seconda specie cui entrambi appartengono.

Le quadriche

Le quadriche sono superfici di secondo grado nello spazio 3D, ottenute a partire dalle sezioni coniche. Infatti la maggior parte di esse si ottengono per rotazione e, se del caso, con una successiva trasformazione affine:

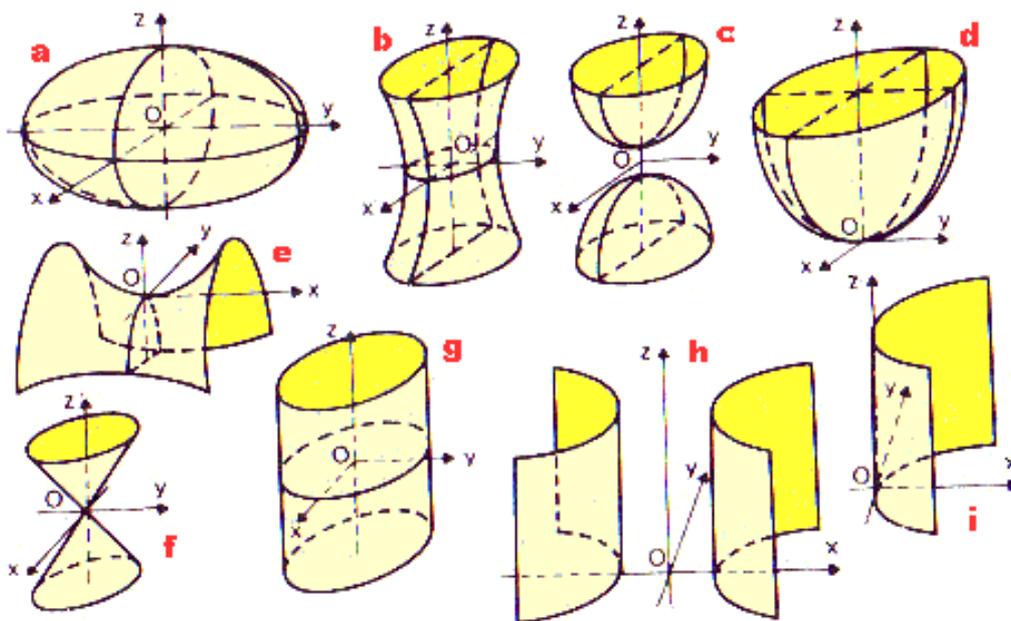
¹²⁹ Per quanto riguarda la proiettività tra coniche, una collineazione tra due piani trasforma una conica, nel primo piano, in un'altra conica, nel secondo piano, e se la prima curva è reale e non degenera, anche la seconda curva è reale e non degenera. Inoltre ogni proprietà proiettiva si mantiene inalterata, nelle due coniche. Ad esempio, data una retta, tangente o secante, di una prima conica, in un primo piano, si ha in corrispondenza una retta, tangente o secante, della seconda conica, nel secondo piano. Invece le proprietà metriche non sono mantenute, cosicché ad un'ellisse, un'iperbole od una parabola, in un piano, non corrisponde sempre lo stesso tipo di conica, in un altro piano, perché una conica è determinata solo quando si fissi la corrispondenza fra tre punti arbitrari, di un piano, ed i tre punti corrispondenti, nell'altro.

- ❑ l'ellissoide, per rotazione di una circonferenza, attorno ad un'asse (passante per il suo centro), cui far seguire un'affinità, per passare da una sfera ad un ellissoide;
- ❑ gli iperboloidi ad una falda ed a due falde, per rotazione di un'iperbole, attorno ad un asse di simmetria (per l'iperbole) che rispettivamente non interseca ed interseca i due rami dell'iperbole (per lasciarne uno a destra e l'altro a sinistra simmetricamente, oppure suddividendo entrambi i rami in due parti uguali), cui far seguire un'affinità, per passare da un solido circolare ad un solido ellittico;
- ❑ il paraboloido ellittico, per rotazione di una parabola, attorno all'asse centrale (della parabola), cui far seguire un'affinità, per passare da un solido circolare ad un solido ellittico;
- ❑ il cilindro ellittico, per rotazione di una retta, attorno ad un'asse parallelo alla retta stessa, cui far seguire un'affinità, per passare da un solido circolare ad un solido ellittico;
- ❑ il doppio cono, per rotazione di una retta, attorno ad un'asse intersecante la retta stessa.

Le rimanenti superfici, non degeneri, si ottengono per scorrimento di una curva su un'altra, così:

- ❑ il paraboloido iperbolico, per scorrimento di una parabola su un ramo di iperbole, con il punto di contatto della prima curva con la seconda è il vertice della parabola;
- ❑ il cilindro iperbolico, per scorrimento di un'iperbole su una retta, perpendicolare al piano che contiene l'iperbole e passante per l'iperbole stessa;
- ❑ il cilindro parabolico, per scorrimento di una parabola su una retta, perpendicolare al piano che contiene la parabola e passante per la parabola stessa,

in questo stesso modo, anche il cilindro ellittico si può ottenere per scorrimento di un'ellisse su una retta, perpendicolare al piano che contiene l'ellisse e passante per l'ellisse stessa.



Le quadriche non degeneri ¹³¹

¹³⁰ Data una conica, dotata di centro, esiste sempre la retta antipolare di un punto, simmetrica (rispetto al centro della conica) della retta polare di quello stesso punto, a sua volta, detto antipolo della retta antipolare.

¹³¹ <http://progettomatematica.dm.unibo.it/Quadriche/teoria/denis6/classificazione.html>.

- ❑ ellissoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
- ❑ iperboloide ad una falda: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
- ❑ iperboloide a due falde: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
- ❑ paraboloido ellittico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
- ❑ paraboloido iperbolico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
- ❑ doppio cono: $z^2 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$
- ❑ cilindro ellittico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
- ❑ cilindro iperbolico: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
- ❑ cilindro parabolico: $y = \frac{x^2}{a^2}$
- ❑ due piani incidenti ¹³²: $x^2 - y^2 = 0$
- ❑ due piani paralleli: $x^2 - 1 = 0$
- ❑ un piano doppio ¹³³: $x^2 = 0$

Le quadriche ¹³⁴ hanno un loro uso importante nelle discipline del rilevamento; infatti:

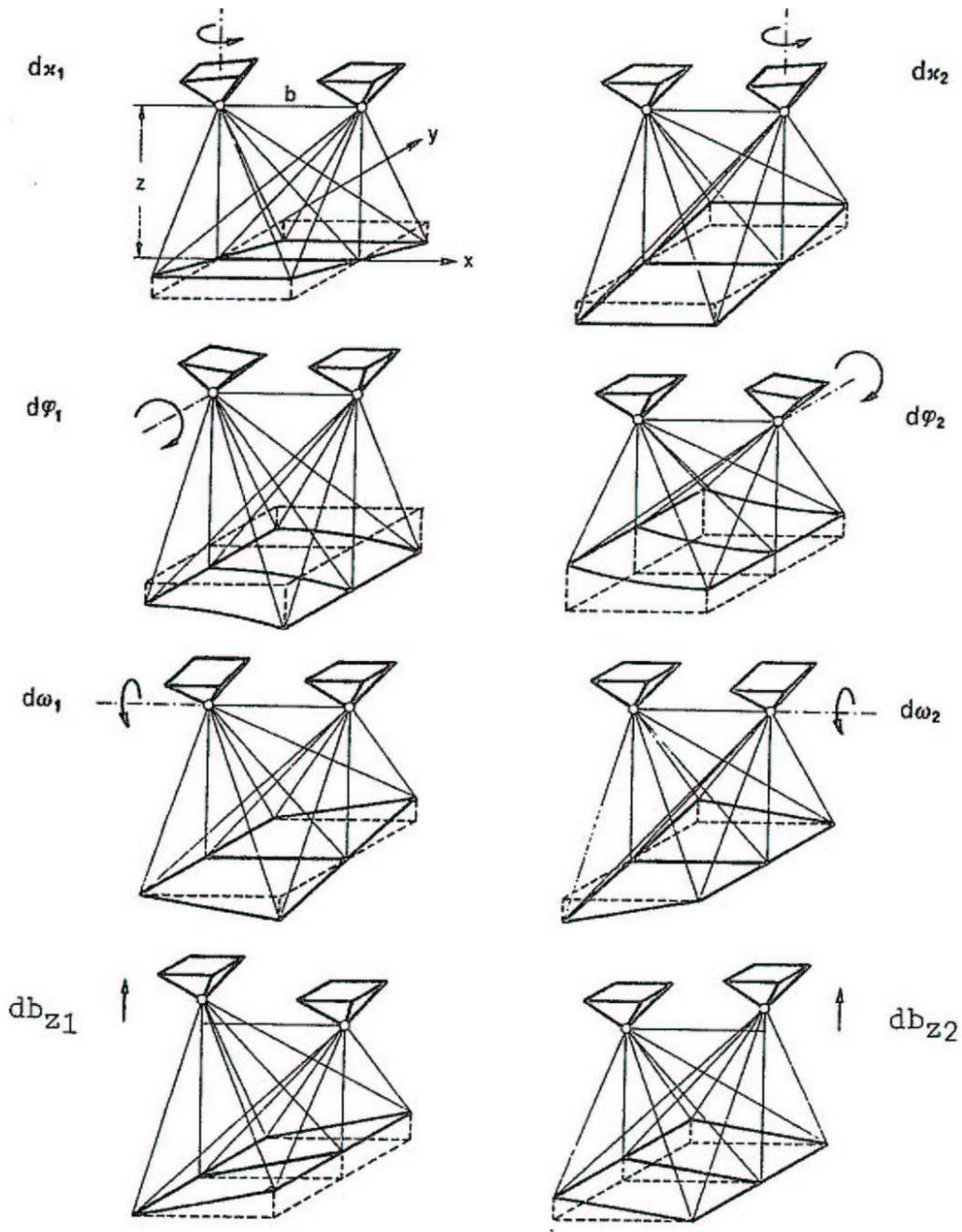
- ❑ un ellissoide di rotazione (insieme al geoide, per la definizione della sua ondulazione e delle altezze ortometriche) è una superficie di riferimento, per la determinazione della posizione planimetrica di punti ed oggetti, nonché una superficie oggi giorno definita in modo geocentrico, grazie alle misure di geodesia spaziale (tra le quali principe sono quelle fornite dal sistema GPS);
- ❑ un ellissoide triassiale è invece la figura di riferimento per la Luna;
- ❑ in fotogrammetria, varie sono le superfici di deformazione, per molte cause d'errore, di modelli, strisciate e blocchi (oltreché per vari difetti strumentali dei sensori), che hanno forma di quadriche, quali il cilindro parabolico ed il paraboloido iperbolico;

¹³² In analogia a quanto si ha per le coniche, anche le quadriche presentano forme degeneri, come due piani incidenti, due piani paralleli ed un piano doppio.

¹³³ Oltre alle dodici quadriche reali, si possono definire altre cinque superfici nello spazio complesso (ovvero l'ellissoide immaginario, il cono non reale, il cilindro non reale, due piani complessi ed incidenti, due piani complessi e paralleli), per un totale di diciassette oggetti, pari al numero delle simmetrie planari. Per completezza, si osserva poi che è trentadue il numero delle simmetrie spaziali, adottando la restrizione cristallografica (sugli angoli ammissibili).

¹³⁴ La costruzione grafica di coniche e quadriche è eseguibile con riga e compasso, come tutti i problemi di 2° grado (essendo invece risolvibili con la sola riga tutti i problemi di 1° grado). Al contrario, tutti i problemi di 3° grado, come tutti quelli di grado superiore, non sono risolvibili con i soli riga e compasso, ed abbisognano di mezzi grafici più complessi e spesso di soluzioni approssimate, iterate più volte, fino a convergere alla soluzione attesa.

- notevole è poi il cilindro critico (ellittico), ovvero la particolare superficie dell'oggetto che non permette la formazione del modello (in perfetta analogia all'intersezione di due circonferenze, dati quattro punti, se questi, a loro volta, stanno su una circonferenza).



Errori nella formazione del modello ¹³⁵ per errori nell'orientamento relativo ¹³⁶

In coordinate cartesiane, l'equazione generale di una quadrica ha la seguente espressione:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

¹³⁵ Gli errori nella formazione del modello, dovuti ad errori nell'orientamento relativo, oltre a due quadriche, si presentano anche come piani inclinati, nelle direzioni degli assi coordinati.

¹³⁶ Kraus K. (1994): Photogrammetrie. Ferd. Dümmler Verlag, Bonn.

e ponendo:

$$x = \frac{x_1}{x_4} \quad y = \frac{x_2}{x_4} \quad \text{e} \quad z = \frac{x_3}{x_4} \quad \text{con} \quad x_4 \neq 0$$

si ottiene l'equazione generale di una conica, in coordinate (proiettive) omogenee:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0$$

La discriminazione delle quadriche (per quanto piuttosto lunga) non è dissimile da quella delle coniche ¹³⁷, facendo tuttavia uso di tre invarianti (dati dal determinante della matrice dei coefficienti A e del suo minore complementare B , contenente i coefficienti della forma quadratica, nonché dalla relazione fra i segni degli auto-valori di questo), anziché due (come nel caso precedente), e di qualche altra opportuna condizione aggiuntiva. Infatti ¹³⁸:

- $\det A > 0, \det B = 0$: paraboloide iperbolico
- $\det A > 0, \det B \neq 0$ ed auto-valori con segni diversi: iperboloide ad una falda
- $\det A < 0, \det B = 0$: paraboloide ellittico
- $\det A < 0, \det B \neq 0$ ed auto-valori con segni diversi: iperboloide a due falde
- $\det A < 0, \det B \neq 0$ ed auto-valori dello stesso segno: ellissoide
- $\det A = 0, \text{rank } A = 3$ e $\text{rank } B = 3$ ed auto-valori con segni diversi: doppio cono
- $\det A = 0, \text{rank } A = 3$ e $\text{rank } B = 2$ ed auto-valori con segni diversi: cilindro iperbolico ¹³⁹
- $\det A = 0, \text{rank } A = 3$ e $\text{rank } B = 2$ ed auto-valori dello stesso segno: cilindro ellittico ¹⁴⁰
- $\det A = 0, \text{rank } A = 3$ e $\text{rank } B = 1$: cilindro parabolico
- $\det A = 0, \text{rank } A = 2$ e $\text{rank } B = 2$ ed auto-valori con segni diversi: piani incidenti
- $\det A = 0, \text{rank } A = 2$ e $\text{rank } B = 1$ ed auto-valori con segni diversi: piani paralleli
- $\det A = 0, \text{rank } A = 1$: piano doppio

¹³⁷ Le due discriminazioni permettono di riconoscere anche gli oggetti non reali (tuttavia estranei agli scopi di questo lavoro).

¹³⁸ <http://www.youmath.it/lezioni/algebra-lineare/geometria-dello-spazio/1122-classificare-le-quadriche.html>

¹³⁹ In questo caso, occorre fare riferimento ai soli auto-valori non nulli del minore complementare.

¹⁴⁰ In questo caso, occorre fare riferimento ai soli auto-valori non nulli del minore complementare e, in più, occorre anche che i due auto-valori non nulli della matrice dei coefficienti abbiano segni diversi.

Proiettività tra forme di quarta specie ¹⁴¹

I testi classici si fermano alle forme di terza specie, mentre nei testi più moderni sono definite anche forme cosiddette di quarta specie, quali:

- ❑ *lo spazio di rette*, cioè l'insieme di tutte le rette dello spazio, dove il sostegno è lo spazio 3D e l'elemento generatore è la retta;
- ❑ la *retta impropria*, cioè l'insieme di tutti i punti impropri delle rette di un piano, dove il sostegno è la retta impropria e l'elemento generatore è il punto improprio;
- ❑ Il *piano improprio*, cioè l'insieme dei punti impropri di tutte le rette dello spazio 3D e delle rette improprie di tutti i piani dello spazio.

Geometria proiettiva moderna ¹⁴²

Da alcuni decenni, con l'avvento della Computer Vision, la Geometria proiettiva ha destato un rinnovato interesse. Infatti comprendere come si formano le immagini, implica l'analisi del processo con cui una scena (tridimensionale) è proiettata su un piano (bidimensionale).

In maniera molto sintetica, il processo può essere suddiviso in due parti, ben distinte (una essenzialmente geometrica ed un'altra prettamente radiometrica):

- ❑ la determinazione della posizione del punto immagine;
- ❑ la determinazione della luminosità risultante del punto immagine.

In questo modo, proprio la prima fase del processo si appoggia a concetti e metodi di Geometria proiettiva, facendo (oppure non facendo) uso delle tradizionali restrizioni fotogrammetriche, nella modellazione degli angoli di orientamento relativo ed assoluto (delle immagini e/o dei modelli).

Geometria proiettiva e Computer Vision ¹⁴³

Le idee e le nozioni di Geometria proiettiva sono centrali nell'analisi della visione artificiale, a partire da differenti punti di vista, portati avanti dalla Computer Vision. Ad esempio, l'uso delle coordinate omogenee permette di rappresentare le trasformazioni non-lineari (ovvero le note proiezioni prospettiche) mediante equazioni matriciali lineari.

In particolare, le trasformazioni proiettive del piano modellano le distorsioni geometriche, presenti quando un oggetto è raffigurato in un'immagine piana (ripresa da un sensore, come una camera digitale, comunque disposta nello spazio 3D). Allora alcune proprietà, dell'oggetto ripreso, si mantengono nel passaggio dall'oggetto all'immagine (come la collinearità), mentre altre no (ad esempio, il parallelismo non si conserva, almeno in generale). Pertanto la Geometria proiettiva modella la formazione dell'immagine e ne favorisce una rappresentazione matematica, adatta al calcolo, cioè introducendo l'algebra nella geometria, per descrivere entità geometriche in termini di coordinate ed altre entità algebriche. Ad esempio:

¹⁴¹ Faugeras O.D. (1992). What can be seen in three dimensions with an un-calibrated stereo rig. In: G. Sandini (Ed.), Proc. of the 2nd European Conference on Computer Vision. Vol. 588, Lecture Notes in Computer Science. Santa Margherita Ligure – Springer, pp. 563-578.

¹⁴² Hartley R., Zisserman A. (2003): Multiple view Geometry in Computer Vision. Cambridge University Press, Cambridge.

¹⁴³ Luong Q.T., Faugeras O.D. (1996): The fundamental matrix: theory, algorithms and stability analysis. Int. Journal of Computer Vision, n. 17, pp. 43-75.

- un vettore coincide con un punto;
- una matrice simmetrica descrive una conica;
- una retta nel piano (di equazione: $ax + by + c = 0$) può essere rappresentata dal vettore: $(a \ b \ c)^T$.

In questo modo, poiché un punto: $X = (x \ y)^T$, giace su una retta: $I = (a \ b \ c)^T$, se e solo se: $ax + by + c = 0$, introducendo per il punto le coordinate omogenee: $(x \ y \ 1)^T$, si può esprimere la suddetta condizione mediante il prodotto interno:

$$(x \ y \ 1)^T (a \ b \ c)^T = (x \ y \ 1)^T I = 0$$

dove il punto; $X = (x \ y)^T$, è rappresentato come un vettore tridimensionale solo aggiungendo la coordinata 1, cosicché si abbia anche: $(kx \ ky \ k)^T I = 0$

Inoltre considerato il semplice problema di determinare l'intersezione delle due rette: $x = 1$ e $y = 1$, coincidenti con il sistema:

$$\begin{cases} -1x + 1 = 0 \\ -1y + 1 = 0 \end{cases}$$

le cui rappresentazioni omogenee sono date dalle relazioni:

$$I = (-1 \ 0 \ 1)^T$$

$$I' = (0 \ -1 \ 1)^T$$

l'intersezione può essere espressa mediante il prodotto esterno:

$$X = I \wedge I' = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

corrispondente al punto: $(1 \ 1)^T$, in coordinate non omogenee, dove i tre elementi del vettore sono ottenuti calcolando i complementi algebrici della prima riga della seguente matrice:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Infine si considerino due linee parallele come, ad esempio: $x = 1$ e $x = 2$, la cui intersezione è solo all'infinito, nel punto improprio (nella direzione dell'asse y). Ricorrendo alla notazione omogenea, si ottiene:

$$X = I \wedge I' = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

dove ancora i tre elementi del vettore sono ottenuti calcolando i complementi algebrici della prima riga della seguente matrice:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

La geometria, come già detto in precedenza, da un certo momento in poi, diventa lo studio delle proprietà invarianti delle entità sottoposte a gruppi di trasformazioni. In particolare, nel piano, una proiezione h è una mappatura invertibile dal piano proiettivo a se stesso. In termini algebrici, si dice che h è una proiezione, se e solo se esiste una matrice: $H(3 \times 3)$, non singolare tale che risulti, per ogni vettore x :

$$h(x) = Hx$$

Di conseguenza, una trasformazione proiettiva piana è una trasformazione lineare su vettori omogenei nello spazio 3D, rappresentata da una matrice $H(3 \times 3)$ non singolare:

$$\begin{vmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

La matrice H è omogenea, cosicché solo il quoziente dei suoi elementi (scelto uno qualsiasi di questi) è significativo, ovvero solo otto quozienti sono indipendenti e, a questi, corrispondono otto gradi di libertà della trasformazione proiettiva piana.

In un'immagine prospettica (quale quella ottenuta da una proiezione centrale), la forma è distorta (perché le rette parallele, nella realtà – oggetto, non risultano parallele nella realtà – immagine, bensì convergenti in un punto) e l'immagine è una distorsione prospettica dell'oggetto originale.

Tuttavia è possibile applicare la trasformazione inversa all'immagine (detta raddrizzamento). A tal fine, sono usate le coordinate non omogenee di punti noti, perché misurati sia sull'immagine che nella scena reale (detti comunemente punti di appoggio).

In questo modo, la trasformazione prospettica (che permette la ricostruzione di una scena piana, a partire da una sola immagine), in forma non omogenea, diventa:

$$x' = \frac{x'_1}{x'_3} = \frac{h_{11}x + h_{12}x + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}x + h_{33}}$$

$$x' = \frac{x'_1}{x'_3} = \frac{h_{11}x + h_{12}x + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}x + h_{33}}$$

mostrando come il linguaggio della Geometria proiettiva faccia parte della Computer Vision e come queste entrino nelle operazioni che comunemente esegue un operatore nella pratica operativa.

Nell'elaborazione delle immagini, per la ricostruzione di un oggetto 3D, è di fondamentale importanza la relazione che lega i punti sull'immagine con la loro posizione nel mondo. Il modello (detto *Pin-Hole camera* in Computer Vision) si basa su rapporti tra triangoli simili, fra lo spazio immagine (bidimensionale) e lo spazio oggetto (tridimensionale).

