

MATEMATICA APPLICATA ED APPLICAZIONI GEOMATICHE

Giulia Fava ⁽¹⁾ – Luigi Mussio ⁽²⁾

⁽¹⁾ Politecnico di Milano – DABC – Piazza Leonardo da Vinci, 32 – 20133 Milano
Tel. 02-2399-4351 – Fax 02-2399-4300 – e-mail fava@stru.polimi.it

⁽²⁾ Politecnico di Milano – DICA – Piazza Leonardo da Vinci, 32 – 20133 Milano
Tel. 02-2399-6501 – Fax 02-2399-6602 – e-mail luigi.mussio@polimi.it

Riassunto – La critica dialettica del trattamento delle osservazioni, una disciplina oggi giorno centrale nelle discipline del rilevamento (dalla scienza geodetica alle applicazioni geomatiche), mette questa disciplina al pari con altre della matematica e della fisica, e la affianca a considerazioni di vasta cultura, proprie di ambiti umanistici (e filosofici, in particolare). In questo contesto, andando ben oltre la tradizionale analisi dei dati, i metodi di Fourier sono esposti come un ponte dai metodi statistici/stocastici verso altri approcci deterministici, propri dell'analisi matematica. Due liste di personaggi che, in vario modo, hanno dato contributi alla crescita culturale sono qui accluse, integrando la lunghissima lista di un altro lavoro, proprio con l'obiettivo di ibridare le scienze dure con le scienze umane, perché la cultura non è umanistica, né scientifica, ma unica.

Premessa ¹

Interpretare alcune categorie kantiane secondo un approccio probabilistico, lasciando le restanti in un ambito matematico-deterministico, è un buon avvio per poter formulare una critica dialettica del trattamento delle osservazioni, in particolare, applicata alle discipline del rilevamento (dalla Geodesia alla Geomatica). Infatti il trattamento delle osservazioni si struttura e si articola in base ad alcune idee guida, come la modellazione dell'incertezza e, solo nelle variabili a più dimensioni, della dipendenza, nonché sulla verifica e sul confronto di ipotesi (a partire dal controllo di qualità) ed ancora su esigenze basilari per la teoria della stima e l'analisi multivariata, come l'ottimalità e la robustezza, l'affidabilità ed il condizionamento. In tutti questi casi, una vera e propria continuità/contiguità di persone unisce filosofi, matematici, fisici, astronomi, geodeti e cartografi.

Le dodici categorie kantiane:

☐ di quantità:	unità, pluralità, totalità;	☐ di relazione:	sostanzialità, causalità, reciprocità;
☐ di qualità:	positività, negatività, limitazione;	☐ di modalità:	possibilità, realtà, necessità.

Alcune categorie kantiane secondo un approccio probabilistico:

☐ di modalità:	possibilità necessità	sinonimo di probabilità quando la probabilità tende ad uno;
☐ di qualità:	limitazione	passando dal modello all'esperimento, in fase di campionamento;
☐ di quantità:	totalità	passando ancora dal modello all'esperimento, completato nel suo campionamento.

¹ L'intero lavoro, ad eccezione della Postfazione, è interamente ripreso da: "Dio non gioca a dadi"...o forse sì? di Giulia Fava, Luigi Mussio (Memorial "Giovanna Togliatti" Politecnico di Milano / ASITA _ CD2/2018), dove la sentenza virgolettata si rifà alla polemica di Albert Einstein contro l'interpretazione di Copenaghen (e comunque Dio "esiste", al di fuori dall'essere pensato?).

❑ di relazione:	causalità	estendendo le dimensioni di un modello (o di un esperimento) e mettendo in evidenza la dipendenza (da quella vaga a quella in legge).
-----------------	-----------	---

Le altre categorie kantiane ed il loro carattere matematico-deterministico:

❑ di modalità:	realtà	ovvero: esistenza;
❑ di qualità:	positività negatività	auto-evidente, auto-evidente;
❑ di quantità:	unità pluralità	auto-evidente, auto-evidente;
❑ di relazione:	sostanzialità reciprocità	ovvero: unicità (diverso da unità, in quanto riferito alla natura e non ad un conteggio), ovvero: dualità (sempre riferito alla natura).

Ovviamente non si deve chiedere a Kant quanto è stato definito, in tempi successivi, per quanto riguarda il trattamento delle osservazioni. Ad esempio, il concetto di affidabilità di uno schema di misura (rilevamento, od un altro modo di campionamento) potrebbe essere una diversa accezione della categoria di modalità: necessità. Infatti tanto più è prossima ad uno l'affidabilità, quanto maggiore è poi la possibilità di individuare e localizzare eventuali errori. Analogamente il concetto di condizionamento di sistemi di equazioni potrebbe essere una diversa accezione della categoria di modalità: realtà. Infatti un parametro è determinabile solo se qualche osservazione permette la sua determinazione, mentre la mancanza di questa genera singolarità o quantomeno mal-condizionamento nei suddetti sistemi di equazioni.

Tuttavia entrambi questi concetti si sono precisati solo nella seconda metà del '900, quando mezzi di calcolo moderni determinano l'aumento della dimensione delle basi di dati e l'esigenza di un maggiore controllo, statistico e numerico. Invece il concetto di robustezza (seppure solo qualitativa e non matematica) potrebbe essere una seconda accezione della categoria di qualità: limitazione. Infatti la robustezza qualitativa è un criterio, del '600 e '700, capace di fornire stime non distorte dalla presenza di dati anomali. Per contro, il concetto di ottimalità (come nella minima varianza, massima verosimiglianza e nei minimi quadrati) potrebbe essere una diversa accezione della categoria di quantità: totalità. Tuttavia questo concetto (con correttezza, consistenza, efficienza e sufficienza) si è precisato solo nel corso dell'800 e del primo '900.

Altre precisazioni sono poi comunque necessarie, in quanto ogni classificazione è sempre arbitraria, seppure sicuramente utilissima, per poter procedere con le suddette interpretazioni. Infatti Kant distingue tra giudizi analitici e giudizi sintetici, a loro volta, distinti fra a priori (in particolare, trattando di quelli della matematica) ed a posteriori. Invece la critica epistemologica successiva ha riportato i giudizi sintetici a priori, nel novero di quelli sintetici a posteriori, perché comunque fondati su qualche esperienza. Inoltre Willard van Orman Quine, un filosofo analitico americano, ha messo in dubbio anche la distinzione fra giudizi analitici e giudizi sintetici. In questo modo, anche la classificazione fra un approccio probabilistico/statistico ed un ambito matematico-deterministico non è ovviamente una partizione netta, ma solo un conveniente modo di procedere operativo ².

² Un'osservazione complementare (e conclusiva, per questa introduzione) deve rilevare come Kant fosse molto legato alla matematica (aritmetica) ed alla dinamica galileiana-newtoniana, e prenda in considerazione la statistica (allora agli albori, con la teoria degli errori) solo marginalmente. Per questi motivi, la categoria di limitazione ribadisce il modello discreto (e sostanzialmente finito, perché l'infinito kantiano, come quello dell'aritmetica, è solo potenziale e giammai attuale), mentre le categorie di totalità e di reciprocità evidenziano la forza meccanica, partendo dalla legge di gravitazione universale e, come una sua conseguenza, dal principio di azione e reazione (o terza legge della dinamica).

PARTE I – ANDANDO OLTRE L'ANALISI DEI DATI

Sui “metodi” possibili nella scienza ed in politica

I passi della ricerca scientifica e/o tecnologica sono elencati e discussi, riprendendo un discorso fatto altrove:

- ☐ osservare, in modo pressoché casuale, fatti / fenomeni e, da questi, proporre una teoria ingenua;
- ☐ verificare sperimentalmente la teoria ingenua, pur senza pretendere di dimostrare alcunché;
- ☐ costruire una teoria rigorosa (la più semplice possibile, per sole ragioni di praticità);
- ☐ confutare una teoria rigorosa, tramite soli contro-esempi validati;
- ☐ e così via, procedendo, non necessariamente, sempre nello stesso ordine.

In questo modo, entrambe le teorie devono soddisfare gli esempi, ma la teoria rigorosa deve anche essere compatibile con le conseguenze. Ad esempio, la teoria geocentrica conferma il moto apparente, giornaliero del sole, ma solo la teoria eliocentrica, oltre spiegare lo stesso moto, con la rotazione terrestre (confermata, tra l'altro, dalle correnti oceaniche, a circolazione ciclonica ed i venti stratosferici), cancella i moti retrogradi dei pianeti e le laboriose spiegazioni, costruite ad hoc, con gli epicicli ed i deferenti. Invece la teoria flogistica non soddisfa neppure gli esempi (come mostra l'ossidazione dei metalli, ottenuta grazie alla metallurgia), mentre l'invenzione dell'ossigeno spiega benissimo questi fenomeni e si è dimostrata ricca di conseguenze positive (come ben dimostrato dalla chimica inorganica, organica e biologica):

Tre osservazioni precisano meglio l'intero percorso, adatto sia ai tanti periodi di scienza normale, dove si approfondiscono e completano le teorie e/o le tecniche, sia nei periodi, più rari, caratterizzati da rivoluzioni scientifiche e/o tecnologiche. In ogni caso, più è libera la ricerca e, in generale, più proficui sono anche i suoi sviluppi. Circa poi la semplicità non è certamente ascrivita nella realtà, ma è un sensato modo di procedere, passo-passo, diradando l'ignoranza, per migliorare la conoscenza. Un altro aspetto importante, sottolineato svariate volte dagli storici della scienza, a partire dagli anni Sessanta del '900 (ma forse anche un po' prima), è che non si è mai di fronte ad una sola teoria indipendente, ma a vere e proprie costellazioni (o forse anche perturbazioni) di teorie, in competizione fra loro. Di conseguenza.

- ☐ la casualità è un fattore caratterizzante, essendo difficile (o quantomeno raro) prevedere quello che ancora non si conosce;
- ☐ la verifica sperimentale si basa sul principio d'induzione ed ovviamente non dimostra alcunché, salvo corroborare l'evidenza, con risultati successivi, tutti positivi;
- ☐ la confutazione di una teoria rigorosa si basa ancora sul principio d'induzione, ma solo per validare tutti i contro-esempi che non devono mai contenere anomalie, né errori.

La casualità è quasi certa nei periodi di scienza normale, dove l'approfondimento ed il completamento sono sempre ricercati, ma il cui raggiungimento non è sicuramente garantito e può riservare sorprese, anche notevoli. La casualità è forse meno esclusiva, nei periodi di rivoluzione scientifica e/o tecnologica. In questi casi, una nuova congettura, cioè un'invenzione vera e propria, dopo una confutazione fondata, detta i nuovi paradigmi della ricerca e, almeno per un certo tempo, spesso indica strade quasi obbligate. A riguardo, tutti gli schemi (così come tutte le classificazioni e, in generale, tutte le teorie) sono poi solo modelli interpretativi

che permettono di comprendere realtà, condizionate dal linguaggio, dalla cultura e dalle condizioni, sociali, politiche ed economiche, dei tempi e luoghi, dove sono concepiti, formulati e messi alla prova.

Per approfondire bene questi temi, nell'immediato prosieguo, si riportano due testi di due filosofi sociali e della politica (contemporanei). Il primo fa riferimento alle storie di vita, comparandole criticamente, con il/la noto/a concetto/idea di uomo medio. Il secondo sviluppa dialetticamente temi della politica contemporanea, mettendo in relazione le persone di oggi, le loro società e questa travagliata Europa, dove è meglio continuare a vivere, nonostante tutte le sue, grandi e piccole, difficoltà e contraddizioni.

La media è una funzione statistica ³ (e) presuppone l'esistenza di un "uomo medio" ⁴. Gli abitanti del mondo, un luogo dove tutte le dimore sono temporanee e mai eterne e stabili, e dove tutte le indicazioni stradali sono girevoli si aggrappano alla verità delle tabelle statistiche, per sentire un minimo di sicurezza. Sono tabelline che danno la sensazione di certezza e quindi di appartenenza. Il guaio è che l'appartenenza è altrettanto una finzione quanto lo è la media statistica. Mi viene in mente Monsieur Jourdain, protagonista di "Il borghese gentiluomo" di Molière, quando scopre di parlare in prosa. La qualità delle biografie è uguale alla qualità degli esseri umani.

Jacques Derrida, ricordando gli amici scomparsi prima di lui, notò che con la morte ognuno scompare irrimediabilmente dal mondo. Ne deriva che ogni essere umano è un mondo irripetibile. La statistica invece serve a cogliere e registrare ciò che è ripetibile, e per essere precisi, a distillare la ripetibilità dalla singolarità. L'individuo può far parte di una tabella statistica solo in quanto un esemplare di una specie. Aggiungo: le tabelle sono innumerevoli (genere, età, altezza, peso, colore dei capelli, fede religiosa, possesso, reddito, tifo, vacanze, opinioni sui politici ecc. ecc. ecc.). Ma, una volta statisticamente parcellizzato, l'uomo non può essere ricostruito come un insieme. Detto tutto quello che si può dire sulla base della massa delle tabelline, resta non detto ciò che rende l'uomo soggetto e oggetto del mondo, che verrà sepolto nella tomba, assieme a lui.