Infatti dato un punto, in coordinate oggetto $(x_i, y_i, z_i)^T$ e lo stesso punto in coordinate immagine $(u_i, v_i)^T$, essendo c la distanza focale, l'equazione del modello (prescindendo dalle rotazioni, fra sensore ed oggetto, come pure dalla diversa scala, solitamente più piccola nella ripresa) è:

$$\begin{vmatrix} u_i \\ v_i \end{vmatrix} = \frac{c}{z_i} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}$$

La relazione ¹⁴⁴ tra coordinate immagine e coordinate oggetto è non lineare; tuttavia è possibile trasformarla in forma lineare, grazie alle coordinate omogenee:

$$\begin{vmatrix} \lambda u_i \\ \lambda v_i \\ \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{vmatrix}$$

in cui la matrice K contiene termini dipendenti da fattori intrinseci alla camera stessa, anche se con questa modellazione, non si tiene ancora in conto degli effetti della distorsione.

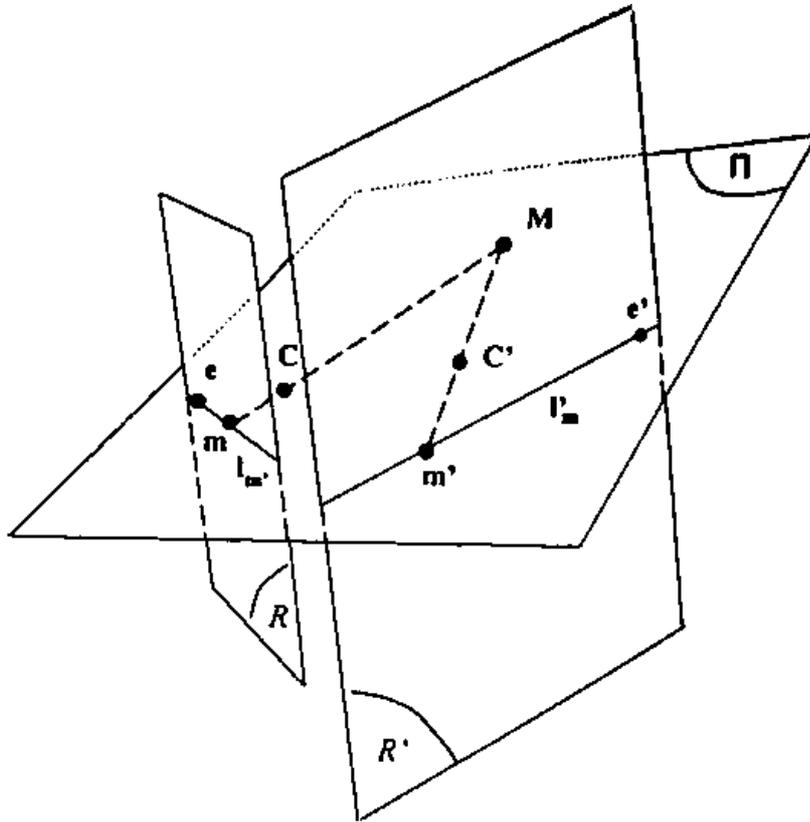
Infine per quanto riguarda la visione da parte di due o più immagini di una stessa scena ¹⁴⁵ (con la visione stereoscopica od in modalità estesa con la *multiple view geometry*), si osserva come anche le relazioni geometriche tra le due immagini siano descritte, in termini di geometria proiettiva, in modo più conveniente che in termini di geometria euclidea.

Infatti dati i due centri di proiezione C e C' dei due sensori, la retta CC' fa corrispondere (cioè proietta) il punto e con (su) il punto e' (e viceversa), entrambi detti epipolari. In questo modo, tutte le rette per e , nella prima immagine, e tutte le rette per e' , nella seconda immagine, sono dette linee epipolari. Del resto, gli epipoli sono le proiezioni di ognuno dei due centri di proiezione sul piano immagine dell'altro.

¹⁴⁴ In fotogrammetria, queste relazioni, complete di rotazioni e scala, sono dette equazioni di collinearità e permettono la ricostruzione dell'oggetto (mentre è detto orientamento assoluto l'operazione di ricostruzione dell'oggetto, a partire dal modello già formato).

¹⁴⁵ In fotogrammetria, la formazione del modello, a partire da due immagini, consiste nell'orientamento relativo (eseguito in modalità asimmetrica o simmetrica), descritto analiticamente dall'equazione di complanarità.

Il vincolo epipolare, ben noto nella visione stereoscopica, consiste nel fatto che, ad ogni punto m , sulla prima immagine, appartenente alla linea epipolare $l_{m'}$, corrisponde un punto m' , sulla seconda immagine, appartenente alla linea epipolare l'_m .



Geometria epipolare

A riguardo, immaginando di proiettare il raggio di proiezione (che collega M con C) sul piano della prima immagine (posta a destra), con un'omografia, questa proiezione collega le proiezioni M e C (cioè m' ed e'), ed entrambe le rette epipolari si possono esprimere usando coordinate omogenee. Allora il punto m è mappato in m' attraverso due passaggi:

- un'omografia;
- la costruzione della corrispondente retta epipolare.

L'equazione che lega punti di un'immagine con rette nell'altra è espressa dalla matrice F che rappresenta una mappatura da uno spazio proiettivo a due dimensioni ad uno spazio proiettivo ad una sola dimensione. Pertanto le relazioni tra le due immagini sono contenute in una matrice, detta fondamentale F (oppure in una seconda matrice, detta essenziale E , se si utilizzano le coordinate del sensore, invece delle coordinate immagine).

Dati nelle due immagini, due punti omologhi x e x' , in termini algebrici, risulta:

$$l' = e' \wedge x'$$

che è l'equazione della retta passante per x' e per l'epipolo e' . Inoltre un'omografia proietta il raggio dalla prima immagine alla seconda:

$$x' = H_{\pi} x$$

cosicché l'equazione risultante della retta diventa:

$$l' = e' \wedge (H_{\pi} x) = Fx$$

dove la matrice fondamentale F è definita dall'equazione:

$$x'^T Fx = 0$$

Dati i punti in coordinate omogenee: $X^T = (x, y, 1)$ e $X'^T = (x', y', 1)$, ogni corrispondenza (matching) può dare luogo ad un'equazione lineare nelle incognite di F . Infatti i coefficienti di questa equazione possono essere scritti in termini delle coordinate note di x e x' :

$$x' x f_{11} + x' y f_{12} + x' f_{13} + x y' f_{21} + y' y f_{22} + y' f_{23} + x f_{31} + y f_{32} + f_{33} = 0$$

e, in termini matriciali: $Af = 0$.

Allora dato un sufficiente numero di punti (almeno 7), l'equazione può essere utilizzata per calcolare la matrice incognita F . Poiché il prodotto esterno: $l' = e' \wedge x'$, ha rango 2, mentre l'omografia H_{π} ha rango 3, la matrice F ha rango 2. Pertanto la matrice F risulta mal-condizionata ed è improbabile che quella, trovata sperimentalmente, abbia rango proprio pari a 2 (con la conseguenza grave che le rette epipolari, nella seconda immagine, non siano incidenti nell'epipolo).

Il superamento del mal-condizionamento consiste nell'azzerare il valore singolare più piccolo, ottenuto dalla decomposizione ai valori singolari, della matrice F :

$$F = U \Sigma V^T$$

dove la matrice Σ contiene i valori singolari e le due matrici U e V gli auto-vettori della decomposizione. In questo modo, sostituita la nuova matrice F' , alla matrice F , trovata sperimentalmente, si procede poi alla minimizzazione della norma di Frobenius, così da ottenere tutti gli elementi di questa matrice:

$$\|F - F'\| = \min$$

I compiti della Geomatica

In quell'Impero, l'Arte della Cartografia giunse a una tal Perfezione che la Mappa di una sola Provincia occupava tutta una Città, e la mappa dell'impero tutta una Provincia. Col tempo, queste Mappe smisurate non bastarono più. I Collegi dei Cartografi fecero una Mappa dell'Impero che aveva l'Immensità dell'Impero e coincideva perfettamente con esso. Ma le Generazioni Seguenti, meno portate allo Studio della cartografia, pensarono che questa Mappa enorme era inutile e non senza Empietà la abbandonarono all'Inclemenze del Sole e degl'Inverni. Nei deserti dell'Ovest rimangono lacerate Rovine della Mappa, abitate da Animali e Mendichi; in tutto il Paese non c'è altra reliquia delle Discipline Geografiche (Suárez Miranda, *Viajes de varones prudentes*, libro IV, cap. XIV, Lérida, 1658¹⁴⁶) – (Jorge Luis Borges, *Del rigore della scienza – Storia universale dell'infamia*).

Una constatazione, oggigiorno ovvia, riconosce lo straordinario e strepitoso dominio attuale della tecnica che porta a porsi ed a porre domande impertinenti da cui possono discendere risposte curiose¹⁴⁷ (d'altra parte, la conoscenza procede, in ogni caso, quasi a tentoni, mescolando ipotesi ad esperimenti e viceversa).

- ❑ A mo' d'esempio, è possibile fare carte a scala uno ad uno, ma tutto ciò al prezzo effettivo di rinunciare a scegliere ed interpretare l'informazione acquisita¹⁴⁸ che invece deve sempre essere non solo ben archiviata, ma anche analizzata, accuratamente, con precisione e valutandone l'affidabilità.
- ❑ Un contro-esempio sono le carte uno ad uno per il restauro conservativo del pavimento musivo della Basilica di San Marco a Venezia, ma è altrettanto evidente che nessuno richiede il restauro conservativo del mondo intero, né di un suo continente e neppure di un'intera regione o di una qualsiasi città.
- ❑ Analogamente è possibile fare rilevamenti (che sono diversi dai rilievi e fondati sul rigore geometrico e fisico) in continuo¹⁴⁹, ma ancora tutto ciò al prezzo reale di rinunciare a scegliere ed interpretare, mentre lo studio delle dinamiche adotta comunque modelli per separare tendenze e segnali dal rumore.
- ❑ Un contro-esempio è il monitoraggio in continuo dell'inclinazione (media) della Torre di Pisa, allo scopo di procedere alla sottoescavazione delle sue fondamenta (migliorandone la staticità), ma è ancora ben chiaro che nessuno richiede di osservare i dettagli delle dinamiche del mondo intero, ecc.

Da una considerazione tecnica sulle comuni pratiche fotogrammetrica e cartografica deriva poi che quello che si vede in un'immagine è solo una parte, solitamente anche piuttosto limitata della realtà che, soprattutto se rappresentata 3D, richiede parecchie integrazioni.

- ❑ Allora mentre le rappresentazioni 2D fanno un uso limitato delle grammatiche (limitandosi alla geometria delle linee e delle figure cui aggiungere il tematismo metrico delle altezze), le rappresentazioni 3D devono fare un uso pesante delle grammatiche, se l'acquisizione dei dati non è abbastanza completa.
- ❑ Pertanto accettando che, dato uno stipite, il suo opposto è quasi sempre identico, si ritiene del tutto assurdo completare l'informazione per via grammaticale (non essendo conici gli alberi, identiche tutte le facciate o le falde dei tetti, ed essendo il 3D richiesto dai dettagli che di fatto scomparirebbero).

¹⁴⁶ Citazione letteraria fantasmagorica di Jorge Luis Borges, nello stesso stile del seicentesco manoscritto, ritrovato da Alessandro Manzoni, per i promessi sposi, ecc.

¹⁴⁷ Quanto segue è ripreso dai materiali preparatori per la Tavola rotonda organizzata, a Milano, dall'area di ricerca Geomatica critica del DICA, il 4 febbraio 2013, nell'ambito delle celebrazioni per il 150° dalla fondazione del Politecnico di Milano. Gli autori ringraziano gli amici e colleghi Luca Guzzardi, Luca Marescotti, Luca Mari, Federica Migliaccio e Carlo Monti, per i contributi offerti, qui riportati, con lo scopo preciso di rendere più ricca l'analisi delle problematiche trattate.

¹⁴⁸ E' altresì possibile fare mappe che ingrandiscono, come per la minuteria meccanica, le strutture biologiche, le relazioni chimiche, ecc.; in ogni caso, tuttavia si tratta sempre dello studio di parti piccolissime e molto ben delimitate.

¹⁴⁹ E' altresì possibile fare rilevamenti che rallentano lo scorrere del tempo, come per le moviole dei movimenti e le sequenze di immagini rallentate; in ogni caso, tuttavia si tratta sempre dello studio di tempi brevissimi e molto ben delimitati.

- ❑ Più in generale, data una rappresentazione/modellazione di una certa realtà, è possibile stabilire un qualche "parallelismo" con la descrizione/narrazione della stessa (ovvero, ad esempio, scrivere un testo che descriva un'immagine e viceversa, avendo fissato l'accuratezza, la precisione e l'affidabilità).
- ❑ A riguardo, la parola parallelismo è virgolettata, perché lo scegliere e l'interpretare fanno sì che la risposta stia nella verosimiglianza analogica e non nella corrispondenza biunivoca da cui una risposta positiva è mostrata dalle arti grafiche, luminose (e sonore), già prima dell'invenzione della fotografia.

In conclusione, la conoscenza empirica è sempre guidata da determinate teorie che possono solo essere smentite da eventuali contro-esempi, mentre molto raramente è possibile la costruzione logica di un qualche modello della realtà, fondato a priori su teoremi, eternamente ed universalmente validi.

Una nota finale rileva il piacere della conoscenza e la sua intersoggettività, allo scopo di rendere ciascuno migliore non degli altri, ma di se stesso, in bilico tra utopia e speranza che un lume esista, in fondo al tunnel dell'inferno quotidiano in cui si è costretti a vivere ¹⁵⁰.

Diverse tematiche della Geomatica coinvolgono relazioni aperte che si muovono "dal basso verso l'alto", tra:

- ❑ tecnica/tecnologia e scienza;
- ❑ modelli e "realtà" (cioè entità modellate);
- ❑ modelli e misurazione;
- ❑ scienze empiriche/sperimentali e scienze formali;
- ❑ oggettività e intersoggettività della/nella conoscenza,

e quasi "forzano" l'intervento di un metrologo, interessato a questioni di linguistica ed epistemologia. Un tema specifico riguarda i non banali cambiamenti cui è sollecitata, da qualche decennio, la scienza della misurazione che, a partire dalla considerazione della misurazione come processo rappresentazionale (per eccellenza?), sta ripensando i fondamenti e la natura di tale rappresentazione. A proposito, è significativo partire da qualche considerazione circa lo sviluppo di un documento importante: il Vocabolario Internazionale di Metrologia JCGM 200:2012 ¹⁵¹ (Luca Mari).

I modi in cui gli uomini giunsero alla conoscenza delle cose celesti mi sembrano quasi tanto meravigliosi quanto la natura stessa di quelle cose (Keplero).

E' l'osservazione dei moti celesti che ha stimolato l'uomo a ricercare gli *invarianti* celati dietro gli avvenimenti. Tutto sommato è questo il significato della scienza" – afferma Giorgio De Santillana. Le tavolette cuneiformi babilonesi conservano nomi di costellazioni e pianeti, ma essi erano già noti ai Sumeri. Gli antichi miti di molte culture antiche e arcaiche traggono dunque ispirazione dalla Astronomia: la straordinaria ricchezza di riti, tradizioni, racconti e miti che si ritrovano, più o meno uniformemente in tutto il mondo, ci può anche far pensare ad un'epoca di grandi migrazioni ed anche ad un centro di diffusione in qualche parte del Medio Oriente.

Secondo De Santillana, il vasto materiale arcaico di miti e di leggende di dei e di eroi che fondano città, introducono la civiltà, intraprendono grandi viaggi, può essere decifrato in quanto linguaggio tecnico di tuttora ignoti astronomi arcaici, ai quali dobbiamo anche la denominazione delle costellazioni e un ordine a partire dalla confusione delle stelle. Questi astronomi arcaici hanno tracciato quelle figure con tale autorevolezza che esse si sono ripetute irrevocabilmente, sostanzialmente le stesse dal Messico all'Africa e alla Polinesia- e sono rimaste nostro patrimonio a tutt'oggi. E questo processo è databile in un qualche anno tra il 4.000 e il 6.000 a. C., appartenendo alla tarda rivoluzione neolitica.

Alla luce di questa teoria, molte storie apparentemente assurde cominciano a prendere un senso. Tutti noi ci saremo chiesti nell'infanzia come può aver fatto Sansone ad uccidere mille filistei con una mascella d'asino. Ma in effetti quella "mascella" era il nome che i Babilonesi davano alle ladi, che si trovavano nel segno del

¹⁵⁰ Nel frattempo, utopia polverizzata è fare sì che, in alternativa ad accettare l'inferno quotidiano, facendone parte senza alcuna riserva, piccole oasi non-inferno possano avere spazio e durare a lungo, come enunciato nelle ultime righe del romanzo *Le città invisibili* di Italo Calvino.

¹⁵¹ Il Vocabolario Internazionale di Metrologia JCGM 200:2012 è reperibile anche all'indirizzo del: <http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html>.

Toro e si chiamavano appunto "Mascella del Toro". Ed in effetti nel poema epico babilonese della creazione, di data antecedente a Sansone, Marduk usa la costellazione come se fosse la "Mascella del tapiro" ed è messa in rapporto con il gran dio Hunracán, l'uragano. Nel nostro cielo Sansone diventa Orione, il forte cacciatore, rimane tale anche in Cina sotto il nome di "Tsan Signore della Guerra" maestro della caccia autunnale, e con le debite variazioni, in Cambogia, nel Borneo, e in Polinesia, (dove non si trova nessuna specie di caccia grossa, Orione si trasforma in un'enorme trappola per uccelli).

Tanti miti dunque, all'apparenza fantastici ed illogici costituirono una specie di codice di immagini e racconti, di cui semplicemente non conosciamo la chiave di lettura. Esso riusciva invece a mettere coloro che lo conoscevano in grado da un lato di stabilire senza possibilità di equivoci la posizione di determinati pianeti rispetto alla terra e nel firmamento e la loro posizione reciproca, utile per la navigazione, e dall'altro di presentare quelle poche cognizioni che allora si avevano circa la struttura dell'universo, sotto forma di storie che narravano "come il mondo è cominciato". Il codice era estremamente difficile, poiché gli eroi, cioè le stelle mobili, si muovevano attraverso le costellazioni in un modo che fu possibile descrivere solo ricorrendo a innumerevoli nomi, attributi e travestimenti per dare conto della loro posizione. Solo le tavolette astrologiche babilonesi molto più recenti servirono a capire qualcosa di quel groviglio di storie e personaggi, dato che da un lato adoperavano ancora il linguaggio di quei miti, mentre i testi astronomici del tempo presentavano già una notazione linguistico-numerica. È a questo punto peraltro che divergono le strade della scienza e della pseudo-scienza, come i documenti ci permettono di stabilire con certezza: l'astronomia scoprì un nuovo linguaggio tecnico più sintetico.

Ma la sintesi porta sempre con sé qualche inconveniente; nel caso specifico, essa fece perdere al quadro ogni prospettiva, dato che i Babilonesi non si liberarono a liberarsi di un linguaggio antiquato: il passaggio dal linguaggio mitico a quello matematico corrisponde a un cambiamento basilare di contenuti del pensiero. Gli eroi erano protagonisti di drammi tali da permettere di coprire spazi di tempo relativamente lunghi sotto forma di molte "generazioni"; inoltre, dover usare un termine tecnico per ogni tipo di congiunzione, come facevano i cinesi: "Quando Giove incontrava Venere, era un 'combattimento', ma quando ad incontrarla era Marte, si trattava di una 'fusione'". Nel pensiero mitico ciò che conta non è solo l'utilizzo pratico delle conoscenze (per esempio per la navigazione), ma anche l'importanza assegnata al Tempo: poco alla volta si passa da una concezione del mondo temporale (ciclica) ad una concezione spaziale, fino all'introduzione della Geometria greca. Anche se il tempo ciclico è un concetto che permane nell'antichità classica: l'Essere è il Tempo. Forse solo dopo l'invenzione della prospettiva e con l'avvento del Rinascimento, spazio e tempo sono concepiti come nell'immaginario contemporaneo: lo spazio è tridimensionale, il tempo è lineare. Per Newton il tempo e lo spazio sono assoluti, e bisogna aspettare Einstein (secondi alcuni Bošković, astronomo e geodeta) per avere una nuova visione.

In ogni caso, una spiegazione può non essere "scientifica", cioè può non implicare teorie, assiomi, ma pur sempre è una forma di conoscenza. Il mito è un modo di spiegare qualcosa attraverso il racconto di una storia. In ogni caso, anche il mito, il racconto furono utili, basti pensare come le norme di navigazione per i marinai polinesiani nel Pacifico presero la forma di una sequenza ben articolata di racconti imperniati su eroi, ed essa rimase un segreto del mestiere. Il pensiero che si cela dietro a queste costruzioni dei tempi remoti è sempre elevato, anche se assume forme strane.

La teoria delle origini del mondo sembra implicare la frattura di un'armonia, una specie di "peccato originale cosmogonico" a causa del quale la circonferenza dell'eclittica (con lo zodiaco) si inclinò di un angolo rispetto all'equatore. In tutto il mondo ci sono storie di questo tenore: ad un'Età dell'oro subentra un'epoca di terribili lotte, per poi raggiungere un nuovo ordine, un nuovo mondo. Nell'Età dell'oro c'è in generale un mulino che dà benessere e pace. Nel mito danese il proprietario è Amleto (Amlodi), in quello nordico è Freyr (Frodi nell'Edda di Snorri), Kullervo nei canti finlandesi, ma c'è anche una versione iranica e alcune versioni indiane.

Per esempio nel mito norreno Freyr possiede il mulino (Grotti), in cui lavorano due fanciulle giganti Fenya e Menya, che procurano oro, pace e felicità. Ma ad un certo punto per avidità il proprietario del mulino le costringe a lavorare giorno e notte: ad un certo punto Menya non ne poté più, smise di lavorare e cantò una maledizione profetica. Dal mulino uscì una schiera di guerrieri, e il signore del mare approda a terra e uccide Freyr (Frodi), portandosi via le due donne ed il mulino, dal quale però ormai esce sale, si spezza in due ed è per questo che da allora il mare è salato.

In altri miti cambiano i personaggi e le circostanze, tuttavia sempre ad un certo punto le potenze litigarono tra loro (lotta degli Asura e dei Deva nella tradizione indiana del Mahabharata, o combattimento tra Kung Kung e Ciuan Hsü per l'Impero del Mezzo, o la sfida lanciata dai Titani agli Olimpi). La guerra dei Titani contro l'Olimpo in Grecia è a noi più nota, ma ha analogie con tutte le altre mitologie. Ad esempio, la caduta di Satana e la caduta degli dei aztechi scaraventati dall'alto del cielo perché avevano colto i fiori proibiti; essi cercarono poi continuamente di riconquistare le alte posizioni di un tempo costruendo torri.

In ognuno di questi casi c'è sempre un mulino, che rappresenta la terra, o l'universo, che produce benessere, ma ad un certo punto con il tempo i signori dell'Età dell'oro, per esempio i Titani, sfidano gli dei (che secondo i nostri progenitori, sono pianeti, mentre le stelle fisse rappresentano l'Essere), spingendo il Sole fuori dalla posizione iniziale: nei miti c'è sempre una frattura o un'inclinazione il cui effetto è che "il cielo

si inclinò verso nord-ovest" e "il sole e la luna si spostarono". Secondo alcuni studiosi, tra cui De Santillana, forse i nostri progenitori si presero la briga di seguire i percorsi dei pianeti e ordinare il cielo stellato, in quanto ritenevano che negli astri si celassero gli dei che reggono le sorti del mondo terreno (ed ultraterreno): ma l'unico linguaggio tecnico era la parola, dato che non esisteva ancora la scrittura.

Perché ha sempre fine l'Età dell'oro? Con il tempo i signori del mondo diventano malvagi in quanto superano la misura, nel senso letterale del termine, perché fanno spostare la posizione del Sole: *μωρα* in greco significa sia fatto sia grado come misura dell'angolo. Quella caduta originale venne considerata la causa del Fato cui è sottoposto l'uomo: la deperibilità, la decadenza, l'oscurità. Ma le configurazioni celesti torneranno al loro posto e il mondo dovrebbe ricominciare: da qui la concezione del tempo ciclico.

Di questa immane e grandiosa costruzione arcaica si era già perduto il senso quando subentrarono i Greci. Tuttavia qualcosa di essa sopravviveva nei riti tradizionali, nei miti e nelle fiabe che nessuno più capiva. Presa alla lettera, essa contribuì ai culti sanguinari della fertilità, basati sulla fede in un'oscura forza universale, fonte del bene e del male, della vita e della morte, mirabilmente descritti da Frazer (1854-1941), antropologo evoluzionista nel *Ramo d'oro*.

I suoi motivi originali invece riecheggiarono nel pensiero filosofico più tardo (dai Pitagorici a Platone). Per quanto riguarda il nostro tema, ricordiamo che De Santillana fu lettore attento (insieme a Calvino, Canetti e Senghor) di Leo Frobenius (1873-1938), etnologo, uno degli esponenti della teoria diffusionista in Antropologia, autore della Storia della civiltà africana.

Tradizionalmente la faglia tra preistoria e storia è rappresentata dalla nascita della/e civiltà urbana/e con la nascita dello Stato e della scrittura (Lucio Russo, 2013). Tra gli storici e gli antropologi esistono due correnti principali: da un lato si ritiene che le "rivoluzioni urbane" siano nate in parallelo presso vari popoli, dall'altro che ci sia stato uno scambio tra loro. La prima scuola fa riferimento all'evoluzionismo, collegabile a una espansione dell'evoluzionismo in Biologia, e secondo tale scuola, l'evoluzione culturale è lineare e alcune culture sarebbero a stadi inferiori (dato che il nostro stadio attuale sarebbe il più progredito) e primitivi, sicché studiare le culture cosiddette "primitive" equivarrebbe a studiare epoche antiche.

La seconda scuola è il diffusionismo, e ritiene che il contatto tra culture sia fruttifero: alcune invenzioni appartengono ad una cultura e vengono diffuse o rielaborate in altre culture e viceversa. Evidentemente secondo la prima teoria, esiste un certo determinismo biologico, cioè elementi acquisiti da culture diverse sono prova di una certa predisposizione naturale. D'altro canto, il diffusionismo si può prestare a ipotesi "imperialiste", nel senso che, soprattutto agli albori di tale teoria, essa veniva utilizzata per considerare le conquiste della civiltà patrimonio di popoli "superiori", copiate poi dagli altri. Evidentemente solo studi rigorosi della storia potranno consentire di scoprire quale delle due ipotesi sia più realistica (Tamara Bellone).

"Al centro di tutti i corpi celesti sta immobile il Sole. Chi infatti in questo bellissimo tempio potrebbe porre questa lampada in un altro e miglior posto che quello dal quale può illuminare ogni cosa nello stesso tempo? Non è invero sconveniente che qualcuno l'abbia chiamato la luce del mondo; altri, la sua mente, e altri ancora, il suo sovrano. Trismegisto, cui è attribuita la fondazione di quella corrente filosofica nota come ermetismo, lo chiama il Dio visibile; l'Elettra di Sofocle, colui che tutto vede. Così, come se effettivamente sedesse su un trono regale, il Sole governa la famiglia delle stelle che lo circondano". Questa è la giustificazione dell'eliocentrismo data da Copernico, intrisa di un misticismo che si richiama alla "autorità" di Ermete Trismegisto leggendario fondatore del *Corpus Hermeticum*. Copernico non fornisce dimostrazioni dell'eliocentrismo basate su osservazioni empiriche. Più che altro, si adopera a demolire le antiche obiezioni contro il moto della Terra; per esempio, osservando che non ha senso dire che, se la Terra ruotasse, andrebbe in pezzi, perché in tal caso dovrebbe andare in pezzi l'intera sfera celeste, che ruota di moto uniforme. Copernico ha messo il Sole al posto della Terra in un cosmo ancora tolemaico, finito, formato da sfere rotanti l'una attorno all'altra e racchiuse dalla sfera delle stelle fisse. A ben vedere, la motivazione dell'eliocentrismo è metafisica. Perché la Terra dovrebbe comportarsi diversamente dagli altri corpi celesti, producendo una disarmonia nel cosmo? Certo, il privilegio della centralità è trasferito al Sole. Di fatto è la natura speciale di questo pianeta, lanterna del mondo e la luce è l'estrinsecarsi della gloria divina. Mettere al centro la luce è ricostituire la vera armonia del cosmo attorno a Dio. L'umanità è un po' sminuita dalla perdita della sua posizione centrale, ma quella centralità, nella concezione medioevale, non era solo un privilegio: la Terra era anche il "fondo" del cosmo, unico luogo dei processi di generazione e corruzione, a differenza del resto del cosmo, fatto di sostanza perfetta e incorruttibile.

Proclamava Tycho: "Credo fermamente e senza riserve che la Terra immobile debba essere posta al centro del Mondo, in accordo con le credenze degli astronomi e dei fisici antichi e le testimonianze delle Scritture". D'altra parte, la credenza totalmente geocentrica degli Antichi era ormai insostenibile. Sempre Tycho: "Piuttosto credo che i moti celesti siano stabiliti in modo tale che soltanto la Luna e il Sole e l'Ottava Sfera – la più distante di tutte – hanno i loro centri nella Terra. Gli altri pianeti girano attorno al Sole come attorno al loro Sovrano e Re, e il Sole si trova sempre al centro delle loro sfere ed è accompagnato da loro nel suo moto annuale. Quindi il Sole sarà la legge e la fine di tutte queste rivoluzioni e, come Apollo fra le Muse, egli soltanto determinerà l'armonia celeste dei moti che lo circondano". Questa bizzarra miscela di geocentrismo

ed eliocentrismo è proposta dal più grande osservatore di fatti astronomici della modernità, la cui immane raccolta di dati fu la base per le successive ricerche di Keplero.

Keplero, nella sua prima opera, il *Mysterium Cosmographicum* (1595) costruì un'immagine del cosmo a dir poco stupefacente. La geometria greca aveva scoperto un fatto strano. Nel piano esistono poligoni regolari – poligoni che hanno tutti i lati e gli angoli uguali – con un numero qualsiasi di lati. Ma nello spazio, le figure equivalenti, i poliedri regolari (le cui facce sono tutti poligoni regolari e i cui angoli solidi sono uguali) sono soltanto cinque! Ne derivò la credenza che questi cinque solidi “platonici” esprimessero qualcosa di molto speciale. Keplero fu colpito da questa coincidenza mistica: 6 erano i pianeti allora noti, 5 erano le loro distanze dal Sole, come il numero dei poliedri regolari. Ecco la chiave mistico-matematica dell'universo! Egli immaginò di inscrivere un esaedro nella sfera del pianeta più lontano, Saturno. La sfera iscritta nell'esaedro era allora quella su cui ruota Giove. In questa iscrisse un tetraedro e pensò che Marte si muovesse sulla sfera in esso iscritta. E così, di seguito per il dodecaedro, l'icosaedro e l'ottaedro, ottenendo le sfere della Terra, di Venere e Mercurio. In tal modo era possibile determinare le loro distanze, non appena noto il raggio dell'universo. Nel romanzo di Luminet, *L'occhio di Galileo*, questi definisce il *Mysterium* di Keplero un “confuso andirivieni tra geometria e fisica” e aggiunge: “Cosa importa a me se un cerchio è più perfetto di un quadrato?”. Di certo, Galileo era più vicino di Keplero all'idea moderna di razionalismo e la sua più grande “colpa” – origine di tutte le sue disgrazie – fu di rigettare il “lodo” di Tommaso d'Aquino nel suo commento al “De Caelo” di Aristotele. Per lui, l'osservazione col cannocchiale e, soprattutto, le deduzioni matematiche erano verità e non modelli e questo fu il vero scandalo. Ma anche lui era ancora con un piede nel vecchio cosmo, chiuso, finito, circolare.

Il “Mysterium” era un'opera giovanile, ma Keplero non la rinnegò mai, anche quando, sulla scorta dei dati di Tycho e di lunghissimi calcoli, arrivò alla conclusione scandalosa che le orbite planetarie attorno al Sole non erano circolari, ma ellittiche. Difatti, nella sua opera – sommo rompicapo per gli interpreti – ellitticità e circolarità convivono. Nel cercare una spiegazione del meccanismo del mondo proclamò un intento rivoluzionario: considerare il sistema planetario non come un essere animato da Dio (*instar divini animalis*) ma come un orologio (*instar orologii*) fabbricato dal divino orologiaio sulla base di principi matematici. Cosa muoveva questo meccanismo? Non “forze” come le intendiamo noi: il concetto di forza non c'è nella fisica prima di Newton. Keplero s'ispirò al *De magnetibus* del medico inglese William Gilbert: i corpi celesti sono come magneti che interagiscono e tutto è governato dal grande magnete, il Sole che emette il suo influsso lungo filamenti circolari, imprimendo un moto rotatorio a una sostanza immateriale, una *species* che, ruotando, trasporta i pianeti lungo cerchi di diametri crescenti. La *species* diminuisce di densità e così l'influsso del magnete Sole s'indebolisce alla distanza. Ne segue che la velocità del pianeta è inversamente proporzionale alla distanza dal Sole. E' una curiosa miscela di dinamica aristotelica e di copernicanesimo che ripropone il carattere circolare del moto dei pianeti. La visione geocentrica è rotta in modo irrimediabile, ma la rottura è avvenuta, per così dire, a pezzi spesso incoerenti. Galileo demolisce la concezione aristotelica dei corpi terrestri, aderisce al copernicanesimo, propala notizie “scandalose”, come la constatazione che la Luna è rugosa e irregolare e la Via Lattea non è continua, ma non esce del tutto dal mondo chiuso e circolare dell'aristotelismo. Keplero perviene alla formulazione di leggi rivoluzionarie sul moto dei corpi celesti (come l'ellitticità delle orbite) ricavate dalle osservazioni ed espresse in termini matematici, ma le inquadra in ipotesi mistiche della struttura del cosmo. Le nuove teorie convivono in modo difficile e talora contraddittorio con alcuni capisaldi del pensiero aristotelico e scolastico. I protagonisti di questa epoca straordinaria sono uomini che vivono all'incrocio dei venti: tra il razionalismo antico, la cui coerenza sistematica si è imposta per secoli; le intuizioni fantastiche, audaci e mistico-magiche del pensiero rinascimentale; la credenza che occorre risalire indietro, fino alla *prisca sapientia* che fiorì tra Atene e Gerusalemme; e il nuovo razionalismo basato sull'idea che l'alfabeto del mondo è la matematica e che l'uomo possiede nuovi mezzi, come il cannocchiale, per moltiplicare a dismisura la sua capacità di osservare il mondo. E' in questo crocevia entusiasmante e fervido di intuizioni avventate e di passioni umane che nasce la scienza moderna¹⁵² (Carlo Monti).

Qualche riflessione sul versante dell'urbanistica, intesa come pianificazione territoriale e urbana, richiede che un sistema informativo debba rispondere alle criticità ed essere strumento per aiutare ad affrontarle e risolverle, insieme ad altri strumenti e modelli. La conoscenza non può essere astratta, ma deve essere mirata, non neutrale, ma di parte. Cartografia, sistemi informativi, Geomatica sono applicazioni tecnologiche, il cui orientamento dovrebbe dipendere da una visione teorica.

Nel governo del territorio il tempo (cioè il rapporto dinamico tra conoscenze, decisioni e azioni) è fondamentale, e dà senso e sostiene il passaggio dal mondo degli oggetti al mondo delle informazioni. La

¹⁵² Nota aggiunta dagli autori del presente lavoro. Proprio in questa epoca rinasce assieme all'astronomia, rinascono anche la geodesia e la cartografia, nonché la topografia come prima tecnica del rilevamento metrico, ben distinta dal rilievo ed altre indagini. A riguardo, occorre precisare che anche la topografia antica (con l'agrimensura, la centuriazione, il tracciamento di infrastrutture, ecc.) sia sempre e comunque un rilevamento metrico (distinto dal rilievo ed altre indagini). Circa l'inevitabile commistione con quello che non è scienza, anche Newton, oltre ché di matematica, astronomia e fisica (meccanica ed ottica), si occupa anche di alchimia, astrologia ed altre cosiddette scienze occulte, perché nulla è normale e lineare, da subito e per sempre.

consapevolezza delle dinamiche del Pianeta, dalle tensioni geomorfologiche alla gestione dei bacini idrici, dalle modificazioni del clima alla diffusione di inquinanti, dovrebbe spingerci a una maggior attenzione e consapevolezza sia verso la cura della terra/Terra, sia verso rischi dell'abitare che comprende la casa, il lavoro, le attività culturali, la protezione della biodiversità e così via.

Le città consumano fisicamente poco suolo rispetto alle risorse, ma il loro impatto si estende ben oltre l'impronta fisica. Dunque, il fattore tempo misura la capacità e l'adeguatezza delle risposte che il governare il territorio può fornire a fronte delle criticità, ma in un'epoca dominata da dinamiche sempre più veloci, il fattore tempo è essenziale.

E' vero anche nell'urbanistica si possono aprire suggestioni verso un aumento continuo della precisione, delle moli di dati da raccogliere, ma il problema sta sia in quale livello di dettaglio posso trovare una giusta soluzione tra costi e tempi di implementazione e l'utilità, ovvero l'effettivo livello di integrazione tra diverse basi di dati.

Da un punto di vista operativo l'urbanistica si trova compressa tra approcci settoriali e approcci totalizzanti, si intuisce la potenzialità della partecipazione, ma se ne temono le derive capaci di portare fuori controllo l'organizzazione. Se questi termini sono corretti, allora le risposte non possono che essere trovate ribaltando l'approccio convenzionale e riorganizzando sia i rapporti tra politica, pubblica amministrazione, imprese e cittadini, sia quelli tra sistemi produttivi e cittadini.

Poiché l'organizzazione territoriale costruisce un sistema o un guscio su cui innestare il nostro abitare, dobbiamo introdurre l'esigenza di comprendere come i singoli interventi siano interconnessi e come possano generare emergenze, siano esse positive o negative dal punto del benessere collettivo, dell'emancipazione sociale, della libertà dalla fame e dalla paura. Questo percorso quindi rimette in primo piano vecchi temi del buon governo e della partecipazione, evita un approccio paternalistico o autoritario del buon piano che tutto risolve, ma richiede di superare convenzionalismi.

Città e territorio non sono un problema di architettura, per il loro governo la gestione e la diffusione delle informazioni è fondamentale. Non c'è più tempo per essere pessimisti, né c'è più tempo per sperare che le tecnologie del futuro risolvano i problemi e le criticità di cui già siamo consapevoli. E questo introduce anche la funzione che potrebbe avere il catasto come spina dorsale unificante della georeferenza dei dati di interesse.

A fronte del continuo potenziamento delle tecnologie, i temi dell'interoperabilità, della semantica e ontologia del dato, dei thesaurus sono essenziali per sviluppare politiche del governare condivise tra diversi livelli di governo e diversi attori pubblici e privati. Ma questo pone anche altri aspetti di grande interesse: l'urbanistica può essere scienza, può essere formulata in teorie capaci di gestire la complessità dell'abitare poeticamente, del ridurre i rischi dell'abitare, del governare con efficacia, nel rispettare l'ambiente e nel convivere con l'ambiente? I contributi che può fornire una cultura interdisciplinare e transdisciplinare sono enormi: i compiti e le responsabilità della ricerca e dell'insegnamento lo sono altrettanto (Luca Marescotti).

La Geomatica incontra le scienze umane, lavorando a stretto contatto con amici e colleghi di altre discipline.

- ❑ Un esempio è offerto dal progetto "Organizzazione del territorio, occupazione del suolo e percezione dello spazio nel Mezzogiorno medievale (secoli XIII – XV). Sistemi Informativi per una nuova cartografia storica", con un incontro fattivo e felice tra le Scienze storiche, filosofiche, pedagogiche e psicologiche e la Geomatica con la gestione di archivi digitali e strumenti GIS per la ricerca storica.
- ❑ L'interfaccia esperti di Storia – esperti di Geomatica si avvia riconoscendo che proprio tutto è ancora da costruire:, tanto per cominciare, un dizionario comune. Banalmente e solo per fare due semplici esempi: "loro" dovevano imparare cos'è un database e, almeno a grandi linee, su quali criteri si basa la sua organizzazione; "noi" dovevamo imparare come si archiviano i documenti storici e con quale criterio si indica la fonte storica. Naturalmente tutto ciò deve portare all'acquisizione di un minimo di terminologia comune, almeno dopo diversi anni di lavoro.
- ❑ L'interfaccia riguarda anche il modo di comunicare i risultati della ricerca. Anche in questo caso, con una certa sorpresa: le comunicazioni alle Conferenze degli Storici sono scritte in precedenza e poi lette al momento della presentazione. Anche in questo caso ci sono alcune non trascurabili differenze (c'è per "noi" qualche riflessione da fare su tutto questo?).
- ❑ Lavorando con gli Storici in ambito GIS, una considerazione interessante da fare in merito alla definizione delle posizioni di ciò che è possibile georeferenziare, nel caso specifico gli insediamenti Medievali nel Principato di Taranto. Quando "noi" vogliamo definire la posizione di un oggetto in cartografia, ci basiamo su misure: misure topografiche, GPS, fotogrammetriche o di altro tipo ancora. Segue compensazione delle misure e stima delle coordinate. E' questione ben diversa la definizione di posizioni di oggetti, ad esempio insediamenti, dei quali si hanno notizie (degli insediamenti, ovviamente,

non della loro posizione ...) in documenti storici e che in molti casi non esistono più ai giorni nostri. La definizione di queste posizioni è basata dunque su deduzioni e ipotesi basate sulla fonte documentale esaminata (e sulla sua interpretazione).

- ❑ Solo successivamente segue ipotesi sulla posizione attuale corrispondente all'oggetto antico ed è la posizione attuale che sarà georeferenziata. Qui ci sono almeno due "salti": si formulano ipotesi sulla possibile corrispondenza fra oggetto antico e oggetto attuale; si georeferenzia l'oggetto attuale che si è ipotizzato corrispondere all'oggetto antico. Non avviene lo stesso nell'Archeologia: la posizione di reperti e manufatti viene rilevata (misurata); non ci sono ipotesi da formulare su "dove" si trovi un oggetto. E' forse per questo che l'Archeologia è più avanti nell'utilizzo di strumenti del tipo GPS/GIS, rispetto alla Storia (antica).
- ❑ La componente temporale in un Sistema Informativo Territoriale: in un GIS per "noi" il tempo è la quarta dimensione; per "loro" il tempo è la prima dimensione. Le tre coordinate (per noi le "prime" tre dimensioni) per gli storici sono qualcosa "in più" rispetto ai dati che utilizzano normalmente. Quindi la somma $4D = 3D + 1D$ è pensata e ottenuta in modo diverso dalla somma $4D = 1D + 3D$.
- ❑ Infine sempre per quanto riguarda l'implementazione di un DB di dati storici, mentre solitamente le informazioni sull'origine del dato sono considerate metadati (epoca e modalità del rilievo, strumentazione utilizzata, ecc.), per gli Storici "la fonte è il dato". Infatti le informazioni che permettono di identificare l'origine del dato storico che si è inserito nel DB devono essere inserite esse stesse nel DB e inoltre devono sempre accompagnare il dato e non devono esserne mai disgiunte (Federica Migliaccio).

Motivare l'esistenza della Geomatica "critica" non intende soddisfare domande "ultime", rintracciando una radice comune od un'unità fittizia, al di là della varietà di mezzi e finalità d'indagine. All'opposto, intende anzitutto sospendere la domanda, circa l'esistenza stessa di una radice del genere, perché non si deve pensare a un'unità superiore che presieda a queste realtà. Tutto quello che bisogna spiegare non è la dissociazione del sapere, ma il controllo unificatore. Allora basta cercare risposte ad indagini locali, per scoprire a quali condizioni, riflessione epistemologica ed indagini scientifiche o tecnico-scientifiche si siano trovate in un rapporto proficuo, per la crescita della conoscenza, nel suo insieme. Inoltre quali effetti hanno altri campi della cultura, su queste discipline scientifiche? Si tratta di effetti quantificabili e misurabili? Secondo quali metodi si può stabilire un criterio di quantificazione, adeguato in questi casi, per non cadere in concetti generali, vaghi e generici? Da quali procedure nasce la richiesta, liberamente concordata e condivisa, di una conoscenza oggettiva (o quantomeno intersoggettiva) e come è favorita dall'uso di strumentazione scientifica?

Queste domande si possono chiamare "penultime" ed attengono ad un atteggiamento "critico", scettico e relativista moderato. Non affrettate domande sul meccanismo che sempre guiderebbe la conoscenza (per ritrovarlo, nel trascendentalismo, oppure nell'idealismo, in realismi, d'ogni sorta, od ancora nello storicismo). Invece austere domande, strutturalistiche e funzionaliste/pragmatiste, su quali conoscenze, metodologie e procedure producano ricadute su altri rami del sapere ed in altre forme di espressione. Infatti questi problemi si rifanno al concetto di somiglianze di famiglia, dominate più dell'incertezza che dalla certezza. Essi hanno un forte legame con le dinamiche dei linguaggi (facendo riferimento alla coppia: parole ed oggetti), e propongono alcune interpretazioni, per costruire qualche briciola di verità, per quanto precaria e provvisoria. In tal modo, si potrebbe forse riuscire – e questo sarebbe un programma ambizioso – a mettere a nudo i meccanismi con cui singole conoscenze sono riorientate, reinterpretate e variate. Ne discenderebbe l'adeguamento a costellazioni concettuali, anche radicalmente dissimili, da quelle di partenza, creando un'alternativa od una rete di alternative, a prospettive di tipo riduzionistico.