L'unico uso lecito dunque del concetto di "normalità" è quello insito nella frase: "La normalità dell'uomo è la sua anomalia". Mi viene in mente il concetto della "riduzione fenomenologica" caro a Husserl. Cercando di arrivare alla "essenza delle cose", concentrata a suo parere nella "soggettività trascendentale", Husserl avanzava l'idea di "epochè", di sospensione di tutto quello che è particolare, incidentale, casuale, culturalmente indotto o suggerito dalla "effimera" opinione pubblica, o che è troppo complesso dal punto di vista della collocazione temporale e spaziale. Ecco, il biografo deve applicare una strategia diametralmente opposta a quella suggerita da Husserl. L'indagine biografica deve riprendere tutte le complessità e le sfumature dell'essere umano, tutto quello che non è statisticamente contabile.

E per quanto riguarda lo "stupore dei bambini" nel contesto della sorte di un nuovo arrivato in un mondo sconosciuto. Direi che questo tipo di stupore dovrebbe essere vissuto da chiunque prenda in mano la penna per raccontare la vita di un altro uomo (meglio ancora, vivere lo stupore prima che l'incipit della narrazione sgorgi dalla penna). Ma vista anche una particolare inclinazione degli ebrei per un certo tipo di esperienze, mi permetto di citare la definizione dell'ebreo (in quanto categoria) coniata scherzosamente, ma anche un po' seriamente dal commediografo inglese Frederick Raphael: "L'ebreo è una persona che in ogni luogo è fuori luogo". Aggiungerei che nell'Europa post-illuminista, gli ebrei erano "l'anomalia particolare", lontana dal progetto della "normalità generale". Agli ebrei è toccato il ruolo della "norma dell'anomalia", o forse della sua incarnazione. L'incarnazione dell'anomalia ...

"Tre volte straniero". Sono stato straniero fin dalla nascita e così morirò. Non saprei quando, ma molto presto mi sono convinto che non c'era medicina in grado di guarirmi dalla mia anomalia. Ho accettato questo mio essere straniero (o essere Altro) e in un certo senso me ne sono innamorato. O forse non tanto mi sono invaghito dell'essere straniero, quanto invece ho sviluppato una grande e profonda insofferenza verso l'opposto di quella condizione, ossia verso "l'appartenenza". Certamente si tratta di due fattori che hanno influenzato l'un l'altro: mi sono così abituato ai privilegi insiti nello status dello straniero che trovo insopportabili i limiti impliciti di ogni appartenenza. Questi limiti, va detto, per gli indigeni, per coloro che non hanno mai fatto l'esperienza di essere stranieri, sono naturali, impercettibili e indolori. (Invece) quanti vantaggi hanno gli stranieri. Si tratta di privilegi da cui sono esclusi (a loro insaputa e senza che siano stati interpellati in materia) i nativi del luogo.

³ Dall'intervista di Wlodek Goldkorn al filosofo Zygmunt Bauman, recentemente scomparso (L'Espresso – Culture, domenica 19 marzo 2017), come un manuale per sfuggire alla catastrofe. Del resto, Bauman è tutto fuorché un "uomo medio": ebreo polacco, fugge in Unione Sovietica (all'inizio della seconda guerra mondiale); ebreo antistalinista, ripara in Israele (dopo un ritorno conflittuale in Polonia, al termine di quella guerra); ebreo antisionista, si ritira in Inghilterra (di fronte alle tragedie del Medio Oriente, purtroppo tuttora irrisolte), dove il suo rifugio non è certamente assimilazione (in un mondo "wasp", liberista e selvaggiamente globalizzato).

⁴ Definizione di Immanuel Kant, coeva alla sua "Risposta alla domanda: Che cos'è l'Illuminismo?", dove afferma che "L'Illuminismo è l'uscita dell'uomo dallo stato di minorità che egli deve imputare a se stesso".

Quali sono questi privilegi? Semplice. Hai la facoltà di prendere alla leggera le opinioni altrui su quello che dovresti fare e su ciò che non devi fare. L'opinione pubblica, ossia il parere della maggioranza, è in genere mutevole. Ma la saggezza e tanto più la virtù non seguono il parere della maggioranza. Le accuse e le calunnie non diventano veritiere perché gridate in coro. E se quello che sto dicendo non è politicamente corretto, il problema è loro; non è mio. Da straniero, da Altro, il tribunale supremo, la cassazione senza appello, è la coscienza. E' un tribunale severissimo, e le sentenze che emette sono spesso più severe e più dure da sopportare di quelle dei tribunali dei nativi. Però puoi avere fiducia nella sua equità. Di più, da straniero, da Altro, sai bene cosa fare per non essere trascinato nella Corte della tua coscienza. Sei tu l'unico responsabile dei tuoi pensieri e delle tue gesta.

Ma attenzione, parlo della responsabilità "per" e non "di fronte a". Parlo della responsabilità "per" i gesti compiuti e quelli incompiuti causa ignavia, non della responsabilità "di fronte" alle istituzioni che vorrebbero importi le regole di ciò che si deve e ciò che non si deve fare, senza chiedere il tuo parere e il tuo consenso, visto che le istituzioni sono convinte di saper definire meglio di te cosa sia un vizio e cosa invece una virtù. L'assunzione della responsabilità comporta, a sua volta, rischi enormi e talvolta si tratta di un fardello troppo pesante per alcune, troppo fragili, spalle. Ma è più dignitoso misurare la spalle a seconda del fardello delle responsabilità, che non adattare la responsabilità alla tenuta delle spalle. In ogni caso, preferisco la coscienza pulita agli applausi del pubblico.

E per quanto riguarda l'appartenenza. Jasia ⁵ scacciata via da ogni luogo dove credeva di star di casa, e che ha vissuto con dolore il suo errare per il mondo, parlava del "sogno di appartenenza". Con Jasia eravamo una sola anima in due corpi. Ma in questo caso non eravamo d'accordo. Io non ho mai avuto alcun sogno di appartenenza. Anzi, ne ho sempre provato repulsione. (Addirittura) dopo l'espulsione dal branco comunista (un'espulsione dovuta all'iniziativa sia dei comunisti che mia) non ho più cercato nessun gruppo in grado di correggere le mie opinioni o di darmi la linea giusta. E non ho permesso a nessun gruppo di dire che io ne facessi parte. Dopo aver abbandonato il comunismo non ho aderito agli anticomunisti, nonostante abbia avuto molte appetibili offerte. Né ho cercato nell'ospitalità del nazionalismo israeliano la ricompensa per i danni subiti dal nazionalismo polacco. (Infine) in Inghilterra non pretendo di essere inglese, e del resto gli inglesi non mi considerano tale. E il mio essere straniero non è di disturbo né per me né per loro. Anzi, forse sono una specie di candito, un elemento esotico, nella torta, per il resto povera di sapore, della convivenza quotidiana.

Ho il sospetto che qualcosa di tutto (questo) sia finito per pesare sul mio carattere ... Nell'esercizio della mia professione provo fastidio per le parole con il suffisso "ismo". I miei recensori, sia quelli critici che quelli favorevoli, cercano in tutti i modi di collocarmi all'interno di una scuola di pensiero, ma non ci riescono. I più critici (e i più legati emozionalmente e materialmente a un sapere diviso lindamente in vari campicelli rigorosamente recintati) arrivano alla conclusione che sono un eclettico. Ma per me non si tratta di un'offesa, anzi. Sì, prendo dal pensiero di ogni saggio e intelligente (e talvolta di meno saggio e meno intelligente) autore quegli elementi che trovo innovatori, essenziali, o stimolanti per il mio lavoro. Ma ciò non implica che debba firmare una specie di patto diabolico per cui accetto tutto il resto delle opinioni dello stesso autore. E' vero, che io stia sulle spalle dei giganti. Ma cerco di non usare le loro spalle come se fossero una comoda poltrona (e certamente non mi nascondo dietro alle loro spalle per fuggire le mie responsabilità).

Quando i filosofi, gli storici, i letterati, parlano della catastrofe, implicitamente suggeriscono che si tratti di un fenomeno limitato nel tempo e nello spazio. Ed è per questa ragione che ho sempre cercato di evitare di usare questa parola. Ma c'è di più. Se condividessi l'opinione per cui "viviamo nel cuore della catastrofe", accetterai anche la critica alla mia radicalità che non lascia vie di salvezza. Ma il fatto è che non la condivido. Intanto, la catastrofe è un fenomeno improvviso, inatteso e di regola causato dagli uomini, dalle loro azioni o dalla loro inerzia. E per quanto crudeli siano le sue conseguenze in termini di vite umane, "catastrofe" significa "fuoriuscita dalla norma". Ora, sono gli esseri umani a stabilire la norma. In altre parole, sono gli umani a determinare e manipolare la scala e la gamma delle probabilità di ciò che accade, di ciò che è la norma e viceversa l'anomalia. Aggiungo una cosa, in apparenza ovvia: se non ci fosse la norma (stabilità, appunto dagli uomini), non si potrebbe neanche violarla o fuoriuscire da essa. E' noto quanto per gli antichi fosse importante il concetto di catarsi; una funzione dell'azione scenica drammatica che segnava la purificazione dopo aver toccato il fondo della tragedia o della catastrofe. La catarsi permetteva il ritorno alla norma. Ma se non c'è norma? Se la norma è il rischio e quindi la probabilità permanente di verificarsi di quella situazione (chiamata) catastrofe (ad esempio l'Olocausto, oppure la guerra fratricida tra gli europei, chiamata la guerra dei trent'anni)? E se la norma fosse così disumana e poco attraente che non varrebbe la pena di ripristinarla? ... Ecco perché è ingiustificata l'accusa che la mia analisi della situazione non indica alcuna via di salvezza. Io credo profondamente che la via di salvezza esista e che è nel potere degli umani tracciarla. Però è illusorio pensare che il ritorno alla prassi del "Business as usual", alla non riflessiva e presunta normalità, possa essere una via di salvezza. E', anzi, dal "business as usual", che dobbiamo salvarci.

Anziché parlare di catastrofe, (occorre) riflettere sui "tempi bui", un termine che prendo in prestito da Hannah

⁵ Diminutivo di Janina, moglie di Bauman, sopravvissuta al Ghetto di Varsavia e scomparsa nel 2009.

Arendt. Arendt, a sua volta, nella raccolta dei suoi saggi “Men in Dark Times”, restituisce il debito contratto con Bertold Brecht, che nel poema “An die Nachgeborenen”⁶ applicò il concetto “tempi bui” al periodo in cui gli era stato dato di vivere, tra disordini e fame, tra massacri e carnefici, quando esisteva solo il male e non la resistenza.

Arendt spiega, e non c'è nulla da aggiungere, il modo in cui essa utilizza il termine “tempi bui”. Dice: “Se il compito della sfera pubblica è gettare la luce sugli affari degli umani in modo da creare uno spazio di immaginazione in cui gli uomini possano mostrare con le loro parole e con le loro azioni nel bene e nel male, la loro natura, il buio si verifica quando queste luci vengono spente a causa della crisi di fiducia, dell'indivisibilità del potere, del discorso che anziché rivelare le cose le nasconde”. ... In tempi bui quindi, secondo Arendt, piuttosto che cercare le rivelazioni nelle grandi teorie, bisogna provare a trovarle “negli incerti e spesso deboli lumini che alcuni uomini accendono, nonostante le condizioni in cui è stato dato loro vivere”.

Tempi bui, non rari nel corso della storia, non sono quindi altro che una “normalità” gravida di catastrofe, o forse e con più esattezza sono tempi in cui la discrasia tra l'esperienza da un lato e la narrazione dominante dall'altro, fa sì che le narrazioni pubbliche velino l'esperienza anziché svelarla, la oscurino anziché illuminarla. Milan Kundera definisce queste narrazioni come una cortina. E dice che compito della letteratura è squarciare quella cortina. Scrive Kundera: “Capire con Cartesio che alla base di tutto c'è l'io pensante e con questa convinzione far fronte all'universo. ... Capire con Cervantes che il mondo è polisemico e far fronte non a una verità assoluta, ma alla molteplicità delle verità contraddittorie e relative ... Avere come unica certezza, la saggezza dell'incertezza”.

Non mi paragono a Cartesio o a Cervantes. Sono solo un artigiano. Ma mi sono posto come compito quello di squarciare le cortine. E se non mi riesce di farlo così bene come lo hanno fatto i grandi maestri appena citati, ciò non mi esime dal mio dovere di continuare a provarci.