Troppo spesso attività umane come "misurare", "raccolgere dati" e "costruire modelli" appaiono pratiche scontate e naturali, prive della necessità o dei motivi per essere messe in questione. Stabiliti per convenzione alcuni simboli, raggiunto l'accordo sulle procedure ed osservate le regole della logica per "conservare la verità", da queste deduzioni, cosa esiste di più oggettivo di una lista di numeri o di una tabella di dati? Eppure la storia della scienza e della tecnica mostra anzitutto che, non sempre e non ovunque, si sono raccolti dati, per costruire mappe della realtà e/o della conoscenza. Da ciò, si può intuire a quali condizioni tali procedure sono emerse, nell'evoluzione naturale e culturale, per trasformarsi lentamente in discipline, articolate in concetti. Questi poi si tramandano e si rinnovano, attraverso generazioni, ed infine s'inquadrano in apparati d'insegnamento, ad ampio accesso, entro strutture sociali altamente organizzate. In secondo luogo, in sistemi di pensiero differenti, possono fiorire strategie di misurazione, trattamento, analisi e restituzione/visualizzazione (ovvero rappresentazione/gestione) diverse, a causa di molte altre conoscenze tecniche e per la varietà degli strumenti di misura ed archiviazione impiegati.

La Geomatica "critica" prende in considerazione un vasto insieme di discipline, aventi per oggetto: l'acquisizione, il filtraggio, la restituzione, l'analisi e la gestione di dati (a referenza spazio-temporale), e

basate su trattamenti dati rigorosi. Infatti i dati di natura metrica e/o tematica sono identificati dalla loro posizione accurata e qualificati dalla precisione di rilevamento e dall'affidabilità delle misure effettuate. Inoltre la stessa Area si definisce "critica" in senso kantiano (o meglio neokantiano, seguendo la rilettura anche del positivismo logico), perché studia i fondamenti epistemologici del Trattamento delle Osservazioni (ovvero di quella parte della Geomatica dedicata all'analisi dei dati, alla statistica computazionale ed alla validazione dei modelli, perché andando dal rilevamento alla restituzione/gestione si mette sempre in gioco lo scegliere e l'interpretare). Infine questa Area è attenta all'incontro tra la Geomatica e le Scienze umane (partendo dalla Linguistica per arrivare alla Filosofia della Scienza ed alla Storia della Scienza e della Tecnica), perché non bisogna temere di ibridare culture, essendo sempre un segno di ricchezza ampliare gli ambiti della conoscenza e del sapere (da una discussione di Luca Guzzardi con Luigi Mussio).

Diverse tematiche si muovono "dall'alto verso il basso":

- il ragionamento empirico versus quello deduttivo;
- la necessità di modelli per ogni tipo di ragionamento;
- la necessità o meno di automazione completa, spinta o debole, nelle fasi del rilevamento;
- le varie scale spazio-temporali nella descrizione del mondo.

Le tecnologie attuali offrono molteplici possibilità, ma sta a chi le utilizza la capacità delle scelte opportune. In questo contesto, esiste ed è rilevabile un rapporto ben definito tra le forme di rappresentazione del globo ed il potere esercitato da chi ne fa uso. Infatti la Geomatica e la Geoinformazione possono dare un contributo importante alle attività umane, al contrario possono favorire l'escalation di guerre e distruzioni, in modo estremamente sofisticato. Tutto ciò passa anche attraverso un'analisi critica delle discipline stesse. D'altra parte, se ogni disciplina scientifica non è mai neutra, ciò è ancora più "vero" per la Geomatica, in quanto la rappresentazione della Terra è collegata alle concezioni (anche sociali, politiche ed economiche) dello spazio, del tempo e della realtà.

Il prorompere odierno della Geomatica fa sì che le discipline del rilevamento siano molto richieste da tutti, ma presenta anche il rischio di una polverizzazione delle conoscenze e delle competenze. Infatti poiché lo sviluppo della tecnologia (compresa quella modellistica ed informatica) è soprattutto in altre mani, essendo debitrice da altri campi disciplinari, e poiché le applicazioni sono ormai di tutti, data anche la relativa facilità di acquisire le informazioni, il suddetto rischio è un'eventualità concreta. D'altra parte, la nobile origine delle discipline topografiche e cartografiche, dall'astronomia e dalla geodesia, essendo cofondatrici di buona parte della matematica classica (dalla geometria analitica all'analisi matematica), ed una lunghissima tradizione scientifico-disciplinare (in Italia, come è anche nei paesi europei di lingua francese, inglese e tedesca, dove quest'ultima è allargabile ai paesi dell'est europeo vicini) impongono una seria riflessione sugli sviluppi futuri per la Geomatica e tutte le discipline ad essa collegate.

Oltre conservare e diffondere il nucleo centrale della materia, cinque vie diverse offrono spunti d'interesse

¹⁵³.

- risalire la tecnologia, orientando la stessa nella direzione di rispondere bene alla richiesta di informazioni specifiche, invece di dover adattare le esigenze a quanto offre la tecnologia;
- risalire la modellistica, comprendendo meglio le basi teoriche matematiche (comprese quelle statistiche e numeriche) ed informatiche che la determinano, ed evitando di accettare acriticamente sistemi a

¹⁵³ A queste cinque vie, seppure su piani ben diversi, se ne aggiungono altre due: il trasferimento tecnologico e la produzione artistica.

scatola chiusa (dei quali non si sa valutare accuratezza e precisione, né si conosce la ridondanza delle osservazioni di misura, ovvero l'indipendenza o meno delle stesse),

- ❑ fare applicazioni di altissima qualità che costituiscano un unicum, in sé, e costituiscano un disciplinare metodologico per future applicazioni, ormai diventate ordinarie (evitando di eseguire tutte quelle opere ordinarie che devono competere al mondo della produzione, in Italia, per altro, oltremodo “gracile”).
- ❑ interfacciarsi con le discipline fisiche della terra (e del sistema solare, oggi in subordine, ma sicuramente in prospettiva), operando di concerto con la geofisica, la sismologia, la vulcanologia, la geochimica, la geologia, l'idrografia, la climatologia/meteorologia, ecc. (ma anche con discipline naturalistiche, ormai solo per antica tradizione, come la biologia, la geobotanica e l'ecologia zoologica);
- ❑ interfacciarsi con le scienze umane, con lo scopo di ibridare culture diverse, perché la tecnologia da sola è acefala, mentre la “filosofia” è parolaia, se lasciata a se stessa.

Un commento conclusivo riprende quanto autorevolmente detto dall'amico e collega Fernando Sansò, nei saluti di commiato alla giornata di studi, sul tema: Geodesia e Geomatica – La frontiera oggi (Accademia Nazionale dei Lincei – Roma, 3 giugno 2014). Infatti scopo della giornata è un convegno, rivolto a giovani ricercatori italiani, nel campo della Geodesia e delle scienze ad essa collegate (o comunque ricollegabili), oggi note sotto il nome collettivo di Geomatica. Il suo proposito specifico è fornire la struttura metodologica della disciplina ed un panorama, comprensivo dei molti settori che la compongono, mostrando i progressi dell'ultimo decennio, legati alle nuove tecnologie di misura, e discutendo gli aspetti della ricerca di frontiera che le comunità nazionale ed internazionale stanno affrontando.

In questo contesto, l'accademico Fernando Sansò¹⁵⁴, al termine di un'intensa giornata di studi, evidenzia tre parole che devono caratterizzare il settore scientifico disciplinare della Geodesia e della Geomatica, nonché di quelle altre discipline che allo stesso settore vogliono collegarsi: misure, modelli e metodi. Ad un ascolto distratto, esse potrebbero sembrare poca cosa, mentre sono proprio l'essenziale, per fissare un centro, dove attorno si situano diverse e differenti frontiere. Infatti senza un centro, il settore si perde per diaspora (e non per esaurimento, come il disegno geometrico e prima ancora la calligrafia). D'altra parte, se la storia di alcuni macrosettori racconta una perdita per diaspora, occorre riconoscerne l'enorme vastità (come per l'ingegneria industriale, le scienze naturali, la medicina organicista, ecc.).

Non così può invece essere per le discipline del rilevamento che si caratterizzano tutte nel settore scientifico disciplinare della Geodesia e della Geomatica (come ben evidente, non così ampio per poter solo fungere da contenitore di sottosectori, diversi e distinti, come avviene nei casi precedenti). In questo modo, le misure, i modelli ed i metodi sono gli elementi essenziali di una scienza ed un insieme di tecniche, richieste dove l'accuratezza e la precisione attese sono dell'ordine di $10^{-5} \div 10^{-6}$, nel posizionamento di punti, ed invece di $10^{-4} \div 10^{-5}$, nella rappresentazione di linee, superfici e corpi 3D, avendo prefissato un livello d'affidabilità delle osservazioni prossimo a 0.8 (e comunque non inferiore a 0.6), tutte cose che rendono il rilevamento metrico ben distinto e completamente diverso dal rilievo e da altre indagini¹⁵⁵.

¹⁵⁴ Gli autori ringraziano l'amico e collega Fernando Sansò, per il contributo offerto, qui riportato, anche in questo caso, con lo scopo preciso di rendere più ricca l'analisi delle problematiche trattate.

¹⁵⁵ Come già per l'agrimensura e per i rilevamenti speditivi (ad esempio, come con la celerimensura), esistono oggi rilevamenti altrettanto speditivi (ad esempio, come con il GPS del telefonino e/o con le immagini amatoriali), dove la precisione, l'accuratezza e l'affidabilità non sono quasi mai troppo elevate. Tutto ciò non deve stupire eccessivamente; infatti in questi casi, quello che qualifica il rilevamento metrico è saper determinare proprio quanto di precisione, accuratezza ed affidabilità è acquisito, uscendo dal vastissimo campo dell'incertezza che caratterizza, troppo spesso, il rilievo ed altre indagini.

Interazioni con l'etica e la politica

La lamentata incultura dei deputati rappresenta l'incultura e la confusione del Paese. Le corruzioni demagogiche, le indulgenze verso il parassitismo ... corrispondono alle nostre condizioni storiche e indicano appunto l'incapacità e l'impossibilità di porre il problema ... che determinerebbe ... chiarezza, ... in sostanza, l'Italia, patria di tutte le ideologie e di tutte le ribellioni, si riduce a un Paese di conservatori (Piero Gobetti).

... la civiltà nella quale viviamo è una civiltà che a un certo punto ha sostituito le civiltà anteriori. Ora ... si comincia a costatare – perché tutti i grandi libri sulle teorie della civiltà e della cultura, non dimentichiamolo, sono anteriori alla bomba atomica – che al momento attuale la nostra civiltà è una civiltà con caratteri che nessun'altra ha avuto. In primo luogo, la macchina. Non dimentichiamolo che la nostra è la prima civiltà delle macchine. In secondo luogo, l'agnosticismo. Ci sono molti credenti sulla terra, ma la civiltà moderna non è una civiltà religiosa e non si fonda su un avvenimento religioso. Noi crediamo che la nostra civiltà, come lo sono state le altre, sia in corso di sviluppo, ma questa nostra civiltà è l'erede di tutte le altre, vuole essere l'erede di tutte le altre. Le civiltà precedenti si rifacevano, al massimo, a un'altra civiltà, mai di più. ... Noi ci rifacciamo a tutto. Ora se consideriamo semplicemente questi dati abbastanza elementari, ci accorgiamo che così come abbiamo a che fare con una civiltà che non ha precedenti nel mondo, anche la crisi di valori alla quale assistiamo non ha alcun precedente. ... In primissimo luogo, c'è una crisi totale dell'idea di gerarchia¹⁵⁶. Non è facile da vedere, perché in linea di massima quel che si contrappone all'idea di gerarchia è l'idea di disordine. Quando si parla di gerarchia, si ha immediatamente e semplicemente l'aria dei reazionari. Non è affatto questo che intendo dire. Ciò che intendo dire è che ci sfugge – perché è così evidente – che tutte le civiltà si basavano su gerarchie. Non le stesse, si capisce. Molto spesso sono gerarchie religiose, a volte sono gerarchie militari, ma una struttura gerarchica c'è sempre. Ora, per noi, per la prima volta, c'è un'ostilità senza precedenti per l'idea di gerarchia. ... Mi sembra dunque di vedere – e per questo ho parlato di ripetizione generale – un dramma mondiale che all'incirca è questo: una civiltà che è la più potente di tutte ed è la sola, in fondo, che abbia il potere di distruggere se stessa, arriva a un momento del suo sviluppo di cui non ha coscienza, perché prima le civiltà erano all'interno di una coscienza. Per parlare in modo più semplice: la civiltà cristiana si sviluppava all'interno del cristianesimo. Oggi la civiltà, in un certo senso, si sviluppa nel vuoto ... Notate che quel che si dice non è molto, siamo all'inizio di un dramma. Non credo affatto che le cose finiranno, perché organizzeremo un po' meglio ... Certo l'organizzeremo meglio, ma il dramma ha ben altra ampiezza ... (André Malraux).

Uno dei problemi centrali posti alla mente umana è il problema della successione delle forme. Qualunque sia la natura ultima della realtà ..., è innegabile che il nostro universo non è un caos; noi vi discerniamo esseri, oggetti, cose che designiamo con altrettante parole. Questi esseri o cose sono forme, strutture dotate d'una certa stabilità; esse occupano una certa posizione dello spazio e durano un certo lasso di tempo; di più, benché un dato oggetto possa essere percepito sotto aspetti assai diversi, non esistiamo a riconoscerlo come tale; il riconoscimento d'uno stesso essere sotto l'infinita molteplicità dei suoi aspetti pone di per sé un problema (il classico problema filosofico del concetto). ... Supponiamo questo problema risolto in conformità all'intuizione ingenua che accorda alle cose un'esistenza indipendente dalla nostra percezione. Non meno necessario è ammettere che lo spettacolo dell'universo è un incessante movimento di nascita, di sviluppo, di distruzione di forme. Oggetto di ogni scienza è prevedere questa evoluzione delle forme e, se possibile, spiegarla. Se la successione delle forme si effettuasse in ogni tempo, in ogni luogo, seguendo uno schema unico e ben definito, il problema sarebbe assai meno acuto; si potrebbe in effetti indicare, una volta per tutte, per esempio, sotto forma di tabella o di grafo, l'ordine obbligatorio di successione delle forme (o di sistemi di forme) che si presentano in prossimità di un punto. In mancanza di spiegazione, si avrebbe almeno un algoritmo che permetterebbe di prevedere i fenomeni; molto verosimilmente, la mente si abituerebbe a considerare questo ordine di successione obbligatorio delle forme come imposto da una causalità. Ossia come un'implicazione logica. Che si sia dovuti ricorrere a considerazioni più raffinate – in una parola, alla scienza propriamente detta – per prevedere l'evoluzione dei fenomeni, mostra che il determinismo d'evoluzione delle forme non è rigoroso e che una stessa situazione locale può dar luogo, sotto l'effetto di fattori incogniti o non osservabili, a conseguenze di aspetto estremamente diverso. E' curioso osservare, a questo proposito, che la scienza¹⁵⁷, che ... nega l'indeterminismo, ne è effettivamente la figlia (René Thom).

Un conglomerato¹⁵⁸ impegnato a discutere, con grandi parole, di grandi riforme
a copertura di piccoli giochi di potere e d'interesse (Indro Montanelli).

¹⁵⁶ Altri hanno parlato di crisi insieme di legalità e legittimità, ed i due concetti non sembrano troppo lontani.

¹⁵⁷ Poco oltre lo stesso autore, citate la meccanica classica e la fisica, come teorie strettamente quantitative e deterministiche, parla della biologia e delle scienze umane, come altre scienze che vanno viepiù matematizzandosi, seppure in ambiti non deterministici.

¹⁵⁸ Questo conglomerato è la società civile e politica italiana.

I problemi politici, economici e sociali al momento attuale risultano estremamente complessi. Le soluzioni proposte nel corso degli ultimi due secoli hanno mostrato aspetti positivi e negativi, momenti di grandi idee, passioni e speranze, ed altri di estrema tragicità ¹⁵⁹.

L'Occidente seduce il resto dell'Umanità con i suoi mezzi di produzione, con la scienza e la tecnologia, ed anche con il suo messaggio etico della tradizione universalistica dei Diritti dell'Uomo. Tuttavia tutto ciò è in netta contraddizione con il carattere non-etico del mondo occidentale: un episodio emblematico è lo stupore dei soldati francesi, mandati a Haiti a combattere una ribellione degli abitanti neri contro lo schiavismo, che sentono dalla parte dei loro avversari il suono della Marsigliese.

E' possibile si chiede Serge Latouche (2000) dissociare il versante libertario ed universalistico dei diritti degli uomini (ed oggi anche e soprattutto delle donne) dall'altro aspetto tipico, dell'Occidente, quello predatorio e caratterizzato da una lotta spietata per il profitto?

La tecnologia è un potente alleato della vittoria dell'Occidente negli ultimi secoli, ma non furono solo i moschetti spagnoli e le cannoniere portoghesi a vincere contro un numero di nemici armato peggio, ma molto più numeroso. Secondo Cornelius Castoriadis (1995), il motivo vero è la caratteristica precipua dell'Occidente: la coscienza di sé. "Civiltà del resto molto raffinate, ma fondate sulla coscienza collettiva del gruppo, della tribù,...sono state spazzate via a contatto con la civiltà occidentale ...non perché quest'ultimo avesse un'arma da fuoco o un cavallo, ma perché possedeva una coscienza di sé diversa, che lo rendeva capace di tirarsi fuori dal mondo e ritrovarlo attraverso un'attività interiore".

Tuttavia attualmente l'universalità si riduce poco a poco ad una sola caratteristica: l'economicità, cioè l'ottimizzazione attraverso il calcolo dell'interesse individuale che dovrebbe essere, secondo tale pensiero, una caratteristica umana universale, ma come mai allora una sola parte (minoritaria oltretutto) la possiede in misura maggiore di altre parti?

La storia del moderno pensiero economico è fatta risalire da Robert e Edward Skidelsky (2013) addirittura ai profeti ebrei, come Isaia, che trasformarono il concetto del tempo ciclico in quello del tempo lineare, immaginando un tempo finale in cui "il lupo dimorerà insieme all'agnello, il leopardo si sdraierà accanto al capretto ...". Questa aspirazione non si ritrova nel Cristianesimo ufficiale, quanto nelle sue mai sopite correnti marginali, spesso mistiche. Un altro aspetto interessante è quello che spiega l'esistenza del male come una parte integrante del piano divino per la salvezza dell'Uomo, perché Dio permette il male a fin di bene. Questi due concetti, secondo gli autori, sono alla base del pensiero economico; infatti si ritrovano sia in Marx (che l'ha ripreso dal suo maestro Hegel), sia in Keynes e nei più recenti studiosi di economia ¹⁶⁰.

Non sfugge ai lettori attenti di Marx, la sua ammirazione per il capitalismo che spazza via i sistemi economici e le relazioni sociali antiquate (che spesso lascia perplessi i suoi seguaci dogmatici). A sua volta, il liberale Keynes immagina che il capitalismo, con le iniquità connesse, serva a raggiungere, più in fretta, un'epoca di sviluppo e benessere diffusi, consentendo all'umanità intera di lavorare meno e vivere meglio.

Purtroppo l' utopia scientifica di Marx e le previsioni di Keynes non si sono avverate. Infatti il capitale si è internazionalizzato, sia per quanto riguarda la circolazione di merci, sia per quanto riguarda il processo di produzione che si è frazionato e ridistribuito, dissociando l'economia dai territori. Le differenze tra poveri e

¹⁵⁹ A proposito, si veda anche il libro autobiografico di Tony Judt: Novecento (ripreso nella conclusione di questo lavoro), in cui l'autore ripercorre la storia del pensiero politico-filosofico del secolo scorso, intrecciata con la sua stessa vita, interessante e libera.

¹⁶⁰ Nel mito di Faust, presente nell'opera omonima di Johann Wolfgang Goethe, e ripreso magistralmente da Michail Afanas'evič Bulgakov, nel *Maestro e Margherita*, Satana è quella forza che insegue sempre il male, ma alla fine contribuisce a realizzare il bene. Anche un'idea rinascimentale presenta tratti simili; ad esempio, laddove Niccolò Macchiavelli, tra alcuni altri del suo tempo, ritiene che si possano usare i vizi e le passioni degli individui, per governare la società

ricchi si allargano ed il nuovo ordine mondiale emargina chi non si adegua: deboli, portatori di handicap, poveri, intere nazioni, i vinti di questa guerra, ecc.

La crisi dello stato sociale è in realtà già la crisi, dei valori, di legalità e di legittimazione, dello stato stesso. Dagli anni '70 del secolo scorso, teorie come quelle di John Rawls sostengono che lo stato debba lasciare i cittadini liberi di seguire i propri istinti e i propri punti di vista, a patto che non nuocciano ad altri. Nello stesso tempo non si ha più distinzione tra necessità e bisogno, come tra valori d'uso e di scambio.

Infatti per la filosofia classica, il valore d'uso di un oggetto è il suo contributo ad una vita "buona", e il valore di scambio (il denaro) ne è distinto. L'idea aristotelica del valore d'uso è adottata da Smith e Ricardo e poi naturalmente anche da Marx. Tuttavia attualmente questa distinzione non è più valida: il valore d'uso non è inerente all'oggetto (non ne è una qualità): semplicemente non esiste. Invece il valore di scambio predomina, in quanto un oggetto acquista valore solo quando l'individuo si rende conto che dipende da tale oggetto, per soddisfare un suo bisogno (ad esempio, se si vuole spendere per la droga, invece che per un intrattenimento giocoso, in compagnia di amici, oppure per un buon libro, sono solo fatti propri).

Per Aristotele, il commercio è uno dei tanti aspetti della vita quotidiana, ma non è il predominante, mentre l'uomo, come tutte le specie, ha un fine (*τέλος*), cioè uno stato di realizzazione che è la cosiddetta vita "buona". Oggigiorno invece, si assiste ad una corsa, sfrenata ed assurda, all'arricchimento personale, mediante la competitività, spesso considerata addirittura un dovere. Infatti la vita del singolo, nella società dei consumi, è scissa tra due poli, da un lato, la lotta contro gli altri nella società, dall'altro, la manifestazione del proprio io nella sfera privata, come un'egocentrica espressione della propria personalità.

Per poter vivere una vita "buona", l'uomo deve avere dei beni materiali, che tuttavia sono le condizioni per vivere, non il fine della vita. Attualmente invece nella società occidentale, l'umanità è volta verso una crescita infinita, a scapito di condizioni di vita dignitosa, se per parte di sé ed il resto del globo.

L'idea della vita "buona", presente in varie culture e civiltà, al momento è assente nell'Occidente attuale. Eppure l'armonia, con gli altri e con la natura, dovrebbe essere un aspetto della vita da ricercare. I limiti della crescita e dello sviluppo non devono essere presentati come un'ineluttabile necessità, di fronte alla finitezza del mondo e all'avidità degli uomini, ma una ricerca ragionevole, per ottenere una vita migliore.

La Ragione ¹⁶¹ può prendere due strade: quella del razionale e quella del ragionevole (Latouche, 1999). Quasi tutte le società si basano sulla ragionevolezza per risolvere i problemi sociali; solo l'Occidente attualmente svaluta la ragionevolezza nel dirimere questioni sociali e politiche, a favore di un razionalismo calcolatore che nasconde i limiti della ragione economica.

Latouche cita Aristotele "sarebbe altrettanto ridicolo accontentarsi di argomentazioni ragionevoli da parte di un matematico quanto esigere prove scientifiche da un oratore ..." L'ambito specifico che interessa coloro che scrivono questo lavoro è quanto la scienza e la tecnologia possano intervenire nell'analisi dei problemi attuali, oltre che nell'eventuale loro contributo ad un tentativo di soluzione.

E' evidente, in generale, che gli strumenti tecnico-scientifici possano fare un gran bene all'Umanità intera, promuovendo condizioni di vita migliori per tutti, come invece spesso contribuiscano a devastazioni e guerre. La scienza, sempre a modesto avviso di coloro che scrivono, deve restare negli ambiti dello spirito di geometria, ma la tecnologia deve essere, a sua volta, ragionevole e promuovere una vita "buona".

¹⁶¹ Nella tradizione filosofica, è presente la distinzione, si pensi alla Ragion Pura ed alla Ragion Pratica di Immanuel Kant, od allo spirito di geometria ed allo spirito di finezza di Blaise Pascal, dove il primo ambito è quello della scienza, mentre il secondo ambito è quello dei rapporti tra gli uomini.

Nessun discorso di etica e politica è da considerarsi serio, se non è capace di parlare di etica e politica anche con se stessi, con il proprio gruppo d'appartenenza e, nel caso specifico, con il settore scientifico – disciplinare di riferimento. Infatti come ovvio, non è poi così difficile scrivere di etica e di politica, una volta superati tutti i fondamentalismi ed gli integralismi delle religioni (e delle ideologie, intese come religioni atee), nonché tutti i radicalismi, i populismi ed i localismi della politica (come pure tutti i beceri intrallazzi di una politica ridotta a mercanteggiamenti da suk). Di conseguenza, un discorso serio di etica e politica deve saper guardare anche in piccolo, andando a scavare nelle piccole contraddizioni che, poco o tanto, contribuiscono a rendere contraddittorio il mondo globale e globalizzato.

Allora con particolare riferimento, al settore scientifico – disciplinare della Geodesia e della Geomatica, ovvero all'insieme di tutte le discipline del rilevamento, una prima lettura politica constatata non solo la totale mancanza di un mercato privato, quantomeno in Italia, ma anche la debolezza di un interesse/intervento pubblico, sempre in Italia. D'altra parte, se è vero che mancanze private sono un indebolimento finanziario, è altrettanto vero che la debolezza pubblica è un incentivo per le mancanze private, perché solo uno Stato ed Enti locali, interessati ed interventisti, possono essere di stimolo per iniziative private di complementarità e/o sussidiarietà. Ovviamente la debolezza pubblica ha una storia lontana, ma è anche un'intelligente traccia di lettura di almeno una certa parte dei cronici mali italiani

Dopodiché il rischio di una perdita di centralità dell'intero settore, per diaspora, già enunciato nel paragrafo precedente, è tutt'altro che remoto, in quanto la straordinaria varietà delle tematiche e delle applicazioni, oltre ad una produzione di tecnologia ormai proveniente d'altri mondi industriali, fanno sì che moltissimi siano i fruitori di parti delle discipline del rilevamento, con risultati talvolta accettabili, ma senza una conoscenza del tutto, una capacità critica ed un'attenzione focalizzata su questo settore e non altrove. Pertanto come già detto in precedenza, non un'estinzione (che sposterebbe la disciplina dall'accademia e/o dal laboratorio ad un museo, essendo comunque il suo studio degno di nota, anche se limitato solo ad un ristretto gruppo di specialisti), ma una diaspora errata è il rischio reale da cui guardarsi.

Infine in un sistema debole, aggiungere altre debolezze è una china pericolosa, mentre risalire la corrente richiede volontà, impegno e costanza. Infatti se gli spazi sono ristretti e il sistema predilige la competizione alla collaborazione, una lotta senza quartiere è il più probabile risultato atteso, dove non si fanno prigionieri, ma si elimina semplicemente, senza mezzi termini, chi è antagonista, chi è di peso e chi è d'intralcio. Invece si può ben provare che i risultati migliori sono sempre ottenuti solo dal mettere in atto una collaborazione disinteressata e dall'assumere una visione di lungo termine, disinteressandosi di effimeri guadagni, a breve o brevissimo termine (a riguardo, la prova provata non viene da belle parole, ma dalla storia della scienza e della tecnica, nonché dell'avventura umana, in generale).

Al contrario, una lotta senza quartiere significa anche soddisfare indici numerici, smettendo di studiare, per immergersi in una vorticoso produzione di lavori inutili, in gruppo (perché così si moltiplicano i lavori), in serie (perché così si moltiplicano le occasioni) e forse anche insulsi (perché non è importante il valore di un lavoro, ma il suo solo esistere ben referenziato). Dopodiché il gruppo si scioglie e vede i suoi membri trasformati in nemici agguerriti, non appena gli spazi si trovano ristretti ¹⁶² (a fronte di pochissime occasioni), perché chi istilla la competizione (come già al mercato e, prima ancora, con la guerra) non è mai chi la subisce e perisce al posto di chi l'ha vergognosamente promossa, propagandata e sostenuta. E' triste constatare quanti illusi siano catturati da queste fole e troppo tardi sappiano riconoscere e denunciare la loro vacuità.

¹⁶² In Italia, ICAR/06 consta di poco più di un centinaio di persone, queste strategie deleterie non possono che portarlo alla sua fine.

Appendice E – Popoli e politica ¹⁶³

Con l'Europa, succede quello che succedeva a Sant'Agostino col tempo: quando non ci si chiede cosa sia, si sa cos'è, ma quando lo si domanda, non lo si sa più. Se per Europa s'intende non solo un'espressione geografica o un progetto politico, bensì una civiltà, un modo di essere, un'appartenenza culturale, è difficile e forse pure retorico discuterne. Si può vivere questo senso di appartenenza, sentirsi a casa — almeno parzialmente — anche al di fuori del proprio Stato o della propria lingua, così come si vive l'amore per un paesaggio o per una persona, oppure lo si può raccontare, farlo sentire, ma in modo indiretto, come fa la letteratura.

Si può — si deve — parlare dei problemi concreti che ha oggi l'Europa, di ciò che favorisce oppure ostacola il processo di una sua reale unificazione, delle possibilità o difficoltà di arrivare un giorno — malgrado l'attuale gravissima crisi — a un vero e proprio Stato europeo. Si può — si deve — parlare dell'euro, della disoccupazione, dell'immigrazione e della necessità di leggi comuni a tutti i Paesi.

È invece arduo e rischioso voler definire la cultura europea. Tuttavia se ne possono forse tracciare alcune linee fondanti. A differenza di altre grandi civiltà, l'Europa, sin dalle sue origini, ha posto l'accento non sulla totalità (statale, politica, filosofica, religiosa) bensì sull'individuo e sul valore universale di alcuni suoi diritti inalienabili. Dalla democrazia della Polis greca al pensiero stoico e cristiano col suo concetto di persona, dal diritto romano con la sua tutela concreta dell'individuo all'umanesimo che ne fa la misura delle cose, dal liberalismo che proclama le sue intoccabili libertà al socialismo che si preoccupa del loro esercizio concreto e delle possibilità di vivere una vita dignitosa, il protagonista della civiltà europea è l'individuo, che la letteratura e l'arte raffigurano nella sua irripetibile e inesauribile complessità, che Kant proclama essere un fine e mai un mezzo.

La civiltà europea contiene un grande potenziale antitotalitario ed è stata la “culla dei diritti umani” validi per tutti gli uomini, di principi universali che trascendono ogni orizzonte storicamente limitato e dunque pure l'orizzonte europeo e gli interessi dell'Europa. Antigone afferma le “leggi non scritte degli dèi” che nessuna legge positiva dello Stato può violare; di qui si arriverà, in un lungo e contorto processo, agli inalienabili diritti di tutti gli uomini, proclamati dalla costituzione americana del 1776 e da quella francese del 1792, sino ai diritti civili che comprendono pure la “disobbedienza civile”, formulata da Thoreau, nei riguardi dello Stato quando esso violi quei diritti la cui estensione è ancora in corso, anche se contraddetta da tante situazioni di barbarie.

Questa universalità è il contributo fondamentale della civiltà europea, anche se gli Stati europei hanno incessantemente violato questi principi da loro stessi proclamati; si pensi — ma sono solo pochi esempi fra i molti — al colonialismo, alla depredazione e distruzione di tante altre civiltà e culture, alla tratta degli schiavi, alle innominabili condizioni di lavoro e di miseria imposte a milioni di uomini privati di ogni dignità, ai genocidi compiuti in nome di ideologie, prodotto squisitamente europeo; ai Gulag, alla Shoah, culmine insuperato dell'atrocità. Non c'è Stato europeo che non abbia i suoi scheletri nell'armadio, ma la condanna morale dei crimini dell'Europa nasce da quei principi universali — e da quelle regole politiche e giuridiche che li tutelano — elaborati non solo, ma in misura eminente dalla civiltà europea.

C'è inoltre un modo squisitamente europeo di concepire il rapporto fra l'individuo e la società ossia gli altri. Sin da Aristotele, l'individuo è concepito come *zoon politikon*, animale politico; cittadino della Polis, della comunità, che esiste in rapporto con gli altri, diversamente dalla concezione anarco-capitalista-ultra, così enfatizzata negli ultimi anni e oggi in crisi. Essere animale politico significa rifiutare ogni livellamento collettivo, ma sentire di vivere nel rapporto con gli altri; significa sapere che la qualità della nostra vita comprende quella di chi vive intorno a noi, del mondo in cui viviamo; significa sentirsi partecipi di un comune destino. Non si tratta di buoni sentimenti caritatevoli, ma del senso concreto del proprio benessere, che si estende al di là della nostra immediata persona; dell'esigenza di vivere in un Paese civile, in cui la sanità, i servizi sociali, le autostrade, la scuola, la sicurezza funzionino. In questo senso il *welfare state* è un'istituzione profondamente europea, che va corretta nei suoi abusi e nei suoi sprechi ma salvata nella sua essenza, quel senso del legame tra gli uomini e le generazioni che è l'autentico umanesimo.

Da Mann a Eliot, da Croce ad Hazard, da Chabod a de Rougemont ad Auerbach a tanti altri, la cultura europea è stata considerata un'unità variegata, una radice comune di tante differenze, come quelle che Brunetière, nella sua *Littérature Européenne* del 1900, considerava un terreno comune sottostante alle diverse letterature nazionali. E Mazzini, nel suo saggio *D'una letteratura europea* (1829), richiamava le parole di Goethe su una letteratura europea che nessun popolo avrebbe potuto considerare unicamente sua, ma alla cui fondazione avrebbero contribuito tutti i popoli. Più tardi, Valéry sottolineava, contro ogni eurocentrismo, l'apertura di questa cultura europea alle altre; del resto già nella *Iconologia barocca* del

¹⁶³ Questa appendice è interamente ripresa dall'articolo del Prof. Claudio Magris, Europa, passaporto della civiltà – Le ragioni di un'identità comune (Corriere della Sera – Domenica 25 maggio 2014). Infatti questo professore, triestino e germanista, mostra una grande attenzione a quella cultura mitteleuropea (dell'*Austria felix*) che non vuole essere un sogno regressivo, ma un segno verso nuovi traguardi di reciproco rispetto, tolleranza e confronto interculturale. D'altra parte, la crisi attuale, insieme di legalità e di legittimazione, presenta rischi gravissimi e non troppo improbabili, per la democrazia e per la stessa pace. A riguardo, basta ricordare il precipitare tragico di una situazione, per la pace, con la prima guerra mondiale, e per la democrazia, con la successiva età dei totalitarismi.

Cavaliere Cesare Ripa, del 1618, l'abito dell'Europa è di vari colori perché "in essa c'è più varietà che nelle altre parti del mondo".

Già nel suo saggio *Philologie der Weltliteratur* (1952), Auerbach indicava il pericolo di una standardizzazione planetaria cancellatrice delle particolarità, oggi accresciuto dalla globalizzazione e dall'impero dei media. Se questo è certo un pericolo, ce n'è un altro complementare e contrario forse ancor più insidioso: la febbre identitaria, i regressivi micro nazionalismi che vagheggiano un'identità pura e chiusa in se stessa, endogamica e mortale. La diversità è un valore e va difesa, ma nel senso di appartenenza a un'identità più grande; l'umanità è un grande albero, diverso nelle radici, nel tronco e nelle foglie, ma pervaso dalla stessa vita. Dante diceva che, a furia di bere l'acqua dell'Arno, aveva imparato ad amare fortemente Firenze, ma aggiungeva che la nostra patria è il mondo, come per i pesci il mare.

I Paesi e le culture numericamente, economicamente, militarmente e politicamente più deboli non hanno nulla da temere da un vero Stato europeo, che può essere invece la loro tutela. L'assenza di un potere superiore garante dell'interesse comune e il puro gioco delle forze abbandonano le culture materialmente minori alla potenza di quelle più numerose e più ricche; senza un'istanza più alta di controllo ...

Oggi l'Europa esercita un peso politico paurosamente inferiore alle sue potenzialità. L'Unione Europea è spesso bloccata da elefantiasi burocratica, cautele inibitorie, ricerca impossibile e paralizzante di unanimità (che è negazione della democrazia), iniziative più rappresentative che sostanziali, macchinosa proliferazione di enti inutili, ingiurioso sperpero di energie e di denaro volto ad accontentare ambizioni e pretese di tutte le istituzioni e gli organi politici e culturali possibili; riluttanza ad assumere posizioni precise e decise.

Forse l'allargamento è stato precipitoso e sarebbe stato più realistico costruire prima un vero Stato, dotato di effettiva unità e di effettivo potere, sulla base del progetto originario dei padri fondatori; uno Stato in cui accogliere successivamente tutti gli altri Paesi che avessero liberamente deciso di confluirci, riconoscendo come propri i principi su cui esso si fonda.

Non esistono un'Europa di prima, seconda e terza classe, perché l'arricchimento umano e culturale dei vari Paesi è un bene fondamentale. Ma esiste il problema di costruire realmente una grande unità politica, che per la prima volta si cerca di costruire tramite il consenso democratico anziché tramite la guerra. Le guerre sono più efficaci delle democrazie — né l'impero romano né l'impero asburgico, indubbiamente creatori di civiltà, sarebbero sorti in virtù di accordi anziché di conquiste sanguinose. Ma la pace è il bene più prezioso che ci sia e il nostro destino dipende dalla nostra capacità di risolvere quell'autentica quadratura del circolo che è la costruzione di un vero Stato europeo, in cui ci sia posto per tutti ma solo per tutti quelli che ne condividono il fondamento.

L'unica nostra salvezza possibile è un vero Stato europeo, federale e decentrato ma organico nelle sue leggi, rispetto al quale gli attuali singoli Stati siano quello che oggi sono le Regioni per i singoli Stati. Oggi i problemi non sono più nazionali, sono europei: ogni crisi politico-economica di un singolo Paese coinvolge l'Europa; l'immigrazione è un problema europeo ed è ridicolo che sia regolato in un modo diverso in un Paese e in un altro, ...

Il mercato finanziario globalizzato, con le sue chance e i suoi pericoli, travalica le frontiere e deve essere fronteggiato da uno Stato non più nazionale. La moneta unica è un necessario coefficiente di unione perché, dopo la lingua, la moneta è l'elemento che più contribuisce a farci sentire a casa o spaesati; non sapere se con i soldi che abbiamo in tasca possiamo pagare un caffè o un pranzo è come non poter decifrare i caratteri di un alfabeto per noi incomprensibile nelle scritte delle strade. La moneta è un linguaggio e del linguaggio ha molte proprietà. Chi contrappone con retorica spiritualeggiante l'Europa dell'anima a quella, pretesamente volgare, della moneta dimentica che questa anima consiste anche nella concezione che si ha della moneta, senza la quale non c'è pane sulla tavola delle famiglie né scuola per i loro figli. A questo proposito, all'Europa occorre pure un'iniezione di "capitalismo renano" ovvero attento alle cose e alla durata, quale antidoto alle bolle del capitalismo anglosassone essenzialmente finanziario, bolle che hanno causato tanti disastri.

L'Unione europea oggi certo scricchiola, ma è lo spettro di questa possibile catastrofe che deve forzare i tempi e le iniziative per renderla più concreta. Occorre soprattutto un ritorno della "grande politica", che oggi sembra svaporata nell'evanescente o truffaldina inconsistenza dei pateracchi, dei sondaggi e dei *talk show*, bolle di sapone che sono sempre meglio che palle di cannone, ma pur sempre bolle di sapone, ...

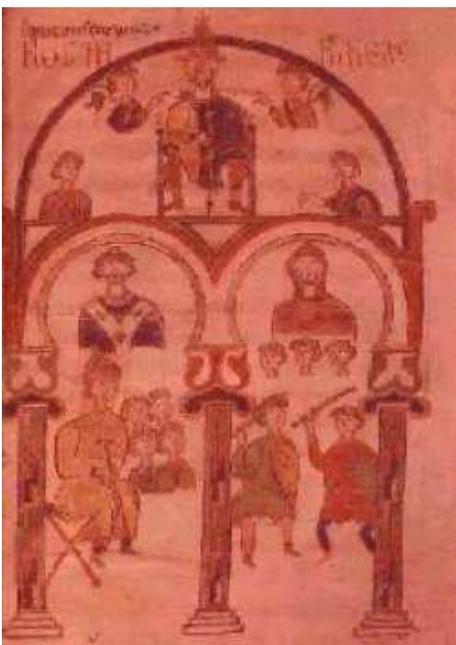
L'Europa sta cambiando profondamente; molti suoi nuovi cittadini provengono da Paesi e tradizioni culturali diverse, in un processo che non è certo privo di difficoltà e domani potrebbe assumere proporzioni drammatiche, ma è un arricchimento che prosegue la tradizione europea di apertura, di integrazione, di identità che si trasforma nel tempo senza snaturarsi. Oggi letteratura europea vuol dire pure quella tedesca di scrittori di origine turca ed è solo un esempio fra i tanti. Sta nascendo o potrebbe nascere per la prima volta nella Storia una vera universalità. In Europa popoli e civiltà oggi si incontrano e si mescolano; visioni religiose, politiche e sociali vivono fianco a fianco, in un politeismo di valori. Occorre elaborare una cultura, osserva Todorov, capace di conciliare il relativismo etico, il dialogo paritetico con le altre culture e diversità, con un *quantum* di irrinunciabile universalismo etico, con la fede in pochi valori non negoziabili e indiscutibili, fondamento di ogni umanità e società civile, quali ad esempio l'uguaglianza di diritti indipendentemente dall'identità etnica, religiosa e sessuale. Le leggi degli dèi di Antigone, pochissimi irrinunciabili principi, possono anche non essere scritte, come nella tragedia di Sofocle, ma sono incancellabili.



Hammurabi amministra la giustizia (stela al Louvre, Parigi)



L'imperatore Giustiniano col seguito (mosaico nella Basilica di San Vitale, Ravenna)



Emanazione dell'Editto di Rotari (miniatura su manoscritto)

L'utopia e le sue mappe ¹⁶⁴

Negli ultimi secoli, studiosi, filosofi e sognatori idealizzano un mondo migliore che descrivono, oltre che nei libri, anche in mappe, il più possibile attraenti. Oggi i tipi e la qualità delle mappe di qualsiasi foggia permettono di affrontare quasi ogni tipo di richiesta, ad esempio, nel campo dei rischi sismici, idrogeologici ed ambientali. Inoltre un adeguato supporto cartografico serve a guidare lo sfruttamento delle risorse naturali, reali o presunte, come pure nel campo delle applicazioni sociali (mutamenti sociali, siccità, carestie, epidemie, ecc.).

La Geomatica, i geodati e la geoinformazione possono dare un importante contributo a molte attività umane, al contrario, possono terribilmente sostenere, in modo molto sofisticato, l'escalation degli eserciti, delle guerre e delle distruzioni, producendo effetti negativi, ad alta intensità e su grandi estensioni. Infatti la scienza e la tecnica non possono essere isolate da tutto il contesto della vita umana, ma dovrebbero positivamente svolgere un ruolo fondamentale nel mondo reale. La promozione di un uso pacifico di tecnologie, mature e innovative, al fine di ottenere benefici sociali, economici e culturali concreti, per tutte le persone, aumenta sicuramente la qualità della loro vita, ad uno standard di alto livello.

In questo contesto, una corretta informazione passa anche attraverso un uso diverso della Cartografia, ad esempio, concepita come nell'Atlante del geografo Arno Peters (edito nel 1980, nel quadro della relazione di Willy Brandt sul Rapporto Nord-Sud). Infatti il campo del Trattamento delle Osservazioni incontra il regno delle Scienze Umane, attraverso la condivisione di competenze ed imparando gli uni dagli altri e viceversa. Tutto ciò è particolarmente rilevante in Geomatica, dove immagini, mappe e modelli 3D sono trattati non solo per essere modellati e calcolati, ma anche per essere interpretati e compresi. In questa ambito, la Linguistica (con lo studio della struttura grammaticale, della *pattern recognition* e dell'analisi sintattica), le tecniche di comunicazione, la Psicologia (ad esempio, con la teoria della *Gestalt*) e la Filosofia della Scienza (che forma un ponte tra l'Epistemologia e la Storia della Scienza e della Tecnica) contribuiscono a formare importanti strumenti cognitivi.

D'altra parte, le discipline del rilevamento e, in particolare, la Fotogrammetria, il Telerilevamento ed i GIS, possono dare un contributo molto importante a sostegno di molte attività umane, pur potendo invece essere utilizzate in modo negativo. Infatti lo sviluppo della scienza e della tecnica deve prendere in considerazione la vita umana e svolgere positivamente un ruolo fondamentale nel mondo reale, cosicché un uso pacifico delle tecnologie sia sempre fortemente incoraggiato; garantendo alti standard di qualità per tutto il genere umano.

La città di Dio

Mappa di Ebstor del 1235 ¹⁶⁵ descrive il mondo come una costruzione circolare, integrando elementi biblici e classici (Fig.1). Il mondo è piccolo: tutto al di fuori dell'Europa e di parte del Nord Africa e del Medio Oriente è *Terra incognita*. La maggior parte delle mappe hanno una forma "T-O": una "O" indica l'anello esterno delle acque dell'Oceano che racchiude le terre, mentre una "T" è la forma generale dei tre continenti, assegnati ai tre figli di Noè. In alto, l'Asia è rappresentata, come la massa di terra principale: convenzionalmente ad est, si trova invece nella parte alta della mappa, dove normalmente è posto il Nord. Da qualche parte, in questa

¹⁶⁴ Questo paragrafo è una libera traduzione di quanto già esposto in: Bellone T., Mussio L. (2010): Utopia and its maps. Gi4DM 2010 Conference *Geomatics for Crisis Management*, Torino, p. CVI,6. A riguardo, si noti la quasi obbligatorietà della libertà del traduttore, essendo invece una traduzione letterale, quasi certamente, una cattiva traduzione, perché tradurre è interpretare e non ricopiare.