Giorgio Morandi⁷

La dissoluzione dell'Europa è già inscritta nella sua origine⁸. Accade che da quando l'uomo è sulla terra, vuole diventare altro da ciò che è. Quando il serpente dice ad Adamo ed Eva se mangerete il frutto della conoscenza diventerete come Dio, è chiara la premessa di voler diventare altro da ciò che essi sono. L'estremizzazione di voler diventare altro da ciò che si è, definisce la novità filosofica nata intorno al V e il VI secolo avanti Cristo. Il pensiero filosofico greco porta l'altro nell'estremo, nel nulla. Intendendo come “nulla” l'altro da cui le cose divengono. Quando la filosofia pensa questo, lo fa in relazione alle cose del mondo. Ad esempio Platone quando definisce la produzione, cioè la *poiesis*, la causa che fa passare qualsiasi cosa dal non essere all'essere. Il significato della *poiesis* traccia i confini entro i quali si sviluppa la storia d'Europa. (E') l'idea che Marx ha dell'agire, della prassi. Sono trascorsi duemila e cinquecento anni. Ma il concetto è lo stesso che fissò Platone. Per la prima volta l'ontologia greca immaginò il mondo come una fluttuazione in cui gli eventi provengono dal loro non essere, stanno nell'esistenza e poi precipitano nel non essere.

Il cristianesimo eredita dai greci il concetto di niente”. In qualche modo è una conseguenza di quel pensiero. Già i greci si posero il problema di che cosa ci fosse oltre il nulla. E se lo posero proprio in rapporto alla morte. Un conto era immaginare la morte come un viaggio dal quale si poteva tornare; altro era pensarla come annientamento della vita. (Tuttavia) non fornirono una vera risposta, ma avvertirono, molto prima dell'esistenzialismo, il senso dell'angoscia che la morte provocava. Il cristianesimo cominciò a pensare a un rimedio che arginasse il *monstrum* del nulla e l'angoscia che la morte provocava. Nella sua configurazione più visibile il rimedio fu chiamato Dio, Sacro, Eterno, Immutabile. Lo scopo era proteggersi e contenere il divenire delle cose. Naturalmente, i greci non furono dei teologi. Per loro Dio voleva dire il luogo in cui l'uomo credeva che fossero conservati tutti i tratti che a lui interessavano. Un Dio custode di tutto ciò che ci interessa e che impedisca che l'annientamento sia totale. Già Eraclito ed Eschilo parlarono di rimedio al

⁶ Il titolo dell'opera è in tedesco e questa è la sua traduzione letterale: “A coloro che verranno”.

⁷ L'opera di Giorgio Morandi presenta bottiglie ed altri umili oggetti di uso comune, in perfetto accordo con l'accensione solo di “deboli lumini” di Hannah Arendt e l'antidogmatismo (di cui alla chiusa del successivo articolo riportato).

⁸ Dall'intervista di Antonio Gnoli al filosofo Emanuele Severino (La Repubblica – Robinson, domenica 19 marzo 2017), sull'attuale e difficile cammino di un'Europa, nata già vecchia, perché il suo destino è segnato dal destino, nichilista e decadente, dell'Occidente.

processo della morte. Questo quadro della tradizione, con un senso eterno e divino del mondo, si ritroverà con alcune varianti oltre che nel cristianesimo in altre figure della storia europea.

Tutti i grandi eventi della storia – cultura greca, Impero romano, Cristianesimo, Rinascimento, Illuminismo, Capitalismo, Comunismo e la scienza moderna – sono da un lato il risultato della *poiesis* platonica e dall'altro vogliono porsi come il rimedio all'angoscia del nulla e al fatto che le cose, gli enti sono slegati tra loro. (Slegati) significa separati, isolati, divisi. La causa separante è nell'oscillazione delle cose tra l'essere e il niente. E questa separazione sta alla base di ciò che chiamiamo Europa. Non c'è una sola Europa, ma molte Europe: politica, religiosa, economica, geografica, etnologica ecc. Il loro reciproco isolamento impedisce che sia possibile una vera ed efficace unificazione.

E' vero che le figure storiche, cristianesimo in testa, rappresentano il tentativo di identità e unificazione di un certo mondo storico. Ma è un tentativo destinato a fallire. Sono radici improbabili. Tutte le grandi figure della storia europea – da Alessandro Magno, passando per l'Impero romano, e via via per il cristianesimo e il cattolicesimo – sono dei tentativi di unificazione. Mostrano la volontà di superare la separazione delle cose. La stessa filosofia, quando si allontana dal mito, intende indicare un principio unitario. Anche la scienza nasce come volontà di unificazione del mondo fisico. Lo stesso capitalismo intende abbattere le barriere e i confini e porsi come visione globale del mondo. (Tuttavia) non funziona l'idea che ci possa essere una forma storica così persuasiva e forte da impedire la dissoluzione delle cose del mondo.

A un certo punto della storia del pensiero filosofico qualcuno si renderà conto di questa impossibilità. Un'immagine: il "sottosuolo filosofico dell'Occidente" (è) un luogo abitato da pochissimi pensatori. Tra questi Leopardi, Nietzsche, Dostoevskij. Essi mostrano l'impossibilità di ogni eterno, di ogni unità definitiva del mondo. Ma poiché le figure storiche sono delle mondanizzazioni del divino, questa impossibilità si estende anche a quelle forme. Come direbbe Dostoevskij tutto diventa possibile. L'uomo agisce e vuole dominare il mondo. L'esistenza di Dio costituisce un limite all'azione dell'uomo. Dio dice all'uomo: puoi agire fino a un certo punto, oltre violeresti le mie leggi. I pensatori del sottosuolo nel momento in cui distruggono il divino, fanno saltare ogni limite posto dall'assoluto. Essi dicono che non c'è limite all'azione umana e che l'uomo può agire senza remore.

La conseguenza principale è che essi portano alla luce l'assurdo di quella frase iniziale, che è la vera follia dell'Occidente: le cose escono dal nulla, sostano nell'esistenza e finiscono nel nulla. Può sembrare paradossale ma la negazione di Nietzsche e Leopardi che "Dio ha creato il mondo", è la condizione affinché la tecnica, che già guida il mondo, si liberi dagli impacci che la tradizione le pone e possa procedere nell'incremento indefinito della propria potenza. In origine è un fenomeno europeo. Col tempo è diventato planetario.

Tutte le grandi forze che oggi dominano il pianeta (Cristianesimo, Islam, Capitalismo, Comunismo, Populismo) confliggono tra di loro e si servono della tecnica per realizzare i loro scopi. Proprio perché nessuna di queste forze può fare a meno della tecnica, la tecnica è destinata a prendere il sopravvento. Sta già accadendo. E il problema non è rassegnarsi o reagire. Il discorso non è un'esortazione, un progetto, un invito, una sollecitazione ad agire. Un intellettuale che dicesse cosa fare sarebbe patetico. Non si tratta di indicare ai popoli cosa devono fare, ma mostrare che cosa sono destinati a volere.

Goethe diceva: ah! due anime abitano nel mio petto. C'è la grande anima, che non è soggetta al trauma della lingua e della comprensione, non è un luogo o un tempo da cambiare a piacimento; e c'è la piccola anima, segnata dagli errori, dai dubbi, dalle incertezze. (E) non si può redimere la piccola anima. Sarebbe come quadrare il cerchio. Perché siamo così? Questa domanda sottende la possibilità di essere altrimenti. Ma questo non è possibile. Non nel senso di essere "gettati" nel mondo. Siamo quel che siamo perché questa è la verità

(I greci, l'Europa, la tecnica hanno profondamente travisato il senso dell'Essere e) lo hanno colto in una prospettiva alienante. Il che ha condizionato l'intera storia d'Europa e dell'Occidente. Sicché la terra dell'apparire si è trasformata nella terra desolata di Eliot. O meglio: nella terra infranta. Siamo più di Dio, poiché Dio è un'invenzione dell'alienazione. Siamo all'apparire della verità che non appartiene a Dio né alla verità tradizionale. E non ci sono piccole cose, perché tutte sono eterne.

Nessuno può guidare (la grande anima). Essa appartiene al tratto originario del destino, ossia all'apparire della necessità. Si esce dal nichilismo, di cui l'Europa è stata l'interprete, pensando a qualcosa di infinitamente più grande di Dio. Ogni cosa, anche la più umile è eterna. E' ciò il destino della necessità. Il destino è qualcosa di profondamente diverso dal fatalismo che è l'altra faccia del culto della libertà. Quest'ultima lega la responsabilità al tempo della decisione. Per cui si è responsabili solo quando si decide di esserlo. Mentre la presenza del destino rende l'uomo responsabile fin dalla nascita. Lo è sempre e non a fasi alterne

Non credo che sia facile tradurre (tutto questo in un discorso sull'Europa). Parlare di unificazione, celebrare i trattati, tornare alla volontà di coloro che videro nell'unità dei popoli il sogno dell'Europa è individualmente encomiabile. Ma temo che l'Europa sia nata vecchia. Il suo destino è segnato dal destino dell'Occidente. Viviamo in un mondo in cui il prossimo è stato massacrato e le leggi sono state violate. Perché? Se non si sa rispondere a questa domanda in modo radicale, allora ogni tipo di unificazione politica è un dogma. E ogni dogma è una forma di violenza.

Quadri a confronto

Costellazioni di teorie, in competizione fra loro, sono ben esemplificate da copie rielaborate di dipinti.



Eugène Delacroix, Pietà (National Museum, Oslo)



Vincent Van Gogh, Pietà (Van Gogh Museum, Amsterdam)



Diego Velázquez, Las Meninas (Museo del Prado, Madrid)



Pablo Picasso, Las Meninas ⁹ (Museu Picasso, Barcellona)

Un commento “profano” accosta i passaggi pittorici dal Romanticismo al Post-impressionismo e dal Barocco al Cubismo, a quelli scientifici dalla geometria euclidea alle geometrie riemanniane e dalla fisica newtoniana alla fisica einsteiniana, come in filosofia dal criticismo kantiano all'empirismo critico ed allo strutturalismo (pur attualmente in mancanza di una nuova grande sintesi, forse oggi ormai impossibile, tanto sul versante scientifico, quanto su quello filosofico).

⁹ Questa figura è una di 58 studi, sul tema Las Meninas di Velázquez, dello stesso Picasso, tutti conservati a Barcellona.

Scienza e filosofia: le ragioni dell'incertezza ¹⁰

La separazione e l'incomunicabilità tra scienza e filosofia ¹¹, che talvolta caratterizza la cultura odierna, è relativamente recente. Senza scomodare il pensiero antico, o quello moderno, anche in tempi vicini, non sono mancati scienziati che si sono occupati direttamente di problematiche filosofiche (epistemologiche in massima parte, ma non solo), né filosofi che si sono occupati con competenza di problematiche scientifiche. Le ragioni che hanno portato al divorzio sono molte, ma questo stato di fatto non deve tuttavia impedirci di vedere come da un lato lo scienziato, volente/nolente, è condizionato, ora positivamente, ora negativamente, da scelte teoriche (metafisiche?), da "concezioni del mondo", senza le quali in realtà la scienza non potrebbe progredire, dall'altro la filosofia se non vuole finire nella vuota chiacchiera autoreferenziale, deve fare i conti coi saperi particolari, in primis con le scienze. La fisica mette in relazione tra loro, usando il linguaggio della matematica, i risultati degli esperimenti e le misure. Tuttavia le cose non sono così semplici e scontate, perché se si comincia a riflettere cosa significa effettuare una misura, anche una molto semplice, si apre un pozzo, senza fondo, di sottigliezze e questioni tuttora irrisolte. Che fare allora?

Molte sono le critiche possibili, connesse con l'esecuzione delle misure, a partire dalle difficoltà e dalle loro incertezze, ma le misure sono comunque necessarie, per la conoscenza del mondo e l'accrescimento della conoscenza stessa, perché fare misure è la base del progresso scientifico. La fisica moderna si scontra con il problema dell'incertezza, addirittura a livello delle sue fondamenta teoriche, ma l'incertezza epistemologica è presente nella fisica classica. Ad esempio, la seconda legge newtoniana della dinamica mette in relazione una forza ed una massa, mediante l'accelerazione di un corpo in movimento, cosicché nota, per altra via, l'accelerazione, una sola relazione lega la forza e la massa, senza tuttavia aver impedito la costruzione della fisica classica (che rimane pienamente valida per tutte le velocità lontane dalla velocità della luce).

La pubblicazione, nel 1927, delle relazioni d'indeterminazione, da parte di Werner Heisenberg, scatenò un accesissimo dibattito, sul concetto di causalità e sul determinismo che coinvolse tutti i massimi scienziati e filosofi dell'epoca. La posta in gioco sembrava essere la perdita della certezza, soprattutto quando s'impose la cosiddetta "interpretazione di Copenhagen", cioè l'interpretazione puramente stocastica dei fenomeni fisici (dove anche il concetto di realtà è messo in discussione). Infatti se è vero che, solo all'atto della misurazione fisica, si può ottenere un valore reale, in meccanica quantistica, finché la misura non è effettuata, l'"oggetto quantistico" rimane "oggettivamente indefinito", sebbene matematicamente lo sia. Perciò esso definisce solo la "potenzialità" dell'oggetto ed allora di che realtà si sta parlando?

La formulazione innovativa del principio di indeterminazione di Heisenberg pone il problema della casualità della realtà. Infatti la meccanica quantistica nasce dalla teoria del corpo nero di Max (Marx Karl Ernst Ludwig) Planck e dalla spiegazione dell'effetto fotoelettrico di Albert Einstein, ma fin qui la questione della casualità non era ancora centrale, in fisica, mentre inizia a diventarlo con la definizione dei livelli quantici, da parte di Niels Henrik David Bohr. D'altra parte, il principio di indeterminazione pone un limite alla precisione della misurazione congiunta di posizioni e velocità, stabilendo che quanto maggiore è la precisione della localizzazione spaziale di una particella, tanto minore è la precisione della determinazione della sua quantità di moto (e viceversa).

Questa considerazione nega la certezza della misurabilità del mondo ed impone che le misurazioni siano probabilistiche, andando oltre l'incertezza metrologica della fisica classica. Di conseguenza, se la natura e le sue leggi sono solo stocastiche, come sono nella cosiddetta interpretazione di Copenhagen della meccanica quantistica, cosa è la realtà e, in particolare, la causalità, a partire dal principio di causa ed effetto, della

¹⁰ Quanto segue riprende i temi di un Ciclo di seminari, in memoria di Adriano Morando (Politecnico di Milano – DEIB, 19 maggio 2017), cui chi scrive ha partecipato. Comunque il contenuto dell'intero paragrafo è solo un libero riassunto e non impegna la responsabilità di alcun relatore, circa le cose qui scritte.

¹¹ Questa riflessione scientifica e filosofica è incentrata sul dialogo, nell'ordine dato, tra un fisico, un filosofo ed un misurista, e questo confronto intende ricordare l'impegno profuso, in tal senso, dallo studioso prematuramente scomparso.

fisica e della logica. A riguardo, ad esempio, è nota la polemica di Einstein secondo il quale “Dio non gioca a dadi”, perché è inaccettabile una fisica probabilistica. In questo modo, il rifiuto della meccanica quantistica e del principio di indeterminazione porta addirittura a paragonarli con l’invenzione “ad hoc” degli epicicli, nella teoria tolemaica.

Più sfumata, è invece l’interpretazione di Wolfgang Ernst Pauli che, in una lettera a Bohr, definisce Einstein un realista (e non un determinista), perché richiedente di misurare con certezza, significando che la misura non perturbi l’oggetto osservato. Invece la meccanica quantistica, nella sua formulazione originale, stabilisce che la perturbazione, prodotta dalla misura, sia rilevante e tale da alterare le misure stesse (oltretutto questa meccanica studia particelle subatomiche con gli strumenti propri della realtà macroscopiche). A tutto ciò, si aggiunge la teoria della complementarità, proposta da Bohr (a Como, sempre nel 1927), in base alla quale si ha una doppia interpretazione, ondulatoria e corpuscolare, di tutte le particelle subatomiche, così come dei fotoni (o quanti di luce).

In questo modo, grazie ad un’interpretazione stocastica moderata, il principio di causalità rimane valido solo per la successione temporale di eventi vicini. Più sfumata, in questo caso, è la posizione di Louis-Victor Pierre Raymond De Broglie che introduce la proposta, fortemente controversa, di variabili nascoste, per poter tornare al determinismo. A riguardo, Erwin Schrödinger, inizialmente a favore dell’interpretazione di Copenhagen (è famoso il paradosso del gatto, insieme vivo e morto, perché chiuso in una scatola nera, con una fiala, contenente un veleno mortale, che potrebbe rompere liberandolo in quell’ambiente), ne diventa poi critico, recuperando anche l’ipotesi delle variabili nascoste di De Broglie, perché la meccanica quantistica è una teoria incompleta e solo queste variabili ne permettono il completamento.

Un excursus storico sull’indagine probabilistica della natura fa risalire certe ipotesi alla fine del ‘700 e poi per tutto l’800, con Pierre-Simon Laplace, James Clerk Maxwell e Ludwig Eduard Boltzmann. Infatti il percorso si snoda dal primo che introduce la probabilità, in assenza della certezza, ma la pensa superabile, se si ha una conoscenza completa e continua, all’ultimo che costruisce la teoria cinetica dei gas, collegandola poi al concetto di entropia. Del resto, lo stesso Planck usa la statistica, nella meccanica quantistica, come punto di partenza, richiedendo il determinismo, come punto di arrivo (cosicché i suoi quanti d’azione sono solo uno strumento matematico). Pertanto fin qui, la probabilità è solo uno strumento utile, mentre con la meccanica quantistica ne diventa parte essenziale.

Allora contro l’esperimento mentale EPR, di Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen, negli anni ‘70 del ‘900, si è riusciti a mostrare come l’atto di misura sui quanti di luce dipenda dalle misure precedenti, effettuate in altri siti. Questi nuovi principi fisici hanno un loro impatto anche sulle concezioni filosofiche della realtà e della conoscenza. Tuttavia occorre essere cauti nel travaso di certe teorie da un ambito ad un altro, tenendo in debito conto i vari contesti storici. Ad esempio, è noto il carteggio fra Pauli e lo psicologo analitico Carl Gustav Jung, mentre non si evidenziano relazioni fra la meccanica quantistica, le teorie della relatività (ristretta e generale), l’assioma della scelta (di Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo) ed anche i due teoremi di incompletezza (di Kurt Gödel), con la psicanalisi di Sigmund (Sigismund Schlomo) Freud.

Tra i primi contributi filosofici, collegati ai nuovi principi fisici, si segnala quello di Grete Hermann, allieva della matematica Amalie Emmy Noether, che sostiene la teoria delle variabili nascoste, per salvare il principio di causalità, ed adotta una concezione puramente funzionalista, in quanto può esistere solo ciò che è misurabile. Idee simili sono poi formulate anche all’interno del Circolo (logico-matematico) di Vienna, dal suo animatore Moritz Schlick. Più vasto è comunque l’eco di questi nuovi principi fisici. Ad esempio, il filosofo

neokantiano Ernst Cassirer (che già si è interessato alle due teorie della relatività, collegandole alle sintesi critiche kantiane e, in particolare, alla sua concezione dello spazio e del tempo) afferma che le cose esistono solo in base alla loro modellazione matematica, mediante le equazioni.

Di conseguenza, Cassirer cancella il realismo ingenuo, perché non esiste una corrispondenza diretta fra cose e conoscenza, e l'incertezza è insita nella realtà. Una posizione analoga è anche assunta dal filosofo neopositivista Hans Reichenbach, animatore del Circolo di Berlino, secondo il quale l'incertezza è presente già nella meccanica classica che opera sempre con precisioni finite, oltre alle quali si apre necessariamente il campo probabilistico e stocastico. Così una rilettura conclusiva di quel grande periodo individua in Einstein la sintesi finale della fisica classica (dove il suo principio di covarianza generale ha quasi il ruolo dei giudizi sintetici a priori kantiani), mentre Bohr e l'interpretazione di Copenhagen della meccanica quantistica sono l'inizio, vero e proprio, della fisica moderna.

Misurare è un modo per conoscere la realtà circostante. Tuttavia chi misura deve convivere con il proprio personale incubo che così si chiama "incertezza". E' la "misura" (e che altro potrebbe essere?) della propria incapacità di giungere ad una conoscenza "completa" misurando. L'indeterminazione, per chi misura, non è un'opzione: è la realtà con cui convivere. E' sempre stato così, fin da quando, l'uomo ha iniziato ad utilizzare strumenti per estendere le proprie capacità sensoriali e ha lentamente acquisito piena consapevolezza delle proprie "incertezze", nel corso dei secoli. Una riflessione, su questo percorso e su quanto cammino ancora resta da percorrere, dovrebbe aiutare a trovare qualche certezza, attraverso l'incertezza.

Fare misure lascia sempre una certezza: le misure sono sempre sbagliate (ed anche se una fosse esatta, non si potrebbe saperlo). Compito della metrologia è definire di quanto una misura è sbagliata, cioè valutare la sua incertezza. Per questo, il primo elemento dell'incertezza stabilisce l'usabilità stessa dello strumento di misura, al fine di fare ed ottenere le misure richieste ed attese. La metrologia è la scienza che sovrintende, in generale, all'esecuzione ed al trattamento delle misure. Essa è già propria di alcuni animali superiori, come le scimmie antropomorfe, e di essa non si conosce una data iniziale e né come sia nata. Per contro, le misure possono essere strumento di conoscenza, essenziale per fare scienza e per lo sviluppo della tecnica, oppure uno strumento di misura (e basta).

Il metrologo Brian Peter Kibble, recentemente scomparso ed inventore della bilancia di Watt (attraverso la quale sarà possibile definire il kilogrammo, andando così oltre il peso campione: l'ultima misura campionaria, ancora legata ai campioni fisici, vecchi e deteriorabili) sostiene che, ad esempio, il regolo precede la ruota, perché due ruote uguali necessitano del confronto fra i loro diametri (come pure una sola ruota di una buona simmetria, rispetto al suo centro). Le prime misure antiche, storicamente documentate, sono i regoli per la misura delle lunghezze, in Egitto, e le anfore per la misura delle capacità e dei volumi, in Grecia. Queste due misure sono misure (e basta), anche se le misure di Archimede di Siracusa ed Eratostene di Cirene, nel mondo ellenistico, sono certamente strumenti di conoscenza.

Invece sono sicuramente strumenti di conoscenza i campioni romani di lunghezza, capacità e volume, peso, massa ed unità monetaria. Questi campioni di cui si hanno notizie storiche, così come le serrature metalliche ed i tappi di marmo (in sostituzione dei rubinetti, allora inesistenti), ritrovati negli scavi di Pompei, attestano un loro uso, nella Roma della tarda repubblica ed dell'impero. Il medioevo e soprattutto l'alto medioevo sono descritti come un periodo d'involuzione scientifica e tecnologica. In questo modo, se il passaggio da misure astronomiche a misure magnetometriche costituisce un avanzamento tecnologico, il non riconoscere la loro minore accuratezza e precisione (nel posizionamento delle facciate delle chiese ad ovest e delle loro absidi ad est) dimostra una regressione scientifica.

Con l'empiria rinascimentale, artigianale ed artistica, nasce un nuovo concetto moderno: l'incertezza che si consolida, nel '600, con la scienza nuova, mostrata dagli usi del cannocchiale, da parte di Galileo Galilei, e soprattutto dall'invenzione barometro, ad opera di Evangelista Torricelli. Il consolidarsi di queste attenzioni si ha poi con l'Illuminismo e la Rivoluzione francese, dove il noto trasformista Charles-Maurice de Talleyrand-Périgord incarica gli astronomi e geodeti Pierre François André Méchain e Jean-Baptiste Joseph Delambre di eseguire una nuova triangolazione, per tutta la Francia (da Barcellona a Dunkerque), al fine di definire il metro campione, come strumento di misura universale. E' anche il momento in cui si perfeziona il metodo sperimentale e si riconosce che le teorie, senza una verifica sperimentale, non sono nulla.

L'800, si apre con lo studio di un nuovo campo di forze, quelle elettro-magnetiche, con la pila di Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta, le teorie di Michael Faraday, le leggi di James Clerk Maxwell, ecc., dove per la prima volta, i cinque sensi si dimostrano non in grado di misurare queste nuove grandezze fisiche, elettriche e magnetiche, e gli strumenti di misura si dimostrano non solo molto utili, ma anche strettamente necessari (a riguardo, nel 1870, lo stesso Maxwell istituisce i primi campioni permanenti, per queste nuove grandezze fisiche). Nel 1875, a Parigi, con la convenzione del metro, è fondato il Bureau international des poids et mesures (BIPM), con sede a Sèvres, costituendo così la seconda convenzione internazionale, dopo quella sui telegrafi, stipulata a Londra, nel 1865.

Da ultimo, ricordando che le misure hanno sempre accompagnato tutta l'esistenza umana e talvolta anche la precedono, due veri e propri monumenti costruiti sono presentati a mo' di strumenti di misura. Il primo è Stonehenge, nell'Inghilterra sud-occidentale, forse un antichissimo osservatorio astronomico, ricordando che osservazioni astronomiche risalgono alla Mesopotamia sumerica ed all'antico Egitto pre-dinastico. Il secondo è il nuovo Large Hadron Collider (LHC), del Cern di Ginevra: oggi la più grande costruzione. In quella stessa sede, notevoli sono anche tutte le misure di supporto al funzionamento delle apparecchiature presenti (da quelle geodetiche, sul loro corretto posizionamento, verticale ed orizzontale, a quelle per la taratura della strumentazione di misura adottata).

Questi nuovi principi fisici (dalle due teorie della relatività alla meccanica quantistica) hanno un grandissimo impatto sulle tecnologie moderne e conseguentemente sulla vita quotidiana di tutti e di ciascuno, anche se è difficile accorgersene. Del resto, anche la rivoluzione copernicana e la meccanica galileiana e newtoniana sono spesso trasparenti, rispetto al vivere comune, in base al quale il sole sorge e tramonta (e si ignora così la rotazione terrestre), e le forze sono proporzionate alle velocità (e non alle accelerazioni). Invece questi nuovi principi fisici regolano molti aspetti della vita quotidiana, dalle misure del tempo e dello spazio, al vasto mondo dell'elettronica e dell'informatica, in tutti i suoi aspetti (dalla produzione di energia all'automazione industriale, fino alle biotecnologie ed alla medicina moderna).