¹⁶⁵ Attualmente la mappa di Ebstor è documentabile solo attraverso alcune fotografie, essendo andata distrutta nel 1943, durante la seconda guerra mondiale.

terra, è posto l'Eden da cui sgorgarono i quattro principali fiumi: Nilo, Gange, Tigri ed Eufrate ¹⁶⁶. La parte inferiore della mappa mostra l'Europa e l'Africa: compatibilmente con lo spazio disponibile, ovviamente molto più ricca di particolari in Europa che in Africa, in quanto solo il suo bordo Mediterraneo è adeguatamente conosciuto, mentre il resto del continente è in realtà vuoto, essendo *Terra incognita*.

Questo tipo di mappe è chiaramente legato anche alle opinioni di Agostino di Ippona sulla Città di Dio: evidentemente la volontà di Dio ha posto i cristiani al centro di Oekoumene, mentre popoli non cristiani sono relegati in spazi esterni (al confine del mondo non umano, accanto ai mostri che, con effetti brillanti e decorativi, coprono i margini delle mappe). Di conseguenza, una transizione graduale fa passare dalla piena umanità dei cristiani alle popolazioni che possono aspettarsi in un futuro, più o meno prossimo, di diventare cristiani, ad una fascia esterna di popoli selvaggi (posti all'estremo sud od all'estremo nord, per finire con altri esseri, i mostri per i quali non può essere previsto un destino migliore).

Una strana, ma interessante, vicinanza intellettuale tra il *mandala* tradizionale della civiltà tibetana e le prime mappe di tradizione occidentale: entrambi sono una vera e completa *imago mundi*, che è insieme molto minore e molto di più di quello che significa oggi una mappa, per l'uso comune. L'Antico ed il Nuovo Testamento contengono poche implicazioni dottrinali per la geografia: un mondo composto da tre continenti interconnessi, popolati dai discendenti dei tre figli di Noè. Agli occhi di alcuni (ma non tutti) i teologi, un quarto continente (eventuale), sito agli antipodi, sarebbe implicitamente abitato da un'altra umanità cui negare la discendenza da Noè, cosicché la sua rappresentazione è ritenuta eretica da questi teologi. La maggior parte dei cartografi medievali sembra aver accettato questo vincolo, ma le mappe del mondo che mostrano quattro continenti non sono rare: in particolare le mappe del mondo create da Beato di Liébana, alla fine del VIII secolo.

Due secoli più tardi, Isidoro di Siviglia lega anche la mostruosità alla marginalità geografica: per lui, i discendenti di Cam sono condannati ad essere servi dei discendenti di Sem e Japhet. Sia la mappa di Ebstorf (1235) che la carta di Isidoro (1472) rappresentano la concezione di Marco Polo e Odorico da Pordenone, i più famosi viaggiatori della loro età. Marco Polo ed Odorico vengono dalla stessa cultura e le loro opinioni sono simili: entrambi giudicano l'"Altro" dal centro europeo. Odorico dice: "... gli uomini e le donne hanno facce come cani ...", e Marco Polo, a sua volta: ".. gli abitanti sono una razza selvaggia, con teste, occhi e denti simili a quelli della specie canina ...".

Un grande mito classico è l'Atlantide da Platone che descrive un mondo ideale, perduto da qualche parte nell'Atlantico, ma non troppo lontano da ricercare. Mito cristiano tipico medievale, dall'altro lato, con la ricerca di obiettivi più spirituali: il viaggio di San Brendano, la ricerca al nord di eremi (in Islanda ed oltre), le Isole di Avalon ed i miti legati di Re Artù e dei cavalieri della Tavola rotonda. Questa vasta famiglia di leggende della costa atlantica dell'Europa occidentale è, a sua volta, cristianizzata ed elevata al rango della ricerca del Paradiso in Terra. Esiste anche un terzo polo, ovvero un polo sconosciuto: a partire dalla consapevolezza che il mondo classico ha circa l'India e la Cina (regni di fantasia e della realtà), la terra della diversità diventa la terra dell'Altro.

I viaggiatori medievali, mercanti e monaci, che in tempi di particolare pace e prosperità, vanno a piazzarsi in Oriente e tornano, danno un importante contributo alla conoscenza di queste diverse realtà. Tuttavia il

¹⁶⁶ Piuttosto curiosa e singolare è la collocazione unica delle sorgenti dei quattro fiumi, in realtà, lontanissime tra loro (tranne per il Tigri e l'Eufrate, entrambi mesopotamici). D'altronde, altrettanto curiosa e singolare è la scelta del Gange che è un fiume dell'India, insieme all'Indo ed al Brahmaputra (oltretutto provenendo dalla regione iraniana, come è per la spedizione di Alessandro Magno, non è neppure il primo incontrato che è invece l'Indo). Una lettura biblica, più recente, sostituisce al Gange il Giordano che tuttavia è un piccolo fiume della Palestina che sfocia nel Mar Morto (un mare chiuso, sito in una depressione terrestre, a 415 metri sotto il livello del mare).

contatto non è continuativo e la leggenda prevale sulla realtà: così alla fine del XV secolo, la nuova generazione di navigatori appare spesso alquanto confusa circa le finalità della ricerca. Ad esempio, Cristoforo Colombo è sicuro di essere sulla strada per Catai (l'odierna Cina), ma non rifiuta l'idea di aver personalmente visto l'immenso torrente che scende dalle montagne del Paradiso (che è invece il delta dell'Orinoco, un fiume dell'America latina). D'altra parte, anche nell'antica civiltà del Messico precolombiano, un vecchio mito racconta di una terra originale nel Pacifico orientale il cui nome è *Aztlan*.

Il nuovo mondo

La Città di Dio ha un certo numero di caratteristiche proprie di tutte le utopie: la regolarità nello schema, simboli precisi e materiali preziosi. Nelle utopie emesse dopo il Rinascimento, l'ordine messo a punto è sia morale, sia politico. L'ordine finale della società coincide con l'armonia della natura e la gerarchia dei Cieli, perché questo è l'ordine generale dell'Universo, nello spazio e nello spirito. La scoperta e la colonizzazione del Nuovo Mondo (*Novus Mundus*, nel latino dei dotti dell'epoca), distrugge la cartografia medievale.

Amerigo Vespucci rileva che le terre sub-equatoriali sono piene di gente. Inoltre al contrario di ciò che gli antichi studiosi affermano, in realtà, il caldo estremo è moderato da una brezza oceanica continua che rende il clima molto piacevole; così l'esperienza concreta vale più dell'opinione, a lungo rispettata degli antichi filosofi e teologi. "Ho trovato un nuovo continente ... e ideato per chiamarlo *Mundus Novus*", nelle sue due (o quattro) lettere, Vespucci si chiede molto sullo stile di vita dei nativi che non hanno Dio, nessun re, nessuna legge, nessuna proprietà, senza regole per la vita di tutti i giorni, nessun timore e vivono in perfetto stato di natura.

opinioni hanno un peso immediato nel dibattito intellettuale, ricco e fecondo del tempo; così, Tommaso Moro introduce, nella sua Utopia, accenni a quello che dice Vespucci. Raphael Itloideo, il marinaio portoghese, che dovrebbe essere uno dei ventiquattro compagni di vela di Vespucci, cioè l'uomo che sviluppa il racconto del viaggio ad Utopia, è chiaramente ispirato alla società egualitaria, descritta da Vespucci.

L'isola di Utopia è, allo stesso tempo ed ovviamente, un luogo inesistente ed il luogo della felicità. Inoltre sono da citare alcuni tentativi sociali, alla luce di Utopia, che Bartolomé de Las Casas conduce, a Cumana (nell'attuale Venezuela), con una colonizzazione, ad opera di civili privati e monaci spagnoli, con indiani locali, nonché le *Misiones* del Paraguay che, su scala di successo molto più grande, organizzano ampie regioni, per quanto permesso dalla civiltà di allora, in vista della fondazione di un nuovo tipo di civiltà in cui gli indiani siano la componente essenziale. Bartolomé de Las Casas riconosce l'umanità dell'Altro, con una posizione molto difficile, per un europeo del suo secolo (ed anche, molto spesso, dell'attuale).

Garcilaso de la Vegas, figlio di un capitano spagnolo e della principessa Chimpu Ocllo (cugina di Atahualpa, ultimo re degli Incas), è un importante *trait-d'union* tra gli spagnoli e la cultura incaica, per la prima volta, dopo la distruzione della civiltà andina. La sua influenza sulle visioni filosofiche e sociologiche allora contemporanee è notevole. In particolare, la visione idealizzata di Cuzco, la fortezza-capitale, posta in alto, sulle Ande, con la sua apparente perfezione, sia nella struttura fisica che l'organizzazione, è impressionante per gli studiosi europei del XVI e del XVII secolo.

Le antiche società americane hanno un punto di vista diverso da quello del mondo contemporaneo europeo; infatti lo spazio ed il tempo sono così strettamente legati che una mappa ed un almanacco-calendario sono addirittura la stessa cosa. D'altra parte, proprio in quel tempo, le mappe del mondo diventano più vicine a

quelle ora in uso, a causa del numero e della capacità dei cartografi, e dell'urgente necessità di una rappresentazione utilizzabile per il mondo intero.

Un grande lavoro è raccolto, in quantità e in qualità, alla scuola di Lisbona. Contemporaneamente la proiezione di Mercatore, un matematico e cartografo fiammingo, è originariamente inventata per permettere una facile navigazione, in quanto possiede una proprietà fondamentale: una linea retta tracciata sulla superficie piana della carta di Mercatore raffigura una linea lossodromica e così gli angoli possono essere immediatamente trasferiti dal grafico alla superficie terrestre, imponendo una direzione costante al timone delle navi ¹⁶⁷.

L'utopia, sulla scena letteraria, è chiaramente legata all'idea del viaggio; così nell'epoca delle scoperte geografiche, Giordano Bruno apre ad una visione di spazi infiniti, con mondi illimitati, andando oltre i limiti del mondo classico e cristiano, rigorosamente strutturato, a livello gerarchico.

La città delle scienze ¹⁶⁸

Nel lavoro di Tommaso Campanella, due persone stanno litigando: un marinaio, tornato da una delle spedizioni di Colombo, ed un Cavaliere di Malta. Il primo descrive il suo viaggio intorno al mondo e la sua permanenza presso il Comune di Sole, collocato in qualche parte nel mare di Sunda. In questa isola, i Bragmans hanno plasmato una società dove tutto è in comune, anche la scienza ed il gioco. Il disegno urbano ricorda la città ideale del Rinascimento e Campanella è un progettista che si fida di un futuro tecnico. Infatti Campanella prevede alcune evoluzioni spettacolari della conoscenza umana, come la propulsione meccanica delle navi ed anche il volo. Inoltre Campanella non trascura anche l'evoluzione sociale, così egli dice che ognuno deve fare ciò che è più adatto per lui, per far ottenere a tutti il miglior risultato (del resto, anche Carlo Marx, molto più tardi, dice qualcosa di simile).

, Nella Nuova Atlantide di Francesco Bacone (che compare tuttavia solo dopo la morte di questi), alcuni viaggiatori raggiungono sulla rotta dal Perù alla Cina, l'isola di Bensalem (il Figlio della pace). Qui la vita scorre sul modello di un'accademia che avrebbe potuto influenzare la successiva fondazione della *Royal Society* britannica. Secondo Bacone, la conoscenza, rivolta al progresso dell'umanità, non può essere un possesso di pochi; al contrario, la più ampia cooperazione e la più grande diffusione delle conoscenze sono necessarie per il bene dell'uomo. La fondazione della *Royal Society* britannica, ad opera di Carlo II (1662), e l'istituzione dell'Osservatorio di Greenwich (1676), sono entrambi legati agli interessi dell'alta classe dirigente dell'Inghilterra dell'epoca. Tuttavia accanto gli utopisti, esistono anche gli anti-utopisti (od utopisti negativi) di cui Jonathan Swift è il più noto. Nei suoi viaggi di Gulliver, Swift escogita una società diversa in cui una razza di cavalli (*Houyhnhm*) domina gli uomini (*Yahoo*), solo per la qualità del loro ragionare e non per le loro passioni.

Resta comunque da ricordare che il progresso nella conoscenza geografica del mondo segue abbastanza regolarmente gli esploratori provenienti dall'Europa e, più precisamente, i mercanti e gli eserciti. L'Europa prima conquista paesi e li saccheggia, poi offre/impone il Cristianesimo (quasi sempre in forma coercitiva) e la sua "civiltà" ai popoli con cui viene a contatto, a condizione che abbiano risorse interessanti, altrimenti lasciandoli soli e depredati.

¹⁶⁷ La linea lossodromica è più lunga della linea geodetica (avente minima distanza), ma questa seconda richiede continue correzioni di rotta ed è di difficile individuazione, specialmente quando non è facile, né tantomeno immediato, determinare la longitudine di un punto.

¹⁶⁸ A riguardo, si veda anche: Castoriadis C. (1995): L'istituzione immaginaria della società. Bollati Boringhieri, Torino. Inoltre: Russo L. (2013): L'America dimenticata – I rapporti tra le civiltà e un errore di Tolomeo. Mondadori, Milano.

Nel XVII secolo, un' controversia importante geografica dibatte sulla forma reale del mondo (se schiacciata ai poli od allungata all'equatore). Il risultato è la misura di un arco di meridiano sul lago Inari (in Finlandia) e sull'altopiano dell'Ecuador, promossa da Giovanni Domenico Cassini e Charles Marie de La Condamine. Un risultato indiretto, ma molto importante è la determinazione del metro campione che è poi destinato a diventare un grande simbolo del pensiero universale (quasi una metafora della Ragione della Rivoluzione francese).

Lo sviluppo della Geografia, come conseguenza di migliori metodi di mappatura, ed il crescente numero di viaggiatori che esplorano tutto ciò che rimane da esplorare nel mondo, promuovono un nuovo tipo di utopisti, coloro che sognano sopra l'esistente, più che sulla fantasia . Un esempio particolare è Charles Fourier, conosciuto come un sognatore su mappe, a supporto e per il miglioramento del benessere sociale. Anche Pëtr Alekseevič Kropotkin e Jacques Élisée Reclus, viaggiatori e geografi, entrambi hanno uno spirito di base anarchico, fiducioso nel futuro del genere umano, con grandi speranze sullo stato di avanzamento delle conoscenze, scienze e tecniche.

Kropotkin prende parte alla compilazione di una monumentale opera di Reclus (*Géographie universelle*, in ben undici volumi). Questo lavoro segna la nascita ufficiale della geografia moderna ed è profondamente interconnesso con la nuova filosofia politica, dedicata ad un universo di fratellanza. Nella sua giovinezza, Reclus lavora in Nueva Grenada (nell'attuale Colombia) e forse lì è influenzato da vecchi ricordi di *Reducciones*, presenti anche in passato in quella zona.

La concezione della libertà, secondo Reclus, si estende al di là della politica, in altri campi, compreso quello economico. Pierre-Joseph Proudhon prevede il controllo pubblico delle ferrovie, un'idea attuata sempre di più nel secolo successivo, essendo chiaro il collegamento tra i servizi pubblici, la democrazia ed il progresso. A metà del XIX secolo, l'idealismo degli anarchici è "catturato" dai prestatori di servizi di rete, prima ferroviari e poi coinvolgenti il sistema dell'energia. Per contro, parla D-503, nel romanzo "Noi" di Evgenij Ivanovič Zamjatin (1920):

In 120 giorni Integral primo sarà pronto per il lancio nello spazio interplanetario ...

Infatti sullo sfondo, sia di Herbert Wells (1866-1946), socialista, pacifista ed autore di apprezzati romanzi di fantascienza, sia Zamjatin, un ingegnere navale che, con il fantastico, sviluppa aspetti anti-utopici della letteratura russa, il Moloch, cioè il sogno che una sorta di macchina, per quanto complessa, risolva tutti i problemi della società umana, prospetta un futuro meccanico e totalitario.

Su una base sociale, culturale e psicologica, molto diversa, Aldous Huxley (*The Brave New World*, 1932) torna al tema del futuro, introdotto da Zamjatin: non è così drammatico, come Zamjatin lo vede, ma è altrettanto mal promettente. Ancora peggio, negli anni della seconda guerra mondiale che portano alle orribili delusioni di WW2, è il futuro prossimo, previsto infine da George Orwell ("1984"): una tomba tecnologica che annienti tutte le speranze del genere umano.

Controllo di qualità

La proiezione di Mercatore è adatta a conservare angoli, essendo conforme, ma ovviamente non conserva le aree (non potendo essere contemporaneamente equivalente) e così alcune regioni della Terra sono molto deformate. Le carenze, nell'utilizzo della proiezione di Mercatore per le carte tematiche del mondo sono ormai note. Un'informazione corretta passa invece attraverso una cartografia equivalente, diversamente

concepita, come l'atlante di Arno Peters, un geografo che disegna una rappresentazione non convenzionale della superficie terrestre. Infatti egli ha diviso l'intero globo terrestre in sessanta aree uguali di superficie, dove sono, più o meno intense, le attività umane. Il suo scopo principale è quello di eliminare la normale immagine eurocentrica del mondo degli atlanti comuni, mettendo così in un confronto, il più possibile oggettivo, tutte le parti del mondo.

Infatti la visione del mondo di Mercatore è così familiare agli occhi degli occidentali che la sua mappa è molto spesso impiegata semplicemente per rappresentare ciò che è vero e naturale. Tuttavia questa idea di vero e naturale è falsa e risulta essere il frutto della tradizione e dell'etnocentrismo europeo. Tre importanti dettagli mostrano le origini e le implicazioni ideologiche della mappa: l'Europa è al centro di questa carta; la mappa è orientata verso nord (in modo che si guarda subito in su all'Europa e all'America del Nord e solo poi in giù all'Africa, all'America latina ed all'India ¹⁶⁹) e le dimensioni relative di paesi e continenti sono molto alterate: ad esempio, la Groenlandia e l'Europa sono rappresentate più grandi di quello che sono, mentre l'Africa e l'America latina come più piccole.

L'approccio opposto è utile, proprio quando si vogliono sottolineare le differenze di situazione o l'utilizzo delle diverse aree, vicine o no. A riguardo, sono state sviluppate anche nuove famiglie di carte, per le quali sono disponibili tecniche cartografiche che possono salvare la forma reale e la reciproca vicinanza delle parti nelle quali è possibile intervenire su un parametro in esame, effettuando un ingrandimento od una riduzione delle aree interessate. Ad esempio, con questo nuovo approccio, si possono vedere subito le grandi differenze per una vasta gamma di dati in diverse società e paesi (in particolare, tenuto conto del consumo pro-capite di energia, l'Olanda sembra molto più grande dell'India o del Messico).

Questo tipo di mappatura è il risultato di un ambiente culturale e politico, pieno di speranze. Un primo passo, per una organizzazione non politica della società umana, è la fondazione dell'UNESCO (1946) il cui primo direttore generale, Julian Sorell Huxley è il fondatore del WWF. Un altro passo può essere considerata la Conferenza di Bandung (1955), dove con alcuni politici di spicco del tempo (tra cui l'indiano Pandit Nehru, lo jugoslavo Josip Broz Tito, l'indonesiano Kusno Sosrodihardjo detto Sukarno ed il ghanese Osagyefo pseudonimo di Kusno Sosrodihardjo), si delinea un mondo con una terza forza non-allineata, intesa come equilibrio tra i due blocchi. Purtroppo, i decenni successivi non confermano queste speranze e, in realtà, le Conferenze di Nuova Delhi (1976) e Belgrado (1980) riconoscono che la circolazione delle informazioni, scientifiche e sociali, lungi dal diventare più libera, è sempre più nelle mani del potere reale nel mondo, molto ristretto.

Che fare? ¹⁷⁰

Norbert Wiener, nel libro *Cibernetica* (1946), modella il collegamento tra i bisogni sociali e le informazioni, nella speranza che una società razionale permetta di evitare gli orrori di una nuova guerra. A questo scopo, Wiener prevede un controllo pubblico delle informazioni in tutte le fasi, dall'acquisizione alla trasmissione, fino al loro utilizzo.

"Il centro è ovunque, la periferia è nulla": così anarco-geografi, come Reclus e Kropotkin, definiscono lo stato del mondo, unico nella diversità, non approvando una concezione, nello stesso tempo, lineare e troppo

¹⁶⁹ Nel margine destro, sono poi rappresentati l'est asiatico e l'Oceania, spesso rappresentata solo in parte.

¹⁷⁰ *Che fare?* è anche il titolo di un famoso lavoro programmatico di Lenin, pseudonimo di Vladimir Il'ič Ul'janov, abile uomo politico russo (ma discutibile filosofo). Per contro ben più discutibili anche sul piano politico sono i suoi eredi: Trotsky, pseudonimo di Lev Davidovič Bronštejn, nome tutelare di tutte le rivoluzioni fallite latino-americane, e soprattutto Stalin, pseudonimo di Iosif Vissarionovič Džugašvili, padre fondatore del totalitarismo sovietico.

semplice, formalizzata nella sequenza: occidentalizzazione – modernizzazione, per lo sviluppo ed un sicuro progresso.

Le informazioni all'interno dei Sistemi Informativi (a referenza spaziale e non), sono pienamente compatibili con il disegno proposto; infatti in realtà, i Sistemi Informativi possono essere presi come una parte dei mezzi di comunicazione universali. Nella civiltà post-moderna, un dato rilevante è lo sviluppo di reti che sono la naturale evoluzione delle ferrovie del XIX secolo e delle autostrade del XX secolo. In questo modo, il www di Internet non è semplicemente un *software*, ma un elemento culturale attivo.

Il tempo attuale non è in grado di riporre la propria fiducia nei sogni degli utopisti, perché ha vissuto le degenerazioni di tutte le ideologie e, come dice Bertrand Russell, uno strano senso di lutto porta tutti quanti a piangere come se avessero perso qualcosa, per sempre.