Tutto questo ha un impatto determinante anche nelle discipline del rilevamento. Ad esempio, i vari metodi di posizionamento sono stati completamente rivoluzionati dall'avvento del GPS (o meglio del GNSS) e di altre tecniche di posizionamento remoto: satellitare, aereo e terrestre (SAR, LIDAR, ecc.), nonché dall'avvento di tecnologie automatiche, in topografia. Analogamente i vari metodi di rilevamento per immagini sono stati completamente rivoluzionati dall'avvento delle modalità digitali, come pure i vari metodi di archiviazione e rappresentazione dei geodati e di mappe sono passati dai supporti analogici e quelli informatici, facendo un salto paragonabile a quello dell'invenzione della stampa, a caratteri mobili. In questo stesso contesto anche le tecniche di calcolo sono passate da manuali ad automatiche, accrescendo enormemente la loro potenza.

Trasformazione di variabili casuali: teorema della/e media/e**legge di propagazione della varianza e varianza-covarianza**

La trasformazione di variabili casuali fa passare dalla statistica descrittiva alla teoria della stima ed alle modellazioni statistiche, più sofisticate. Infatti il teorema delle medie e soprattutto la legge di propagazione della varianza-covarianza permettono di calcolare le stime dei valori medi di osservazioni indirette, come funzioni di quantità osservate, e di affiancare queste stime con metadati, per conoscere la loro precisione e la loro dipendenza interna. D'altra parte, è evidente come solo alcune grandezze possono essere oggetto di osservazioni dirette, mentre altre grandezze, spesso di grande interesse ed utilità, non lo possono essere.

□ Ad una dimensione: dalla media e varianza di x a quelle di y , per mezzo dell'equazione $y = g(x)$:

input:

$$\bar{x} = E(x p(x))$$

$$\sigma_x^2 = E((x - \bar{x})^2 p(x))$$

$$y = g(x) \cong g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

$$\bar{y} = E(y p(y))$$

$$\sigma_y^2 = E((y - \bar{y})^2 p(y))$$

nota: $E(p(x)) = 1$ $E((x - \bar{x})p(x)) = 0$

output:

$$\bar{y} = E(y p(y)) \cong g(\bar{x})E(p(x)) + g'(\bar{x})E((x - \bar{x})p(x)) = g(\bar{x})$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E((y - \bar{y})^2 p(y)) \cong E((g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x - \bar{x}) - g(\bar{x}))^2 p(x)) = g'(\bar{x})^2 E((x - \bar{x})^2 p(x)) = \\ &= g'(\bar{x})^2 \sigma_x^2 \end{aligned}$$

□ A più dimensioni: dal vettore delle medie e dalla matrice di varianza-covarianza di X al vettore delle medie ed alla matrice di varianza-covarianza di Y , per mezzo del sistema di equazioni $Y = G(X)$:

input:

$$\bar{X} = E(X p(X))$$

$$C_{XX} = E((X - \bar{X})(X - \bar{X})^T p(X))$$

$$Y = G(X) \cong G(\bar{X}) + J(\bar{X})(X - \bar{X})$$

$$\bar{Y} = E(Y p(Y))$$

$$C_{YY} = E((Y - \bar{Y})(Y - \bar{Y})^T p(Y))$$

con $J = [\partial g_i / \partial x_j] \quad \forall i, j$ matrice Jacobiana

output:

$$\bar{Y} = E(Y p(Y)) \cong G(\bar{X})E(p(X)) + J(\bar{X})E((X - \bar{X})p(X)) = G(\bar{X})$$

$$\begin{aligned} C_{YY} &= E((Y - \bar{Y})(Y - \bar{Y})^T p(Y)) \cong E((G(\bar{X}) + J(\bar{X})(X - \bar{X}) - G(\bar{X}))^T p(X)) \\ &= J(\bar{X})E((X - \bar{X})(X - \bar{X})^T p(X))J(\bar{X})^T = J(\bar{X})C_{XX}J(\bar{X})^T \end{aligned}$$

e, semplificando la notazione, per il caso lineare ($Y = AX + B$):

$$\bar{Y} = A\bar{X} + B$$

$$C_{YY} = AC_{XX}A^T$$

ovvero in termini algebrici ¹²:

¹² Le espressioni algebriche del caso lineare si adattano anche al caso non-lineare, con la ridefinizione dei loro termini (del resto, tutte le notazioni sono sempre largamente arbitrarie e la scelta di una, tra le tante possibili, è spesso solo una questione di opportunità).

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{x}_i + b \quad \forall y$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_i a_j \sigma_{x_i x_j} \quad \forall y$$

$$\sigma_{yz}^2 = \sum_{i=1}^n a_i b_i \sigma_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (a_i b_j + b_i a_j) \sigma_{x_i x_j} \quad \forall y, z > y$$

dove le espressioni algebriche della varianza e della covarianza sono ricavabili, avendo riscritto:

$$C_{YY} = A C_{XX} A^T \quad \Rightarrow \quad \text{vec}(C_{YY}) = (A \otimes A) \text{vec}(C_{XX})$$

con vec operatore che trasforma una matrice in un vettore
 $\otimes$ prodotto di Kronecker: $A \otimes B = [a_{ij} B] \quad \forall i, j$

Un esempio numerico elementare permette di mettere in pratica la teoria statistica.

MEDIE X	MATRICE VAR-COV. X			
1	0.1	0.01	0	
0		0.1	0.01	
-1			0.1	
SISTEMA DI EQ.	MATRICE DEI COEF.			
y=x(1)+x(2)+x(3)	1	1	1	
y=x(1)-x(2)+x(3)	1	-1	1	
y=x(1)+x(2)-x(3)	1	1	-1	
y=x(1)-x(2)-x(3)	1	-1	-1	
MEDIE Y	VAR. Y	COVARIANZE Y		
0	0.34	0.1	0.12	-0.12
0	0.26	-0.08	0.08	
2	0.3	0.1		
2	0.3			
	MATRICE VAR-COVARIANZA Y			
	0.34	0.1	0.12	-0.12
		0.26	-0.08	0.08
			0.3	0.1
				0.3

Un esempio geometrico reale permette invece di valutare le capacità del metodo statistico. Infatti dovendo misurare alcune caratteristiche geometriche di un rettangolo, è immediato misurarne direttamente i due lati (avendo assunto che, per costruzione, è retto l'angolo compreso), meno agevole è misurarne il perimetro e soprattutto l'area, mentre la diagonale potrebbe essere meno accessibile e per l'angolo, sotteso da questa, si deve ricorrere ad un altro strumento di misura. A riguardo, misurati i lati e calcolate le loro medie, occorre definire i loro errori di misura, in base a considerazioni operative ed alla letteratura specialistica. Dopodiché in generale, si assumono tutte indipendenti le osservazioni dirette, soprattutto se la precisione di queste non è eccessiva e tale da far supporre la presenza di piccoli errori sistematici o pseudo – sistematici nascosti.

❑ Osservazioni dirette:

- ❑ lato maggiore: $a = 4$
 ❑ lato minore: $b = 3$

❑ Varianze delle osservazioni dirette: $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = 0.02$

❑ Osservazioni indirette: (derivate parziali)

❑ perimetro:	$2p = 2a + 2b$	$\frac{\partial(2p)}{\partial a} = 2$	$\frac{\partial(2p)}{\partial b} = 2$
❑ Area:	$A = ab$	$\frac{\partial A}{\partial a} = b$	$\frac{\partial A}{\partial b} = a$
❑ diagonale:	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{\partial d}{\partial a} = \frac{a}{d}$	$\frac{\partial d}{\partial b} = \frac{b}{d}$
❑ tangente dell'angolo:	$t = \tan \vartheta = b/a$	$\frac{\partial t}{\partial a} = -\frac{t}{a}$	$\frac{\partial t}{\partial b} = \frac{t}{b}$

❑ Varianze delle osservazioni indirette:

❑ perimetro: $\sigma_{2p}^2 = 2^2 \cdot 0.02 + 2^2 \cdot 0.02 = 0.16$

❑ Area: $\sigma_A^2 = b^2 \cdot 0.02 + a^2 \cdot 0.02 = 3^2 \cdot 0.02 + 4^2 \cdot 0.02 = 0.50$

❑ diagonale: $\sigma_d^2 = \left(\frac{a}{d}\right)^2 0.02 + \left(\frac{b}{d}\right)^2 0.02 = \frac{4^2}{5^2} 0.02 + \frac{3^2}{5^2} 0.02 = 0.02$

❑ tangente dell'angolo: $\sigma_t^2 = \left(-\frac{t}{a}\right)^2 0.02 + \left(\frac{t}{b}\right)^2 0.02 = \frac{3^2/4^2}{4^2} 0.02 + \frac{3^2/4^2}{3^2} 0.02 = 0.0019_{53125}$

❑ Covarianze delle osservazioni indirette:

❑ perimetro/Area: $\sigma_{2pA} = 2b \cdot 0.02 + 2a \cdot 0.02 = 2 \cdot 4 \cdot 0.02 + 2 \cdot 3 \cdot 0.02 = 0.28$

❑ perimetro/diagonale: $\sigma_{(2p)d} = 2 \frac{a}{d} 0.02 + 2 \frac{b}{d} 0.02 = 2 \frac{3}{5} 0.02 + 2 \frac{4}{5} 0.02 = 0.056$

❑ perimetro/tangente: $\sigma_{(2p)t} = 2 \frac{t}{b} 0.02 + 2 \left(-\frac{t}{a}\right) 0.02 = 2 \frac{4/3}{3} 0.02 - 2 \frac{4/3}{4} 0.02 = 0.0044_{(44)}$

❑ Area/diagonale: $\sigma_{Ad} = b \frac{a}{d} 0.02 + a \frac{b}{d} 0.02 = 3 \frac{4}{5} 0.02 + 4 \frac{3}{5} 0.02 = 0.096$

❑ Area/tangente: $\sigma_{At} = b \left(-\frac{t}{a}\right) 0.02 + a \frac{t}{b} 0.02 = -3 \frac{3/4}{4} 0.02 + 4 \frac{3/4}{3} 0.02 = 0.0087_5$

❑ diagonale/tangente: $\sigma_{dt} = \frac{a}{d} \left(-\frac{t}{a}\right) 0.02 + \frac{b}{d} \frac{t}{b} 0.02 = -\frac{4}{5} \frac{3/4}{4} 0.02 + \frac{3}{5} \frac{3/4}{3} 0.02 = 0$

Una puntigliosa precisazione segnala che le entità numeriche delle lunghezze dei lati, come quelle delle loro precisioni (qui espresse rispettivamente in m e m^2), non sono compatibili con una qualsiasi tecnica di misurazione, accurata, precisa ed affidabile. Infatti un errore relativo pari al 4% è sicuramente eccessivo; tuttavia questa scelta numerica evita la scrittura di numeri insieme troppo grandi e troppo piccoli, e facilita quella lettura statistica, appositamente voluta, dell'esempio geometrico.

Le variabili statistiche semplice e doppia

Semplici esempi, di sicuro interesse, sono dati dalla variabile statistica semplice e dalla variabile statistica doppia, con il calcolo della/e media/e e della retta di regressione, in entrambi i casi, con il calcolo della varianza, così come di tutte le varianze decomposte/trasformate, facendo tuttavia esclusivo riferimento alla variabile statistica doppia. Infatti proprio la varianza generale della variabile statistica doppia si decompone ortogonalmente nella varianza spiegata (a sua volta, varianza di tutte le medie condizionate della suddetta variabile) e nella varianza residua (che è la media delle corrispondenti varianze condizionate).

In aggiunta, date due medie e due varianze, oltreché una covarianza (oppure un coefficiente di correlazione lineare semplice), se le due componenti della variabile statistica doppia sono correlate fra loro, è sempre possibile costruire statistiche trasformate di cui la somma, la differenza, il prodotto ed il quoziente sono le più semplici, ma soprattutto le più comuni. Invece per quanto riguarda la dovuta attenzione alla robustezza, se in presenza di errori grossolani, basta sostituire le mediane alle medie ed i valori assoluti mediani (in inglese, *median absolute value*, in sigla: mav) alle varianze ¹³.

<u>media:</u>	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	<u>varianza:</u>	$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
varianza della media:	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$	varianza della varianza:	$\sigma_{\sigma^2}^2 = \frac{2\sigma^4}{n} \quad 14$
numero di condizione:	$\chi_{\infty} = n^2$	ridondanza locale:	$\nu = 1 - 1/n$

Poche parole servono a commentare i tre indici, inerenti precisione, affidabilità e condizionamento. Infatti per la legge di propagazione della varianza, la precisione della media cresce proporzionalmente al crescere della radice quadrata della numerosità dei dati, cosicché la sua varianza decresce proprio al crescere della numerosità dei dati stessi. Inoltre per il teorema di decomposizione ortogonale della varianza, essendo ortogonali fra loro la media ed ogni scarto di dati dalla media, l'affidabilità (misurata come ridondanza locale) di ogni dato si allontana dall'unità per un valore pari all'inverso della numerosità stessa.

Infatti tanto più grande è la numerosità dei dati e quanto maggiore è l'affidabilità del singolo dato, mentre poi tanto più piccola è la numerosità dei dati e quanto minore è l'affidabilità del singolo dato (avendo valori limite uno e zero, rispettivamente per infiniti dati ed un dato solo). Inoltre uno è il condizionamento, in quanto sarebbe infinito, volendo una media, senza avere dati (il che è evidentemente assurdo). Infine le procedure robuste sostituiscono la media e la varianza, con la mediana ed il valore assoluto mediano, permettendo così l'individuazione e l'eliminazione degli errori grossolani.

Passando dalla variabile statistica semplice alla variabile statistica doppia, occorre fornire le espressioni per il calcolo dei coefficienti delle rette di regressione, la loro matrice di varianza e covarianza, la propagazione della varianza, dei dati interpolati e degli scarti-residui, e sigma zero. Da questi metadati, occorre ricavare poi informazioni sul condizionamento del sistema e l'affidabilità del piano dei dati. Dopodiché di nuovo, le mediane ed i valori assoluti mediani permettono il calcolo di una regressione robusta, con rette interpolate non sensibili all'eventuale presenza di errori grossolani (risultando così non distorte).

¹³ La sostituzione di algoritmi ottimali con procedure robuste, se da una parte offre robustezza agli stimatori, dall'altra fa perdere loro proprio le proprietà statistiche ottimali, ad esempio, come la suddetta decomposizione ortogonale e la linearità degli stessi stimatori.

¹⁴ In questo caso, è necessario fare l'ipotesi aggiuntiva di normalità di tutti i dati, in quanto, solo così, il momento di quarto ordine è tre volte il quadrato del momento di secondo ordine.

rette di regressione:

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

e

$$c = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$$

$$d = \bar{x} - c\bar{y}$$

matrici di covarianza:

$$\begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \bullet & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{n\sigma_x^2} & -\frac{\bar{x}}{n\sigma_x^2} \\ \bullet & \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\sigma_x^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_c^2 & \sigma_{cd} \\ \bullet & \sigma_d^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{n\sigma_y^2} & -\frac{\bar{y}}{n\sigma_y^2} \\ \bullet & \frac{1}{n} + \frac{\bar{y}^2}{n\sigma_y^2} \end{bmatrix}$$

dati interpolati:

$$y = ax + b$$

e

$$x = cy + d$$

varianza dei dati:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= x^2 \sigma_a^2 + 2x\sigma_{ab} + \sigma_b^2 = \\ &= \frac{\sigma_{0_v}^2}{n} \left(1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{n\sigma_x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= y^2 \sigma_c^2 + 2y\sigma_{cd} + \sigma_d^2 = \\ &= \frac{\sigma_{0_u}^2}{n} \left(1 + \frac{(y - \bar{y})^2}{n\sigma_y^2} \right) \end{aligned}$$

scarti residui:

$$v = y_0 - y$$

e

$$u = x_0 - x$$

varianza degli scarti:

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= \sigma_{y_0}^2 - \sigma_y^2 = \\ &= \sigma_{0_v}^2 \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{(x - \bar{x})^2}{n\sigma_x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= \sigma_{x_0}^2 - \sigma_x^2 = \\ &= \sigma_{0_u}^2 \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{(y - \bar{y})^2}{n\sigma_y^2} \right) \end{aligned}$$

sigma zero quadro:

$$\sigma_{0_v}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n v_i^2$$

e

$$\sigma_{0_u}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n u_i^2$$

coefficiente di correlazione lineare semplice:

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

n. di condizione ¹⁵:

$$\chi_\infty = n^2 \sigma_x^2$$

e

$$\chi_\infty = n^2 \sigma_y^2$$

ridondanza locale:

$$v_v = \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{(x - \bar{x})^2}{n\sigma_x^2}$$

$$v_u = \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{(y - \bar{y})^2}{n\sigma_y^2}$$

regressione robusta:

$$a = \text{med}(\text{coef. ang.}_{ij} \quad \forall i, j > i)$$

e

$$c = \text{med}(\text{coef. ang.}_{ij} \quad \forall i, j > i)$$

$$b = \text{med}(y) - a \text{med}(x)$$

$$d = \text{med}(x) - c \text{med}(y)$$

dati interpolati:

$$y = ax + b$$

e

$$x = cy + d$$

scarti residui:

$$v = y_0 - y$$

$$u = x_0 - x$$

valori assoluti mediani: $\text{mav}(v) = \text{med}(|v|)$

$\text{mav}(u) = \text{med}(|u|)$

¹⁵ Il numero di condizione è calcolato come il quoziente fra l'estremo superiore della norma infinito della matrice normale e l'estremo superiore della norma infinito della matrice inversa.

coefficiente di correlazione sui ranghi:

$$r_{xy} = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (rango_y - rango_x)_i^2$$

Date poi due variabili, come già detto in precedenza, è spesso utile (ed assolutamente non difficile) calcolare grandezze derivate e/o trasformate da queste variabili, ad esempio, facendo le quattro operazioni elementari della somma, della differenza, del prodotto e del quoziente. In questo caso, in ambito lineare, i loro valori medi sono dati dai valori medi delle variabili in ingresso, nelle espressioni di somma, differenza, prodotto e quoziente. Invece è necessario far ricorso alla legge di propagazione della varianza e covarianza, per avere le varianze delle grandezze derivate e/o trasformate.

somma e differenza: $s(o\ d) = x \pm y$ $\bar{s}(o\ \bar{d}) = \bar{x} \pm \bar{y}$ $\sigma_{s(o\ d)}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm 2\sigma_{xy}$

prodotto: $p = x\ y$ $\bar{p} = \bar{x}\ \bar{y}$ $\sigma_p^2 = \frac{p^2}{x^2} \sigma_x^2 + \frac{p^2}{y^2} \sigma_y^2 + 2 \frac{p^2}{xy} \sigma_{xy}$

quoziente: $q = \frac{x}{y}$ $\bar{q} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$ $\sigma_q^2 = \frac{q^2}{x^2} \sigma_x^2 + \frac{q^2}{y^2} \sigma_y^2 - 2 \frac{q^2}{xy} \sigma_{xy}$

Un'osservazione particolare riguarda la richiesta linearità delle trasformazioni che semplifica moltissimo la trasformazione della media e sola permette la trasformazione della varianza. Infatti il teorema della media ha un suo corollario per il caso lineare, mentre la legge di propagazione della varianza e della covarianza ha valore (e significato) solo nell'ambito della linearità. In ogni caso, è lineare quello che è in corrispondenza biunivoca con una retta, tanto per la geometria della trasformazione, quanto per la concentrazione/dispersione della distribuzione di probabilità collegata.

Proprio i vantaggi esclusivi della linearità algebrica danno enfasi e sostegno alla normalità statistica, in quanto la sua forma esponenziale, con esponente quadratico, determina un criterio di stima lineare. D'altra parte, la variabile casuale normale è invariante per l'addizione di una costante ai suoi dati, risultando alterata solo la sua media, ed è altresì invariante per la moltiplicazione di una costante, con i suoi dati, risultando alterata solo la sua varianza. In aggiunta e maggiormente importanti sono poi due teoremi della normalità: il limite centrale e l'incorrelazione come indipendenza stocastica.

Infatti una combinazione lineare, a coefficienti positivi (come la semplice somma aritmetica), di variabili qualsiasi, purché indipendenti tra loro e ben ponderate (ovvero aventi varianze comparabili), è asintoticamente distribuita come la distribuzione normale e la convergenza è numericamente raggiunta attorno alla decina di dati (risultato che avvalorava le comunissime operazioni statistiche di media e media ponderata). Inoltre la suddetta incorrelazione come indipendenza stocastica fa sì che la correlazione sia l'unica forma di dipendenza, togliendo significato allo studio della connessione e della regressione, nell'ambito della normalità.

Infine nonostante i vantaggi della normalità, dalla linearità algebrica all'ottimalità statistica (con stime non deviate e di minima varianza), la possibile presenza di dati anomali (e degli errori grossolani, in particolare) impone l'impiego anche di procedure robuste, per individuare ed eliminare anomalie ed errori. Una strategia praticabile fa uso dei minimi quadrati ricorsivi in avanti, a partire da un grosso buono dei dati, a sua volta, individuato con una procedura robusta campionaria su parecchi (ma non tutti, per ovvie ragioni di calcolo) sottocampioni dei dati stessi, cercando dove si infittiscono le stime accettabili.

Fatti non foste a viver come bruti, / ma per seguir virtute e canoscenza ¹⁶

La sola alternativa possibile è il silenzio, ma così non si fa alcun passo in avanti e si nega tutta la storia delle società umane ¹⁷. Infatti un altro aspetto importante è che qualsiasi teoria scientifica è anche frutto dell'agire sociale e questo ha certamente profondi risvolti epistemologici. D'altra parte, proprio l'essere frutto dell'agire sociale lega strettamente la ricerca scientifica e/o tecnologica alla politica ed all'economia, così come esse si articolano e sviluppano, nel corso della storia. E' innegabilmente un appello alla responsabilità individuale e collettiva, oggi giorno maggiormente importante, date le enormi potenzialità dei mezzi a disposizione della scienza e della tecnica, dove talvolta (ed ancora oggi giorno sempre più spesso) principi di incompletezza ed indeterminazione ed assiomi della scelta lasciano aperte certe libertà di procedere.

In questo contesto, si situa il rapporto con le macchine cosiddette intelligenti. Innanzitutto occorre subito ben precisare l'impossibilità di prescindere da queste, pena fare un enorme balzo indietro nel progresso e nello sviluppo. A riguardo, sarebbe come voler prescindere, qui ed ora, dai mezzi di comunicazione (dalla stampa alle telecomunicazioni) e/o da tutti i mezzi di trasporto moderni: dove l'assurdo è particolarmente evidente. Invece un problema serissimo e non ancora ben affrontato è la tutela del lavoro umano che le macchine cosiddette intelligenti stanno distruggendo, tanto nel lavoro operaio, quanto in quello impiegatizio, in giù, fino a mansioni manuali ausiliarie e, in su, fino a compiti intellettuali e dirigenziali. Infatti vagheggiare fantomatici regni di oniriche libertà ha lo stesso insulso valore di sobillare pericolose tentazioni luddiste.

In questo stesso contesto, è ancora particolarmente rilevante la difesa della struttura della libertà. Infatti già è quantomeno dubbio che le macchine intelligenti generino più giustizia (intesa come equità ed uguaglianza), laddove è ben più realistico che favoriscano invece l'accrescere delle disuguaglianze. D'altra parte, proprio il costo del loro impiego segmenterà e separerà (per classe, censo, casta, ecc.) le persone, riguardo alle reali possibilità d'accesso ed alla qualità delle prestazioni fornite. Tuttavia sebbene spudoratamente sbandierate, a sostegno della bontà delle disuguaglianze, proprio le libertà rischiano di essere gravemente compromesse da varie forme, palesi e/o occulte, di controllo. In questo modo, proprio la struttura della libertà è fortemente messa a rischio, in quanto priva di quelle libertà concrete che la rendono effettiva.

In futuro saranno gli algoritmi a governarci ¹⁸ ? Oggi non c'è cosa che non ci rimandi a questa questione: dalle tecniche industriali alla diagnostica medica, dai social network al volo degli aerei, dai big data ai motori di ricerca di Google e di Yahoo! Ci affidiamo, consapevoli o no, a complesse procedure, gli algoritmi appunto, a cui deleghiamo la buona riuscita di operazioni che gli esseri umani, da soli, non saprebbero eseguire. Un recente articolo dell'*Economist* ci avverte che, in futuro, i computer diventeranno apprezzabili assistenti degli psichiatri, imparando a decifrare i pensieri che si celano dietro le nostre espressioni facciali. Una conferma del possibile impiego degli algoritmi nella medicina già immaginata da Isaac Asimov, da Arthur C. Clarke e da Gene Roddenberry, dalla cui fantasia furono concepiti gli ologrammi medici in *Star Trek: Voyager*. Ma che cosa è un algoritmo? Anzitutto, l'algoritmo è un *processo*, una sequenza di operazioni che deve soddisfare almeno due requisiti: a ogni passo della sequenza è già deciso, in modo deterministico, quale sarà il passo successivo, e la sequenza deve essere *effettiva*, cioè tendere a un risultato concreto, reale e virtualmente utile. L'effettività è la connotazione più essenziale e più ardua da definire. Ha certamente a che fare con la circostanza che le operazioni comportano un *tempo* di esecuzione e l'occupazione di uno *spazio* di memoria del computer: esse esistono anche nello spazio e nel tempo fisici e non sono assimilabili a una mera espressione aritmetica. Ma proprio questo suo carattere ibrido, tra astrazione matematica e fisicità del computer, rende l'algoritmo particolarmente attraente. Non siamo di fronte a un ente solamente ideale, ontologicamente dubbio, ma a qualcosa che potrebbe rivendicare un carattere di piena *realtà*; anche se, occorre precisare, la delega delle nostre decisioni agli algoritmi si basa su complesse teorie e su strutture

¹⁶ Dante Alighieri: *Divina Commedia* – Inferno (canto XXVI – versi 119-120).