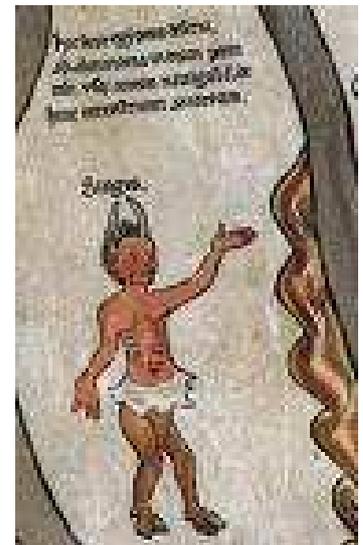
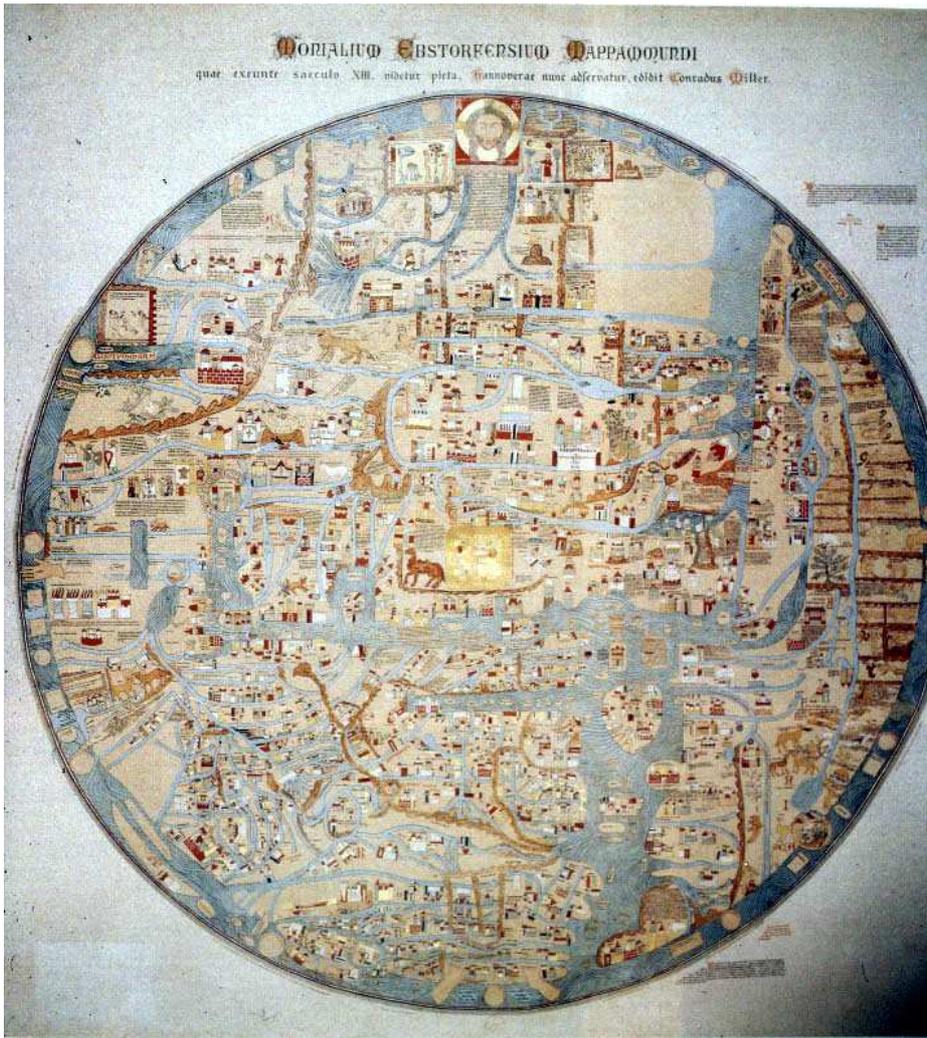
È davvero così? La comunità globale si basa su principi gerarchici del mercato ed atteggiamenti manageriali. I top-decisoristi celebrano i loro diritti in occasione di eventi speciali, come i Forum a Davos e simili. La cosiddetta cultura della comunità di business globale ha plasmato nuovi termini fantasiosi, come *techno-globalismo*, *marketing immaginazione* e così via, per sostenere la vera, enorme e travolgente forza dei suoi interessi.

In questo quadro, anche la cultura, nel senso normale del termine, è etichettata con un preciso valore di mercato, perché tutto ha un valore monetario, dall'acqua da bere all'accesso alle forme più alte della creatività umana. Infatti il backstage di *Techno-utopia* è quasi pronto per utilizzare il concetto di controllo totale, venduto come sicurezza. L'ordine liberista globale si afferma come il migliore dei mondi possibili, imponendo la propria utopia mercato-liberista: occorre applicare il mercato anche ai diritti umani ed il mondo sarà perfetto.

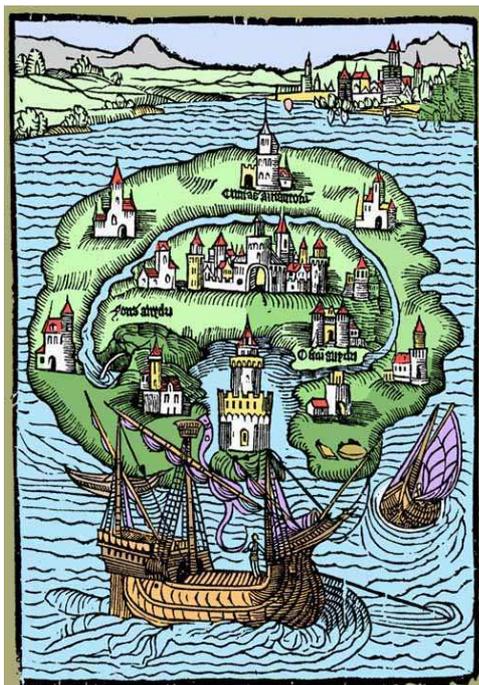
In tempi molto recenti (In difesa di cause perse), lo psicoanalista lacaniano e filosofo Slavoj Žižek constata che i problemi ecologici, nuove forme di apartheid (come i muri ed i bassifondi), la pressione per la privatizzazione della creatività intellettuale e la privatizzazione di risorse di base naturali (come l'acqua, i minerali, il legno, il DNA umano, ecc.) sono i grandi mostri del futuro immediato. L'enorme crescita delle immense baraccopoli, ai margini di mega-città, specialmente, nel Terzo Mondo, ma non solo, spinge gli sfollati provenienti da paesi devastati, i disoccupati, un numero crescente di lavoratori marginali e la grande varietà di poveri di questo tempo presente, verso modi intollerabili di vita, e crea le premesse per disturbi immensi, già nel prossimo futuro.

Tuttavia questo mondo moderno possiede risorse sufficienti per far fronte a questi problemi. Infatti in realtà, si ha ora una conoscenza abbastanza precisa delle risorse mondiali e dei loro limiti, e questo accade per la prima volta nella storia. Una buona dose dei problemi attuali e della loro apparente impossibilità per una soluzione tempestiva, è l'integrazione impetuosa delle povere nazioni nel mondo dell'economia globale che sembra averle danneggiate più che essere d'utile uso. Solo un esempio: in molti paesi che dipendono essenzialmente dell'agricoltura, un numero limitato di imprese multinazionali sta cercando di acquisire i diritti formali (che significa un diritto di vendere) sui semi e sull'acqua piovana.

Come dice il filosofo della scienza Giulio Giorello, nonostante l'evidente mancanza di successo delle utopie finora testate, ancora un ampio spazio di speranza sta davanti a tutti. Lo stesso spirito incoercibile di libertà è vivo, nella ricerca scientifica come nella utopia sociale; questo è lo stesso spirito degli eroici furori e degli infiniti mondi di Giordano Bruno, una vittima dell'oscurantismo e dell'intolleranza, ed un martire del libero pensiero, per il quale l'arte di cercare vale più del vero successo.



La mappa di Ebstorf ed un suo dettaglio



L'isola di Utopia di Tommaso Moro



Un petroglifo del Perù

La Geomatica degli animali intelligenti

L'esistenza di livelli via, via più elevati dell'intelligenza animale è un dato acquisito, da tempo, come mostrato da alcuni mammiferi (le scimmie antropomorfe, altri primati, le proscimmie, i carnivori, gli equini, l'elefante ed i mammiferi marini) e da pochi uccelli (i pappagalli, i rapaci ed i corvidi). In particolare, parecchie scimmie antropomorfe manifestano comportamenti prossimi a quelli elementari umani e sicuramente a quelli degli ominidi. Infatti a partire dalle mamme che coccolano i loro piccoli (andando oltre il semplice accudire che invece è proprio di tutti i mammiferi e di tutti gli uccelli), per poi passare alle femmine che insegnano ai piccoli a distinguere le erbe commestibili da quelle velenose ed arrivare ai maschi adulti che difendono il branco, dagli assalti dei carnivori, con i bastoni, tutto ciò è una prova provata d'intelligenza.

Entrando nei dettagli, la raccolta del cibo dagli alberi, integrata da piccoli animali (ad esempio, insetti), è già un modo di produzione e l'insegnamento ai piccoli, nonché la difesa del branco, sono un primo abbozzo di società. Queste considerazioni spingono a cercare anche una Geomatica degli animali più intelligenti; infatti la Geomatica ha sicuramente due origini distinte. Una nobilissima è quella dalla Geodesia, a sua volta discendente dall'Astronomia e coeva della Matematica, come già detto in precedenza. L'altra eminentemente pratica viene dall'agrimensura ed è tuttora presente nella Topografia elementare. Infatti mentre, nell'antichità, grandi insediamenti, grandi edifici e le canalizzazioni hanno importanti echi geodetici ed astronomici, le centuriazioni ed il tracciamento delle strade rispondono solo ad esigenze spicciole locali.



Femmina di scimpanzé che coccola i suoi piccoli

Proprio questa seconda considerazione ed il riconoscimento dell'intelligenza animale invitano a ricercare una Geomatica degli animali più intelligenti (anche come traccia di quella degli ominidi). Infatti se la produzione di un bastone è un modo di produzione (ad esempio, per farne un'arma o per la pesca) ed il bastone è usato per misurare la profondità di un guado, questa misura di un'altezza è sicuramente Geomatica degli animali più intelligenti. Inoltre avendo osservato scimmie antropomorfe proteggersi dalla pioggia, mediante intrecci di foglie, anche questa misura (diretta) di una superficie è certamente Geomatica degli animali più intelligenti. Infine se la separazione delle sementi da fango e terriccio avviene per il galleggiamento delle prime, contro l'affossamento dei secondi, ancora questa misura di peso/volume è Geomatica degli animali più intelligenti.

D'altra parte, proprio la Geomatica più semplice è essenziale in quasi tutte le forme quotidiane dei modi di produzione e delle strutture costitutive delle società. In questo modo, la Geomatica di "rango maggiore" è un ritrovato, scientifico e tecnologico, che ha richiesto studi approfonditi e tuttora ne richiede di nuovi. Invece la Geomatica più semplice ha segnato il lungo cammino che va dalle scimmie antropomorfe all'uomo moderno, insieme ad altre tecniche, come gli strumenti (il fuoco, l'aratro, la ruota, il carro, il mulino, ecc.), le lavorazioni (delle pelli, con la tessitura, del legno, delle pietre, dei materiali ceramici e dei metalli) e la domesticazione (degli animali e delle piante). E forse proprio la Geomatica più semplice ha suggerito di guardare in alto e più lontano, facendo nascere l'Astronomia, la Geodesia, con la Cartografia, e la Geomatica di "rango maggiore".



Scimpanzé che prepara un bastone



Orango che pesca con un bastone



Orango che misura la profondità di un guado



Gorilla che controlla la profondità di un fiume



Scimpanzé con un copricapo parapioggia

La Geomatica nella cultura dei popoli

La cultura dei popoli è varia e diversificata, ma può essere classificata per grandi raggruppamenti ¹⁷¹, anche se questa classificazione è molto rozza ed approssimativa ¹⁷². Tuttavia essa permette di restringere quanto segue ad un solo esempio della cultura europea, modellata sul cristianesimo che sicuramente ha ripreso e fuso elementi delle religioni precedenti (comprese quelle nordafricane e medio orientali, fino alle sintesi preislamiche, ellenistica e bizantina), insieme a miti e riti, come pure a saghe e leggende, dei popoli senza storia (celtici, germanici, slavi e mongoli) che via, via hanno costruito l'Europa, a partire da quella greca e latina. Infatti l'esempio presentato è la descrizione dello spazio del presepe, con i tanti "personaggi" che lo popolano (e che vanno ben oltre le persone).

Può sembrare strano che coloro che scrivono, agnostici dichiarati (rispettivamente già per formazione e per scelta personale), prestino attenzione ad un tema religioso: il presepe. Invece questo è stato recentemente il tema di un interessantissimo seminario, al Politecnico di Milano, nell'ambito dei seminari *effediesse = f(s)*, promossi dal Laboratorio di Formazione Matematica e di Sperimentazione Scientifica, del Dipartimento di Matematica. Infatti il seminario sul presepe ha preso origine da un'approfondita disamina del suo contesto, storico e culturale, per arrivare alla descrizione del suo originalissimo spazio, formato da tanti personaggi e dimostrando che il presepe si situa proprio in un chiaro contesto europeo, come mostrano, ad esempio, i suoi personaggi (europei e non medio orientali), gli edifici, gli alberi, la neve, ecc.



Fin qui, l'introduzione al tema ed il resoconto del suddetto seminario da cui (per gentile concessione del suo relatore, arch. Luigi Cocchiarella) l'immagine presentata e, proprio dalla lettura di quest'immagine, si ricava un'interpretazione possibile della Geomatica del presepe. Infatti se si contano i personaggi presenti, sono 33,

¹⁷¹ Una possibile classificazione dei principali raggruppamenti evidenzia culture:

- europee, estese a quelle aree dove il colonialismo ha distrutto, quasi del tutto, le culture precedenti, in particolare, con riferimento al Nord ed al Sud America, ed all'Australia.
- islamiche, dal nord Africa, per tutto il Medio Oriente e l'Asia centrale, fino ai confini dell'India;
- africane, limitatamente all'Africa sub-sahariana;
- indiane, estese alle regioni circostanti;
- cinesi, coreane e giapponesi;
- sub-asiatiche;
- polinesiane.

¹⁷² Ad esempio, mancano qui le culture amerinde residue (indiane al nord ed indio al sud dell'America), quelle esquimesi (nelle regioni artiche) e quelle māore (neozelandesi).

come gli anni di Gesù, all'epoca della sua morte. Tuttavia questo accostamento sembra banale, perché il presepe parla della sua nascita e, poi soprattutto, perché la collocazione spaziale dei suoi tanti personaggi merita un'analisi più approfondita. D'altra parte, messo al centro Gesù, è facile riconoscere un primo gruppo essenziale alla costituzione del presepe, un secondo gruppo complementare, celeste e terreno, ed un terzo gruppo accessorio che riempie tutto lo spazio.

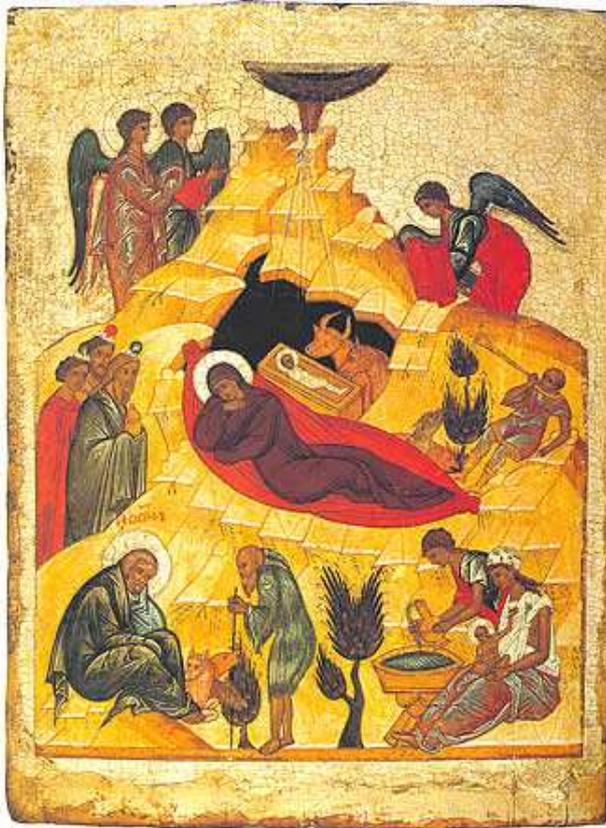
- ❑ Il primo gruppo è costituito da 7 personaggi: i pastori, il bue, Maria, la stella cometa, Giuseppe, l'asino ed i magi che possono essere disposti sul tracciato della lettera alfa, giocando con la mitologia cristiana (ed ignorando l'intersezione: nella scrittura, comunque non un punto doppio, ma solo due punti sovrapposti), che può essere messa in corrispondenza biunivoca con una linea ¹⁷³ ed una retta (lungo la quale sono definibili 7 simmetrie lineari).
- ❑ Il secondo gruppo è costituito da altri 10 personaggi, in numero di 5 celesti: Santa Lucia, Babbo Natale, l'Eterno Padre, le schiere degli angeli e la Befana, ed in numero di 5 terreni: i suoni, le luci, la chiesa, il fuoco e l'acqua, che possono essere disposti sulla superficie di una lettera omega (qui resa 3D ¹⁷⁴), continuando a giocare con la mitologia cristiana, che può essere messa in corrispondenza biunivoca con una superficie ed un piano (sul quale sono definibili 17 simmetrie planari, bastando così notare che 17 è la somma del 7 precedente e del nuovo 10).
- ❑ Il terzo gruppo è costituito da ancora altri 15 personaggi: l'umanità, la meraviglia, l'adorazione, l'offerta, il dormiglione, il risveglio, le attività e gli animali (8), e poi: le abitazioni, le botteghe, il castello di Erode, l'osteria, l'albergo, la stalla e l'albero (7), che possono essere disposti, tra la linea dei personaggi essenziali e la superficie dei personaggi complementari, riempiendo tutto lo spazio compreso (nel quale sono definibili 32 simmetrie spaziali, con la restrizione cristallografica, bastando nuovamente notare che 32 è la somma del 17 appena precedente e del nuovissimo 15).



Giotto di Bondone, Natività di Gesù (affresco nella Cappella degli Scrovegni, Padova)

¹⁷³ Trattandosi di un problema solo topologico e non geometrico, la linea (e la lettera alfa) possono essere curve gobbe, permettendo così alla stella cometa di stare in alto.

¹⁷⁴ Trattandosi solo di un puro "gioco", intorno alla mitologia cristiana, è irrilevante l'aver qui inventato una lettera omega 3D.



Scuola di Andrej Rublev, Natività (icona)



Rembrandt, Sacra Famiglia con angeli (Museo dell'Ermitage, San Pietroburgo) ¹⁷⁵

¹⁷⁵ La scelta di tre dipinti, in tre aree diverse (il sud latino/cattolico, il nord continentale/riformato e l'est slavo/ortodosso) e di tre diversi periodi (il medioevo, gli albori del Rinascimento ed il secolo d'oro), serve a provare la tradizione del presepe, propriamente europea, con i suoi riferimenti ad una geometria euclidea (al più, con l'aggiunta della prospettiva) e, ove presente, ad un'astronomia ancora tolemaica.

La Geomatica per giocare (e riflettere)

E' ormai notissimo che lo sviluppo industriale e la sovrappopolazione stanno incidendo pesantemente sulla sostenibilità ambientale, a scala globale ed a lungo termine. Tutto ciò raccomanderebbe politiche ambientali e sociali di salvaguardia e tutela, o quantomeno di forte mitigazione, che ancora non sono attuate e sono fonte di aspri contrasti. Infatti acerrimo è il dibattito fra le nazioni sviluppate che, per prime, hanno beneficiato dei vantaggi dello sviluppo (quando ancora i problemi ambientali e sociali non apparivano nella loro attuale drammaticità), e le nazioni in via di sviluppo che, solo adesso, potrebbero iniziare a beneficiare degli stessi vantaggi (ma che sono messe di fronte alla drammaticità di questi problemi). Nel frattempo, i problemi si aggravano e l'avvio della loro soluzione si fa sempre più lontano.

Quanto segue è solo un gioco, con poche formule di geometria, di statistica e di astronomia. Infatti partendo dall'osservazione che la temperatura media della Terra è adesso di circa 15°C e, si teme che possa salire di un paio di gradi, nel corso del prossimo secolo, se si potesse far scendere gradatamente la temperatura media della Terra di circa tre gradi, si metterebbe la Terra in una situazione di relativa sicurezza. Allora constatando che la temperatura media del pianeta Venere è di circa 480°C e quella di Marte di circa 60 °C, al di sotto dello zero centigrado, e che le distanze medie dal Sole, per Venere, la Terra e Marte, sono all'incirca rispettivamente 108.2, 149.6 e 227.9 milioni di chilometri, non è difficile calcolare la distanza media della Terra dal Sole che le assicurerebbe una temperatura media di circa 12°C.

Pertanto assunta una parabola come legge che può collegare queste tre distanze medie alle tre temperature medie e calcolati, per interpolazione polinomiale, i tre coefficienti di questa funzione, si ottiene un distanza media di circa 152.35 milioni di chilometri e, in base alla terza legge di Keplero (che lega proporzionalmente i quadrati dei tempi di rivoluzione ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite ellittiche, come pure ai raggi delle orbite approssimativamente circolari), il nuovo anno terrestre risulterebbe di circa 375 giorni. Ovviamente restano del tutto aperti i problemi di come produrre/ottenere un spostamento dell'orbita terrestre, pari ad un incremento del raggio medio di quasi tre milioni di chilometri (che è oltre sette volte la distanza tra la Terra e la luna), e quali conseguenze questo cambio, di posizione e del periodo, abbia sul ciclo vitale delle stagioni.



Donato Bramante, Eratolito e Democrito (Pinacoteca di Brera, Milano)

A questo punto il gioco numerico è terminato ¹⁷⁶, mentre restano tutti quanti i problemi ambientali e sociali che, come già detto in precedenza, sono anche e forse soprattutto problemi politici, di difficilissima soluzione. Così il frammento di affresco strappato di Donato Bramante che illustra un dibattito scientifico, tra Eraclito e Democrito, rispettivamente i padri del divenire e dell'atomismo, nel mondo antico della Grecia classica (a sua volta, prodotto in un'epoca compresa tra l'Umanesimo ed il Rinascimento, fioriti prima in Italia e riverberatisi poi per tutta l'Europa) sembra suggerire di saper coniugare la sapienza della scienza con la saggezza della buona politica e del viver civile, raccontando di un'epoca dove filosofia e scienza erano ancora un patrimonio comune delle prime città-stato, anche a garanzia della loro libertà.

In questo contesto, il discorso ritorna alla Geomatica ed alle modalità con cui può offrire un contributo alla soluzione di problemi, per quanto complessi e difficili. Infatti dai controlli a scala globale alla mappatura delle zone più critiche, la galassia delle immagini ed altri geodati producono basi di dati dinamiche, a referenza spaziale, che riempiono più livelli di sistemi informativi geografici o territoriali dalle cui informazioni avviare, con attenzione e competenza, un dibattito civile e politico. Il risultato sono insieme azioni conseguenti ed anche nuove domande alla Geomatica, per completare e migliorare le informazioni disponibili. A riguardo, è bene notare come le soluzioni della Geomatica implicino scelte politiche, mentre il gioco dell'allargamento dell'orbita terrestre sia solo un tecnicismo pericoloso (fosse anche tecnicamente possibile).

In questo modo, il discorso della Geomatica apre all'estetica (intesa come etichetta che va dall'educazione civica ad un galateo minimo), all'istruzione ed all'educazione permanente. Infatti l'intesa sulle tante e varie forme del bello è facilmente costruita, a partire dal riconoscimento, in negativo, di ciò che bello non è. Tutto questo fa superare inutili e forse impossibili intese sul buono, sul giusto e sul vero, lasciando liberi tutti con le proprie scelte personali. Invece tutto ciò collega poi questa estetica/etichetta ad un'istruzione che così deve diventare educazione permanente e saper trovare tanti luoghi possibili per potersi concretizzare: certamente spesso un'aula, ma poi un tavolo di confronto (anche conviviale, come potrebbe essere la cena di Emmaus di Caravaggio, superando il suo significato religioso, come indica, del resto, proprio la vita del Caravaggio).



Michelangelo Merisi da Caravaggio, Cena in Emmaus (Pinacoteca di Brera, Milano)

¹⁷⁶ Un altro da non sottovalutare è poi la stabilità dell'intero sistema solare, già non stabile all'infinito, come dimostrato da Poincaré.



Michelangelo Merisi da Caravaggio, Cena in Emmaus ¹⁷⁷ (National Gallery, Londra)

Pesi e misure

Non puoi pesare in metri
né il pane né il panettone,
né misurare in litri
l'altezza del Resegone ...

Non compri a chili la stoffa
se vuoi farti il cappotto:
non si vendono a ettari
i funghi per il risotto.

Lo so, tu non confondi
i pesi e le misure:
sei del sistema metrico
un gran campione ... Eppure ...

Nel misurare gli uomini
puoi sbagliare anche tu:
il più ricco, il più forte
li stimi un po' di più ...

C'è chi misura il prossimo
magari dal suo colore,
mentre dell'uomo conta
non la pelle, ma il cuore (Gianni Rodari ¹⁷⁸).

La nostra democrazia liberale ha lasciato che l'economia non dipenda da alcun potere, che sia diretta solo dalle leggi del mercato, senza alcuna restrizione delle azioni degli individui e per questo la comunità soffre. L'economia è diventata indipendente e ribelle a qualsiasi potere politico, e la libertà che acquisiscono i più potenti è diventata la mancanza di libertà dei meno potenti. Il ben comune non è più difeso né tutelato, né se ne pretende il livello minimo indispensabile per la comunità. E la volpe libera nel pollaio priva della libertà le galline. ... Paradossalmente (l'individuo) è più debole, ..., perché i più potenti hanno di più, ma sono un piccolo gruppo, mentre la popolazione si impoverisce e la disuguaglianza è aumentata vertiginosamente. E gli individui poveri non sono liberi. Quando non è possibile trovare il modo per curare la tua malattia, quando non puoi vivere nella casa che avevi, perché non la puoi pagare non sei più libero. Non puoi esercitare la libertà se non hai potere, e allora diventa una parola scritta sulla carta. ... Se non si può rispettare, un contratto sociale non è una gran cosa.

¹⁷⁷ Pur non essendo gli autori storici dell'arte, eloquente appare il confronto dalla luce del miracolo che sprigiona nel dipinto londinese, compiuto da un Gesù giovane (e dipinto da un Caravaggio, ancora attento alla committenza religiosa), alla penombra della riflessione che grava positivamente sul dipinto milanese, di un Gesù maturo, anche se si narra di una sua morte in croce, ancora giovane (e dipinto da un Caravaggio, ormai libero nelle sue scelte di vita ed espressione).

¹⁷⁸ Gianni Rodari, pedagogista e giornalista (già partecipante attivo alla Resistenza lombarda, nonché vincitore del premio Andersen), ha scritto storielle e filastrocche per bambini e forse, per bambini, è anche questa breve poesia, ma la stessa sembra insegnare qualcosa anche alla Geomatica, ovvero la necessità di coniugare il rigore nell'operare, tecnico-scientifico, alla capacità di comprendere la realtà sociale, politica ed economica.

L'idea di uguaglianza è ancora presente alla base delle nostre leggi, ma non sempre viene rispettata. Il tuo voto conta quanto il mio ma l'obiettivo della democrazia non è il livellamento, quanto piuttosto offrire lo stesso punto di partenza a tutti in quanto uguali davanti alla legge, perché i soldi non comprano la legge. Ma questo principio non si rispetta. ... Chi non ha soldi non potrà godere della libertà supplementare di spendere riservata a quelli che ce li hanno. E' questo pericolo di libertà eccessiva di pochi che impedisce l'uguaglianza di tutti. ... Ci rimane la possibilità di protestare, di rivolgerci alla giustizia. Non bisogna cambiare i principi, perché sono già scritti, ma abbiamo visto che ci sono molti modi per schivarli ed è necessario che il potere politico non capitoli di fronte alla potenza di quegli individui che infrangono il contratto sociale a loro favore. L'idea di resistenza mi sembra fondamentale nella vita democratica. Bisogna essere vigilanti, la stampa deve svolgere un ruolo sempre più importante nel denunciare le violazioni dei partiti, bisogna che la gente possa intervenire, ma so che questo richiede di essere sufficientemente vigilanti, coraggiosi e attivi. ... Dobbiamo rafforzare le istanze europee, perché l'economia è globalizzata. L'Unione Europea è il più grande mercato del mondo, con 500 milioni di cittadini attivi e di consumatori con una grande tradizione nell'equilibrio tra difesa del bene comune e libertà individuale. Se facciamo vivere questa tradizione europea, se permettiamo che esistano organi più efficaci e attivi nell'Unione, potremo affrontare l'evasione fiscale, i paradisi fiscali e anche decisioni fondamentali come quelle sull'approvvigionamento energetico. ... Le devastazioni causate dalla paura sono state immense, ... L'idea che si possa legalizzare la tortura è uno shock per chi crede nel valore della democrazia e ... in tutto questo le libertà individuali si riducono a una chimera. ... Non so se la crisi finirà, sappiamo che le economie non obbediscono a spinte razionali, ci sono spinte di passione o di follia, spinte che sfidano tutti i pronostici, forse scomparirà ..., o forse mai, o potremmo restarci dentro per altri dieci anni (Tzvetan Todorov ¹⁷⁹, Democrazia significa resistenza – La Repubblica, 27 dicembre 2014).

La Geomatica deve servire una comunità organizzata, formata da disoccupati, precari, operai, impiegati, tecnici, studenti e pensionati, sulla base di una stessa esperienza e dal giudizio sull'attualità e sulla rilevanza dei grandi cambiamenti, causati dalla globalizzazione selvaggia e soprattutto dalla/e crisi degli ultimi anni. Infatti questi cambiamenti non sono solo settoriali, ma anche globali e coinvolgono profondamente gli stili di vita, i modi di pensiero e le componenti ideologiche (e religiose) delle popolazioni coinvolte, superando tanto la cultura operaia (nelle diverse tradizioni marxiste, socialdemocratica/laburista e comunista, od anarchiche), quanto la precedente cultura contadina cristiana (in particolare, cattolica nei paesi europei sud-occidentali, riformata in quelli centro-settentrionali ed ortodossa in quelli orientali).

I suoi scopi, non sono mai fini a se stessa (come per una scienza senza oggetto), ma devono servire tanto all'azione concreta, relativamente alle sue competenze e capacità, quanto alla formazione di una coscienza civica che, anche della Geomatica, abbisogna per crescere e radicarsi. Infatti il riconoscimento dei limiti di una formazione specifica, almeno in larghi strati della popolazione e purtroppo in molti paesi (tra cui l'Italia), suggerisce nuovi percorsi formativi che sostengano le dovute e doverose richieste di intervento nell'ambito della Geomatica. Ovviamente l'intervento della Geomatica è un'operazione politica, ma non partitica, anche se gli interventi, soprattutto della Geomatica Applicata, non sono neutri (come spiega tutta la storia passata), spaziando dalla Topografia del terrore, al sostegno del progresso e dello sviluppo dei popoli.

In questo contesto, coloro che scrivono intendono privilegiare interventi originati dai momenti di lotta che vedono come attori principali tutti i soggetti sopraccitati, contrapponendoli ad altri interventi, autoritari oppure quasi assistenziali, per illustrare progetti calati dall'alto e così difficilmente partecipabili. In questo modo, la Geomatica e la Geomatica Applicata diventano momenti per comprendere ed interpretare quella parte della realtà italiana, europea e mondiale, di propria competenza specifica, a fianco di altre discipline che insieme concorrono alla conoscenza ed alle azioni conseguenti. L'ambizione è arrivare a contribuire alla costruzione di una comunità organizzata veramente, egitaria ed antiautoritaria, dove sia possibile cercare di distruggere l'onnipotente dittatura dei ruoli, quali esperto/inesperto, manuale/intellettuale, politico/esecutore, ecc.

¹⁷⁹ Filosofo e saggista bulgaro, naturalizzato francese, attento alla difesa della/e libertà, contro ogni tipo di oppressione.

Conclusione

Le parole: critica e dialettica fanno un preciso riferimento alle categorie kantiane ed alla teoria marxiana (e non marxista; d'altra parte, Marx stesso non è marxista, come afferma più volte). Infatti la sintesi critica kantiana fornisce elementi validi a comprendere ed interpretare la Geomatica, come un settore scientifico disciplinare (che origina dalla nobile scienza della Geodesia e comprende in sé tutte le tecniche proprie delle discipline del rilevamento).

Inoltre la teoria marxista riconosce la necessità imprescindibile di dover passare dagli studi alle applicazioni, perché solo una prassi dà dignità ad una teoria, così evidenziando anche la non neutralità di ogni scienza e tecnica. Infine proprio questa asserita non neutralità e l'impiego della teoria marxista obbligano a prendere in considerazione, accanto alle questioni scientifiche e tecnologiche analizzate, anche problemi di etica e di politica.

E' innegabile che questa concezione e questo approccio assumano una posizione dualista, estranea tanto allo spiritualismo (ed all'idealismo che discende da questo laicizzandosi), quanto al gretto materialismo. Tuttavia questa concezione e questo approccio hanno radici lontane dalle mitologie antiche e dai racconti di fiaba alle religioni monoteiste occidentali (ma anche prima in quelle politeiste del mondo antico) ed a quelle politeiste od ateiste orientali ¹⁸⁰.

Oggi giorno questa concezione si esprime nella distinzione tra un mondo delle idee ed uno della realtà (seppure questo si possa dividere nel mondo grande della vita pubblica ed in quello piccolo della vita privata e degli affetti). Ovviamente il mondo delle idee non esiste in alcun luogo, ma quasi da sempre e comunque dall'Umanesimo, il Rinascimento, la Riforma, l'Illuminismo, il Romanticismo (senza derive pangermaniste) ed il Positivismo, è una molla potente per concepire e mettere in atto il nuovo, cercato e voluto.

Arrivando al '900 ed al presente, l'empirismo critico, il positivismo logico, il pragmatismo, l'operazionalismo e lo strutturalismo sono contributi del pensiero moderno, nella stessa direzione, perché non si vuole accettare un pensiero unico dominante (forse errato e certamente molto pericoloso). Di conseguenza, tutta la storia dell'avventura umana associata è proprio una sfida ed un'opportunità, dove i rischi calcolati devono basarsi su qualche relativa sicurezza (e non assolutamente sull'azzardo).

Non stupisca una notevole pluralità di riferimenti; infatti come lo scetticismo e l'eclettismo, dei mondi antico e rinascimentale, così il relativismo moderato ed il politeismo culturale, del mondo moderno e contemporaneo, sono una grande ricchezza e non un sintomo di confusione. A tutto ciò, occorre aggiungere il saper anche stare in minoranza, perché sincretismi e meticcio culturale, richiedono sempre tolleranza, talvolta obiezione di coscienza, ma mai guerre preventive, per esportare democrazie formali e liberi mercati.

Purtroppo invece la globalizzazione attuale promuove privatizzazioni, sottrae allo Stato capacità di rimediare alle carenze individuali e deresponsabilizza i cittadini che, al massimo, a partire da sensi di colpa diventano "caritatevoli". Oggi s'è persa l'idea stessa di società, quale terreno di responsabilità comune e condivisione: ognuno vive in un mondo recintato, non disposto a pagare per servizi di cui non usufruisca istantaneamente. Invece non è così, bastando uscire dal recinto, in una strada, pubblica, dotata di segnaletica, semafori, vigili, ecc. L'economia globalizzata sta cambiando addirittura la definizione di acqua, da bene pubblico a proprietà privata e la privatizzazione dell'acqua genera conflitti, opportunamente mascherati da scontri etnici e/o

¹⁸⁰ Un'eccezione è costituita dal confucianesimo cinese (che tuttavia non è una religione, ma piuttosto una filosofia, morale e politica). Per contro, in Cina, è dualista il taoismo, strettamente collegato al buddismo (originario dell'India e dualista, a sua volta, come l'induismo che lo precede, sempre in India, e lo zoroastrismo persiano).

religiosi, dato che il numero di Paesi in condizioni di scarsità d'acqua sta crescendo (come osserva la fisica ed economista indiana, premio Nobel alternativo, Vandana Shiva ¹⁸¹).

La questione sociale è un problema proposto da pensatori, politici e rivoluzionari, soprattutto a partire dalla fine del '700, che percorre l'800 e per il quale, nel corso del '900, si cercano soluzioni dai risultati talvolta tragici (infatti il dibattito intellettuale è intriso di tali questioni essenziali per la vita degli uomini). Tuttavia negli anni '60 del secolo scorso, si perde un po' d'empatia per la sofferenza economica e la povertà, gli intellettuali volgono lo sguardo verso altri tipi di sofferenza ed ingiustizia (ad esempio, da quello delle donne, a quello degli omosessuali). Invece dagli anni '90, prende piede il pensiero "economico" e si comincia a ragionare in termini di "efficace" ed "inefficace". Questo pensiero si ispira a Friedrich Von Hayek, economista austriaco e strenuo oppositore della pianificazione statale, secondo cui l'intervento pubblico è deleterio per l'economia e per la democrazia, potendo anche condurre al nazismo.

Così il problema sociale non è risolto ed il ruolo degli intellettuali è ancora importante, perché quantomeno dovrebbero spiegare come mai, in molti paesi occidentali in cui vige la democrazia (una testa un voto), una percentuale molto bassa della popolazione è estremamente ricca e riesce a far assimilare al resto della gente le proprie idee su come far girare il mondo. In questo mondo, i poveri diventano sempre più poveri ed i ricchi sempre più ricchi (come osserva Joseph Eugene Stiglitz ¹⁸²). Nel '900, la scelta è tra capitalismo e comunismo, ora tra una politica basata su responsabilità collettive e l'erosione sociale. E il ruolo di tecnici e scienziati? Secondo Tony Judt ¹⁸³, la ferrovia è creatrice di socialità, in quanto facilita il fiorire della vita pubblica, cosicché a partire dai trasporti, si arriva agli edifici pubblici, nonché ad altre strutture, e poi anche alle sovrastrutture, come l'urbanistica, cioè la progettazione dello spazio pubblico, ecc.

Tutto ciò è soprattutto frutto d'una esigenza estetica, ma poi bisogna saper andare avanti! A questo compito, nessuna persona, perbene e di buona volontà, può ovviamente sottrarsi; tuttavia questo compito è pressante sicuramente per i geomatici, in quanto la loro *praxis* li obbliga a "sporcarsi le mani", intervenendo sulla realtà fisica, naturale ed antropica (con la misurazione, la modellazione/analisi ed il calcolo). Per completezza poi, facendo nuovamente riferimento alla disuguaglianza politica, sociale ed economica, tragicamente ancora ben presente, nel mondo attuale, si segnala che il coefficiente di Gini G ¹⁸⁴ (qui presentato, nel seguito immediato) è un indice, adatto alla misura della disuguaglianza di una qualsiasi distribuzione statistica. Infatti esso vola alto (con un numero indice prossimo ad uno), dove grande è la disuguaglianza, mentre è invece basso (con lo stesso numero indice vicino a zero), in una società in cui il reddito è ben distribuito.

$$G = \frac{1}{n} \left(n + 1 - 2 \sum_{i=1}^n (n - i + 1) y_i / \sum_{i=1}^n y_i \right) \quad \text{dove: } y_i \leq y_{i+1} \quad \forall i$$

essendo: y l'insieme dei dati (campionari) analizzati
 n la numerosità del campione.

¹⁸¹ Eppure, già Giustiniano, imperatore bizantino, osserva che "per legge di natura questi elementi sono comuni a tutta l'umanità: l'aria, l'acqua dolce, il mare, e quindi le sponde del mare", mentre adesso sembra proprio che queste nobili raccomandazioni siano diventate solo carta straccia. A riguardo, si veda anche: Shiva V. (2010): Le guerre dell'acqua. Feltrinelli, Milano.

¹⁸² Economista americano, come Paul Robin Krugman, entrambi fortemente critici nei confronti di una globalizzazione selvaggia, del liberismo, dell'economia di carta, del turbo capitalismo, del ritorno della rendita, ecc. A riguardo, si veda anche: Stiglitz J.E. (2013): Il prezzo della disuguaglianza. Einaudi, Torino.

¹⁸³ Lucidissimo storico ed accademico, britannico ed israeliano (purtroppo prematuramente scomparso).

¹⁸⁴ Il coefficiente di Gini discretizza l'integrale dell'area compresa tra la curva di distribuzione (reale) di Lorenz e la bisettrice del primo quadrante, ovvero la retta di equidistribuzione.

Due pensieri conclusivi riprendono il discorso sulla *praxis* e riportano a quello sulla scienza (e sulle arti ¹⁸⁵).

Bisogna accennare qui a un atteggiamento generale di fronte a uno dei termini più controversi del mondo attuale: il marxismo ¹⁸⁶. La nostra posizione, quando ci viene chiesto se siamo o no marxisti, è quella che adotterebbe un fisico o un biologo cui chiedessero se è “newtoniano” o “pasteuriano”. Esistono delle verità così evidenti, così legate alla conoscenza dei popoli, che è inutile discuterle. ... Riconosciamo che le verità essenziali del marxismo fanno parte integrante dell'insieme culturale e scientifico dei popoli con naturalezza, come qualcosa che non ha più bisogno di essere messo in discussione, Il merito di Marx consiste nell'aver prodotto di colpo nella storia del pensiero sociale un cambiamento qualitativo. Non solo egli interpreta la storia, ma comprende la dinamica e ne prevede il futuro sviluppo, ma, oltre questo, che segnerebbe il limite del suo dovere scientifico, esprime un concetto rivoluzionario: non basta interpretare la natura, bisogna trasformarla. L'uomo cessa di essere schiavo e strumento del mezzo e diventa l'architetto del proprio destino (Ernesto Guevara, Note per lo studio dell'ideologia della Rivoluzione Cubana).

... è chiaro che nessuna importante scoperta o invenzione può verificarsi senza la volontà di trovarla. Nel caso ..., però, vediamo qualcos'altro, giacché l'intervento del senso di bellezza vi svolge una parte come mezzo euristico indispensabile. Abbiamo raggiunto la doppia conclusione: che l'invenzione è una scelta; che questa scelta è governata in modo imperativo dal senso della bellezza scientifica (Roger Penrose, La nuova mente dell'imperatore – La mente, i computer e le leggi della fisica).

Bibliografia minima

- AAVV (1987): Che Guevara. Editrice l'Unità, Roma.
- Castelnuovo G. (1904): Lezioni di Geometria analitica e proiettiva. Albrighi, Segati & C., Roma.
- De Finetti B. (1970): Teoria della probabilità – Sintesi introduttiva con appendice critica (volumi I e II). Giulio Einaudi Editore, Torino.
- De Santillana, Von Dechend H. (2011): Il mulino di Amleto – Saggio sul mito e sulla struttura del tempo. Adelphi Edizioni, Milano.
- Enriques F. (1898): Lezioni di Geometria proiettiva. Ditta Nicola Zanichelli, Bologna.
- Judt T. (2012): Novecento. Editori Laterza, Bari.
- Labro P., Manceaux M. (1968): Bilancio di maggio dossier Francia 68. Mondadori 1968
- La Cecla F. (2015): Contro l'urbanistica – La cultura delle città. Einaudi, Torino.
- Müller J.W. (2012): L'enigma della democrazia. Piccola Biblioteca Einaudi, Torino.
- Odifreddi P. (2009): Sulle spalle di un gigante – E venne un uomo chiamato Newton. Longanesi, Milano.
- Pasolini P.P. (1977). Le belle bandiere. Editori riuniti, Roma.
- Pasolini P.P. (1979). Il caos. Editori riuniti, Roma.
- Penrose R. (2010): La nuova mente dell'imperatore – La mente, i computer e le leggi della fisica. BUR, Milano.
- Propp V.Ja. (2008): Morfologia della fiaba – Con un intervento di Claude Lévi-Strauss e una replica dell'autore. Piccola Biblioteca Einaudi, Torino.
- Propp V.Ja. (2008): Le radici storiche dei racconti di fiaba. Universale Bollati Boringhieri, Torino.
- Salvadori M.L. (2013): Storia d'Italia – Crisi di regime e crisi di sistema 161 – 2013. Il Mulino, Bologna.
- Schultz M. (2014): Il gigante incatenato – Ultima opportunità per l'Europa? Fazi Editore, Roma.
- Silver N. (2013): Il segnale e il rumore. Fandango, Roma.
- Skidelsky R. & E. (2013): Quanto è abbastanza. Mondadori, Milano.
- Suyin H. (1969): La Cina nell'anno 2001. ETAS Compass, Milano.
- Thom R. (1980): Stabilità strutturale e morfogenesi – Saggio di una teoria generale dei modelli. Giulio Einaudi Editore, Torino.
- Togliatti E.G. (1950): Geometria proiettiva – In: L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli (Ed's) Enciclopedia delle Matematiche elementari e complementi con estensione alle principali teorie analitiche, geometriche e fisiche, loro applicazioni e notizie storico – bibliografiche. Editore Ulrico Hoepli, Milano.

¹⁸⁵ E' importante sottolineare la relativa vicinanza tra la scienza (compresa l'invenzione tecnologica) e tutte le arti (fino ad includervi le lettere), perché l'estetica della bellezza (e di una certa bruttezza, in quanto “bello” più complesso e difficile) è certamente una guida importante per il vivere civile, con un'etichetta che va dall'educazione civica ad un galateo minimo.

¹⁸⁶ Come già detto in precedenza, un'interpretazione attuale distingue categorie marxiane da un'ideologia marxista. Del resto, proprio la parola “architetto” (scritta nel prosieguo della citazione) è una chiarissima spia di cosa distingue un grande progetto da una fede bigotta. A riguardo, basta citare il titolo del pamphlet: L'Ape e l'Architetto – Paradigmi scientifici e materialismo storico (scritto da quattro fisici teorici dell'istituto Enrico Fermi dell'Università La Sapienza di Roma: Giovanni Ciccotti, Marcello Cini, Michelangelo de Maria e Giovanni Jona-Lasinio), per comprendere la distinzione tra un'opera perfetta, sempre uguale, ed un lavoro intelligente e creativo.