¹⁷ Non sembri troppo, ma anche le esperienze almeno degli animali più intelligenti.

¹⁸ Dall'articolo di Paolo Zellini (*La Repubblica* – Robinson, domenica 12 marzo 2017): Siamo uomini o algoritmi? per il ciclo: La potenza dei numeri, a cura dello stesso matematico, che intende rispondere autorevolmente alle domande poste, prospettando alcune soluzioni realisticamente praticabili.

matematiche relativamente astratte. Noi pretendiamo per lo più di ignorarle, pur continuando a fregiarci della qualifica di esseri razionali, e parliamo di algoritmi come se fossero entità perfettamente note.

Da più di un secolo sappiamo che il concetto di algoritmo poggia, innanzitutto, sulla serie dei numeri naturali con cui contiamo cose e persone. Ora il grande antropologo Marcel Mauss aveva già notato che, nell'organizzazione di una società, esistono cose e persone in senso fisico o materiale prima, numerico poi, e che da epoche remote sono i numeri a costituire la base della morfologia sociale. Gli algoritmi non fanno che estendere le funzioni rituali di controllo e di ripartizione dei numeri in modi che possono diventare inaccessibili, autoritari e categorici, uno strumento utile alla società ma anche un rischio di sbilanciamento nel delicato rapporto tra categoricità e spontaneità, tra l'estranea imperiosità del meccanismo e la libertà di coscienza. Ognuno di noi ha modo di percepire la durezza e il potere di questa imposizione algoritmica, di questo calcolo che governa la nostra vocazione collettiva e gregaria.

Ma che relazione c'è tra la realtà (l'effettività) dell'algoritmo e la realtà umana? *Sully*, l'ultimo film di Clint Eastwood, può aiutare a capirlo. Il tema centrale del film è l'eroismo di Chesley Sullenberger, il provetto pilota che il 15 gennaio 2009 salvò davvero i centocinquanta passeggeri e l'equipaggio di un aereo, decidendo di ammarare sulle acque ghiacciate del fiume Hudson poco dopo il decollo, per un'improvvisa avaria dei motori causata da uno scontro con uno stormo di uccelli. Oggi, in realtà, gli aerei possono atterrare senza che il pilota neppure sfiori i comandi. I dati che individuano le condizioni atmosferiche, la posizione e la velocità dell'aereo, sono automaticamente demandati a un congegno, il cosiddetto filtro di Kalman-Bucy, che si serve di complessi algoritmi numerici per individuare la manovra più idonea ed efficace. E simili tecniche si applicano anche al volo dei missili e alle traiettorie dei satelliti, grazie ai più avanzati algoritmi per il trattamento di immagini. Ma *Sully*, avendo preso lui stesso, responsabilmente, il controllo dell'aereo, dovrà poi rispondere alle critiche sollevate dal National Transportation Board, perché le successive simulazioni di volo dimostreranno che sarebbe stato possibile atterrare su una pista regolare, anche in assenza di spinta, con minor rischio per i passeggeri e minor danno per il velivolo. Insomma gli algoritmi su cui si basano le simulazioni di volo decreteranno, con la loro effettività e perentorietà, il comportamento che un "uomo razionale" avrebbe dovuto assumere. Ma chi ha più ragione, l'eroe in carne e ossa, con i suoi tempi di reazione e di decisione, o quello affatto indifferente e razionale della simulazione algoritmica?

Nel film di Eastwood l'autorità che deve giudicare sull'operato di Sullenberger si appella agli algoritmi che assicurano che l'aereo avrebbe fatto in tempo ad atterrare a La Guardia. Tuttavia la stessa simulazione ignora il fattore umano, ovvero quei trentacinque secondi necessari al pilota per capire la situazione e prendere una decisione responsabile. Inserendo nel programma quella manciata di secondi il risultato non è più lo stesso, la simulazione dà ragione a *Sully*, che si conferma l'eroe che ha preso per istinto l'unica decisione possibile, l'ammarraggio sull'Hudson.

Ma, al di là del trauma dell'incidente, qual è la ragione del tormento che affligge il generoso comandante? In fondo è pur sempre ancora sull'algoritmo che si basa il giudizio finale del National Transportation Board sull'operato del pilota. Senza una simulazione convincente, aggiornata coi dati della reazione umana, il pilota non avrebbe modo di far valere le sue ragioni. Si intravede allora, a questo punto, una virtuale iterazione, una ripetizione senza fine in cui si riconfigura ogni volta il divario tra realtà umana e realtà algoritmica. Infatti tutto ciò che fa l'algoritmo lascia fuori di sé una domanda sulla natura più intima dell'uomo e sullo stesso algoritmo. Potrà esserci una nuova procedura meccanica più perfezionata che ci aiuti a rispondere a tale questione, ma ci sarà sempre una domanda inevasa sul carattere precipuo della nostra identità e del nostro discernimento.

Sully vive drammaticamente quella fatale dicotomia tra meccanismo e coscienza che è stata spiegata da sempre, in diverse tradizioni e con varie modalità, e che rimane oggi una delle questioni cruciali della filosofia e della scienza del calcolo. Anche in presenza dei più perfezionati algoritmi l'uomo rimanda sempre a qualcosa di esterno al loro meccanismo, a una responsabilità e a una libertà radicale che forse non esiste neppure, e che coincide infine con quella essenziale incompletezza che la tradizione filosofica e sapienziale, come pure le ricerche sulla natura della coscienza, hanno ontologicamente identificato come l'essenza stessa dell'uomo. *Sully*, e con lui lo spettatore, si affacciano su questo precipizio, dove la matematica e la vita sembrano incontrarsi e confondersi.

"Chi più onesto e valoroso ¹⁹ del celebre Amadigi di Gaula? Chi più saggio di Palmerino d'Inghilterra? Chi più accomodante e trattabile di Tirante il Bianco? Chi più galante di Lisuarte di Grecia? Chi più ferito e feritore di Don Belianigi?". L'elenco, nel terzo capitolo della seconda parte del *Don Chisciotte*, non finisce qui, e del resto Don Chisciotte è in grado di enumerare, anche in altre occasioni, un insieme spropositato di cavalieri erranti, un catalogo di nomi e di soprannomi dei più fantasiosi, della cui effettiva esistenza egli è certissimo. Quando il signor Pietro Perez, curato e amico di Don Chisciotte, dichiara il suo imbarazzo a credere che tutti quegli eroi siano esistiti in carne e ossa, l'ingegnoso *hidalgo* ha buoni motivi per spiegargli che è in errore.

¹⁹ Dall'articolo di Paolo Zellini (La Repubblica – Robinson, domenica 26 marzo 2017): Don Chisciotte cavaliere algebrico.

L'enumerazione avvalorava la tesi che i suddetti cavalieri siano vissuti davvero e chi ne dubita si inganna. Prima di morire, alla fine delle sue imprese, Don Chisciotte saprà riconoscere di essersi lui stesso ingannato. Rimane però lo sconcerto: da che cosa poteva nascere in Don Chisciotte l'idea che quei personaggi fossero davvero esistiti? Non basta attribuirne la causa alla pazzia del cavaliere errante immaginato da Cervantes. Le sue enumerazioni sono una brillante parodia dei tradizionali elenchi di uomini ed eroi, di dèi e semidei, che troviamo nelle Scritture, nell'epos di Omero, nella *Teogonia* di Esiodo e nelle tragedie di Eschilo. E non ci sono dubbi che quelle enumerazioni servissero a presentare sulla scena del mondo, in modo credibile, figure umane o divine altrimenti invisibili, insignificanti o inverosimili.

Da dove veniva questo potere realizzante dell'enumerazione? E quali sarebbero state le sue conseguenze nel nostro modo di pensare in generale? Ogni volta che contiamo gli elementi di un insieme, selezioniamo e raduniamo in una sola unità più cose disseminate, e con ciò ne rafforziamo la presenza, sveliamo quel carattere essenziale che ne assicura un'esistenza più stabile. In questo consiste pure il significato del greco *legein* e del suo sostantivo *logos*. Proprio nel richiamare il senso originario del *logos*, come rassegna o raccolta guidata da una scelta, ... (si) poteva dedurre la sua funzione precipua di svelare, di rendere manifesto, e quindi di fare esistere le cose.

I moderni algoritmi hanno ereditato un potere realizzante analogo a quello delle enumerazioni parodiate da Cervantes. Non è un caso che la scienza degli algoritmi si sia sviluppata tumultuosamente nel Ventesimo secolo, in seguito alla crisi dei fondamenti della matematica, all'incertezza sulla reale esistenza degli insiemi infiniti e alla preoccupazione per i paradossi che ne derivavano. L'esistenza di un insieme era certamente garantita, tuttavia, dalla possibilità di enumerarne e calcolarne gli elementi con un processo computazionale limitato nel tempo. In conclusione: l'infinito non esiste (proprio); esistono, invece, i numeri calcolati da un algoritmo.

Infatti l'enumerazione è la base per *definire* l'algoritmo. E' questo un compito delicato, che i matematici devono assumersi per spiegare in modo coerente e plausibile concetti che resterebbero altrimenti vaghi e confusi. Come nel caso dell'algoritmo, la matematica ha cercato definizioni convincenti per le idee di numero, di rapporto, di caso e di informazione. Spesso è accaduto che le definizioni proposte, pur coerenti e ingegnose, siano state sottoposte a revisione critica, anche a distanza di secoli.

Nel 1888 Richard Dedekind pubblicava un breve e denso trattato dal titolo *Essenza e significato dei numeri* in cui dimostrava che le principali operazioni aritmetiche possono essere ricondotte, per via di un percorso gerarchico, al puro atto di enumerare. A questo scopo si serviva di una strategia particolare che Kurt Gödel, nel 1931, avrebbe chiamato *ritorsione*, e che divenne il fondamento dell'idea stessa di algoritmo. L'algoritmo ricorsivo suddivide un problema in sotto-problemi di *dimensione più-piccola e analoghi all'originale*. Consiste quindi in un programma che prescrive, tra le sue istruzioni, l'esecuzione di un programma identico a se stesso, opportunamente adattato alla dimensione dei sotto-problemi. Non si tratta di un circolo vizioso, ma dell'auto-similarità di una procedura che richiama, al suo interno, una procedura simile a se stessa.

Nel suo *Liber Abaci* (*Libro dell'abaco*) del 1202, una vera enciclopedia della scienza algoritmica del Medioevo, Leonardo Fibonacci si servì di una strategia molto simile per calcolare quante coppie di conigli sarebbero nate in un anno da una sola coppia, sapendo che in ogni mese da una coppia ne nasce un'altra e che ogni coppia inizia a ri-prodursi nel secondo mese di vita. La soluzione era semplice: in un dato mese il numero di coppie era la somma del numero di coppie dei due mesi antecedenti. Un algoritmo funziona allo stesso modo: si svolge in una serie di passi, e per compiere ciascun passo deve assicurarsi di ciò che è stato fatto nel passo precedente, seguendo a ritroso un processo di enumerazione. Un po' come Orfeo che ha bisogno, per procedere, di guardarsi indietro per accertarsi se Euridice lo stia ancora seguendo.

Date le condizioni iniziali – nel caso di Fibonacci l'esistenza di una coppia di conigli nel primo mese – l'algoritmo procede in modo automatico: il risultato a ogni istante non è determinato dal nostro arbitrio, ma solo dal risultato dell'istante precedente. Anche se l'algoritmo calcola il valore di una funzione, esso è concettualmente diverso dalla semplice attribuzione di un valore a quella funzione, perché consiste in una procedura che mira a ottenere *affettivamente* quel valore. Distinguendo tra *affetto* e *valore* riusciamo a distinguere una procedura da una espressione matematica. L'espressione è una legge che associa numeri ad altri numeri, mentre l'esecuzione di una procedura ha per scopo un *effetto*, il risultato di un calcolo che si svolge nel tempo e nello spazio di memoria del computer.

A voler cercare le origini dell'idea di algoritmo, dobbiamo ritornare indietro di secoli, forse di millenni. La parola "algoritmo" deriva da Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, il nome del matematico e astronomo arabo autore di un libro, apparso all'inizio del Nonno secolo, *sull'algebra* (*al-jabr*) e sulla *al-muqābala*, ovvero sulle tecniche per ridurre un'equazione a una forma che ne consentisse una risoluzione più semplice. Era chiamato algebrista, nell'opera di Cervantes, anche chi sistemava le ossa rotte o slogate. A un algebrista, appunto, dovette ricorrere il Cavaliere degli Specchi, vale a dire il baccelliere Sansone Carrasco, per guarire dalle conseguenze delle percosse inflittegli da Don Chisciotte.

Tuttavia le prime forme di pensiero algoritmico risalgono a circa quattromila anni fa e si trovano sulle tavolette in cuneiforme provenienti dall'area geografica intorno all'antica città di Babilonia. Si tratta di procedure applicate a problemi specifici, ma già contenenti schemi generali di calcolo, che sarebbero rimasti invariati fino ai nostri giorni. Donald Knuth, uno dei padri dell'informatica, ha notato che i calcoli babilonesi

già possedevano lo stesso ordine e lo stesso carattere categorico delle moderne procedure, del loro mirare a un risultato concreto in un numero finito di passi.

Viene da aggiungere che troviamo un carattere simile in quegli innumerevoli algoritmi a cui deleghiamo con fiducia, e non senza rischi di fraintendimento, ogni misurazione e raccolta dei dati da cui dipendono le nostre previsioni e le nostre scelte. Ma in assenza di un'analisi dell'algoritmo, della complessità e della propagazione dell'errore nei calcoli, i numeri perentoriamente stampati dalla macchina alla fine di un processo potrebbero essere inutili e privi di senso. La percezione di una fondamentale incertezza e la diffusa avversione per i numeri traggono anche da qui la loro forza, a scapito però della credibilità di una scienza da cui dipende la possibilità di stabilire un nesso tra i nostri pensieri e la realtà delle cose.

Il mitico tempo dei primordi ²⁰, osservava Elias Canetti, era popolato da figure divine, umane e totemiche che, nel fissare un'immagine o una maschera, rappresentavano la salvezza dall'incessante fluidità del mondo di allora. Esse esprimevano al tempo stesso il *processo* della metamorfosi e il suo *risultato*. Perché non ipotizzare, allora, che la geometria e l'aritmetica dei pitagorici servissero a fissare delle forme nell'incessante metamorfosi che, nella loro dottrina, regolava i rapporti di parentela tra tutti i viventi? Un'ipotesi che il legame tra divinità e figure geometriche, stabilito da tempi remoti, rendeva ancora più plausibile. Ma un fatto decisivo è che l'aritmetica pitagorica, e la stessa concezione di numero, dipendevano dalla ripetuta costruzione di figure, come il quadrato, il triangolo o il pentagono, che rimanevano immutate a meno di un fattore di scala. Già allora, come in tempi più recenti, la matematica sembrava assumersi il compito di cercare *l'invarianza nel cambiamento*: le figure della geometria pitagorica erano forme di stabilizzazione nel divenire di un *processo* di calcolo.

Possiamo trovare un'eco di ciò negli algoritmi di oggi? Per capirlo conviene ricordare che in un celebre congresso a Parigi, nell'agosto del 1900, David Hilbert, figura di spicco del mondo scientifico del tempo, presentò un elenco di ventitré problemi ancora irrisolti. Il clima di quegli anni era improntato a una fede nel potere della mente di concepire teorie straordinarie, come le geometrie non-euclidee e i numeri transfiniti, e in quello che Félix Ravaisson, pochi anni prima, aveva chiamato "eroismo" della scienza. In sintonia con il clima di allora, Hilbert fu tentato, in quell'occasione, dalla questione suprema: può la mente del matematico risolvere qualsiasi problema le venga posto? Hilbert sosteneva che un problema ben formulato è sempre risolubile e il cammino intricato che seguiamo per conquistare verità nascoste può e deve avere sempre una conclusione, fosse pure quella di *dimostrare* l'impossibilità di trovare soluzioni. In polemica con il fisiologo tedesco Emil du Bois-Reymond, Hilbert dichiarava che mai il matematico sarà ridotto a (dover) dire "*ignorabimus*".

Uno dei ventitré problemi si rivelò decisivo per il futuro sviluppo della scienza degli algoritmi. Bisognava scoprire se esiste un metodo universale per stabilire la verità o la falsità di un qualsiasi asserto in un linguaggio della logica formale che si chiama "calcolo dei predicati". Nel tentare di risolvere questo problema, alcuni decenni più tardi, Alan Turing si trovò a indagare sul concetto stesso di *metodo* e intuì che questo doveva consistere in un algoritmo, un calcolo puramente meccanico, senza pensiero e senza coscienza. Il modello di un simile calcolo, che prese il nome di "macchina di Turing", doveva servire a dare una definizione al concetto di computazione effettiva. Nel 1936 Alan Turing e Alonzo Church congettarono che le condizioni generali di calcolabilità non sono imposte dallo stato di avanzamento nella progettazione dei calcolatori digitali, e neppure dal nostro ingegnarci nella costruzione di nuovi modelli di calcolo, ma hanno carattere universale. Secondo la tesi di Church-Turing ogni funzione che sia intuitivamente calcolabile può essere calcolata da una macchina di Turing o, equivalentemente, da una procedura ricorsiva. Ma più che di una tesi si trattava di un'ipotesi, perché è vano pretendere che una definizione *formale* come quella di macchina di Turing esprima a pieno titolo l'idea *intuitiva* di calcolabilità. Nel suo celebre articolo del 1936 Turing rendeva quasi umana la sua macchina, paragonandola al nostro computare su un foglio di carta. Altri l'hanno paragonata a una macchina da scrivere, con una testina mobile in grado di stampare su un nastro, uno alla volta, dei simboli. La testina poteva anche "leggere" un simbolo in una data posizione, e dedurre da questo, in modo deterministico, la mossa successiva dell'algoritmo. La macchina si rivelò come l'incarnazione plausibile proprio di quel *metodo* a cui si era riferito Hilbert, e Turing poté dimostrare che non esiste una procedura automatica che accerti in ogni caso se una macchina, con un insieme assegnato di dati d'ingresso, porta a termine in un numero finito di passi il suo processo. Questo gli consentiva di dimostrare che il problema posto da Hilbert non è risolubile. In termini più generali (e suggestivi), la matematica non poteva essere ridotta a una computazione meccanica. Il descrivere la macchina come un congegno non ne alterava il carattere matematico, ma sarebbe stato pure fuorviante prescindere del tutto dalla metafora meccanica. Fin dall'inizio si profilava, nell'algoritmo, la combinazione di due ambiti opposti: l'astrattezza matematica e la materialità del dispositivo, che sarebbe diventato, più tardi, lo stesso calcolatore digitale.

Le parole per descrivere tutto ciò non sono irrilevanti. Turing parlava dell'algoritmo come di un *processo* che,

²⁰ Dall'articolo di Paolo Zellini (La Repubblica – Robinson, domenica 2 aprile 2017): Passeggiata con i numeri sulla soglia del mistero.

da un insieme di dati iniziali, portasse a un risultato in un numero finito di passi. Il prodotto abc di tre numeri a , b e c è una semplice formula, ma non un algoritmo, almeno finché non stabiliamo se cominciare a moltiplicare il primo numero per il secondo oppure il secondo per il terzo. La proprietà associativa della moltiplicazione non lascia vedere differenze, ma i due processi, svolti in modo automatico, possono dare risultati $(ab)c$ e $a(bc)$ completamente diversi tra loro.

Pensato come un processo, come un'elaborazione nel tempo di un insieme di dati, l'algoritmo ci riporta all'idea di mobilità che fa da sfondo a un concetto della filosofia greca, quello di *kynesis*, da cui derivano *cinetico* e *cinematica*. Però il termine greco poteva designare, oltre ai movimenti nello spazio, anche le più diverse trasformazioni che si registrano in natura, comprese le metamorfosi che riducono ogni cosa, come recitava il Pitagora di Ovidio, a immagine precaria ed errabonda. Il pensiero greco era segnato dall'idea che ogni cambiamento è sempre *in altro*, e può implicare una perdita d'identità: l'essere umano che cresce non è più quello che era, tanto che, argomentavano gli antichi sofisti, un debito contratto diversi anni addietro non ha più valore, perché la persona che l'ha stipulato non è più la stessa di prima.

Anche l'enumerazione è una specie di *kynesis*, e così pure l'algoritmo di Turing. Ma ogni enumerazione si compie grazie a un'operazione fissata, che consiste nell'aggiungere ripetutamente, a ogni numero, un'unità. Anche per questo motivo Descartes, nella *Règle VII*, vedeva nel semplice atto di enumerare un criterio di conoscenza certa e infallibile. Nelle moderne teorie, come nella matematica antica, l'algoritmo sembra offrire analoghe garanzie di stabilità e di invarianza: è un movimento che si prolunga iterativamente, producendo sempre qualcosa di nuovo, ma senza sconfinare in elementi alieni o inconoscibili, e mirando a raggiungere un risultato in un tempo finito. Per questa ragione il processo algoritmico, pur contrassegnato dalla novità e dal cambiamento, poteva e può ancora considerarsi un presupposto della stessa *epistème*, che è il contrario dell'instabilità e della mutevolezza.

Ma la definizione di algoritmo, come meccanismo ricorsivo o come macchina di Turing, lascia pure intravedere ciò che algoritmo non è. Rispetto alla pura enumerazione, l'essere alieno, non calcolabile, subentrava ora, negli sviluppi della scienza del calcolo del XX secolo, con tecniche analoghe a quelle che ci fanno riconoscere la non numerabilità del continuo. Turing dimostrava che i numeri calcolabili, le cui cifre decimali sono valutabili da una macchina, formano nel complesso un insieme numerabile; ma questo insieme lascia aperto, fuori di sé, un baratro di incalcolabilità paragonabile a quello dei numeri irrazionali, un territorio alieno che la mente umana non riesce a catturare se non per via di complesse costruzioni teoriche, non sempre adeguate a quel principio di realtà che anche la matematica si sforza di rispettare. I numeri e le figure ci distolgono da quel baratro, ma non fino al punto da poterlo ignorare.

Fu la stessa collera divina ²¹, narrano le Scritture (2Samuele, 24), a insorgere contro Israele, ordinando al re Davide di fare un censimento. E l'evento riappare puntualmente in 1 Cronache, 21, dove è Satana in persona a ordinare il censimento. Tragiche furono le conseguenze: a Davide fu concesso di scegliere fra tre possibili punizioni ed egli optò per una peste, che fece morire settantamila uomini. Cominciò da allora un lungo processo di espiazione che culminò nell'opera più grandiosa: l'edificazione del tempio per opera di Salomone. Seguirono nuovi conteggi e censimenti, non più dettati, però, dall'ira divina.

Una superstizione che la scienza moderna ci permette di ignorare? Eppure Norbert Wiener, uno dei padri della cibernetica nel Novecento, denunciava "l'insolenza contro gli dèi" che segna di solito le grandi conquiste scientifiche, e paragonava le anime degli uomini che scoprono l'energia atomica e il calcolo su grande scala all'anima di Giobbe che Dio e Satana non smettono di contendersi. Che ne sarebbe oggi della nostra vita se l'operazione di censire fosse solo il punto d'innescio di un controllo sociale sistematico e invasivo, che si avvale di metodi invisibili ai più, e ben più complessi di una semplice enumerazione? E' di poco tempo fa (*The Economist*, 4 marzo 2017) la notizia che potenti computer saprebbero riconoscere migliaia di veicoli in circolazione per le strade americane, correlandoli poi, a seconda dei diversi distretti osservati, a determinati gruppi etnici, livelli di stipendio, classi sociali e orientamento politico. Se in un distretto si vedono circolare più auto berline che camioncini scoperti, si prevede che in quella zona il voto prevalente sarà per i democratici.

Non sono solo le telecamere a controllarci, come aveva immaginato George Orwell in 1984. Nel romanzo di Orwell il controllo era affidato a congegni, sensori e telecamere, che erano meri prolungamenti della nostra vista e del nostro udito. Ma oggi quei prolungamenti si sono raffinati: i congegni che ci controllano funzionano con calcoli di dimensioni inaudite e con le tecniche più avanzate della matematica e dell'informatica. Gli algoritmi per il riconoscimento dei veicoli, come di infinite altre immagini, sono basati su processi di apprendimento automatico: una rete neurale è addestrata a riconoscere determinate figure, dando risposte che sono confrontate ogni volta con quelle esatte. Si perfeziona per gradi la rete – questo è l'apprendimento – riducendo progressivamente l'errore, cioè lo scarto tra la sua risposta sbagliata e quella esatta: il problema matematico consiste nel calcolare il minimo di una funzione che quantifica quell'errore. Simili interrogativi sono posti oggi dall'informatica e dalla matematica applicata, e riguardano la *dimensione*

²¹ Dall'articolo di Paolo Zellini (La Repubblica – Robinson, domenica 9 aprile 2017): Calcolare l'infinito atto di sfida agli dei.

dei calcoli, i "big data" e l'efficienza degli algoritmi. Non mancano gli esempi. Possono i calcoli necessari a prevedere l'arrivo di una tempesta gareggiare con la velocità delle nuvole nel cielo, tanto da sapere in tempo cosa ci accadrà prima del loro arrivo? La questione è oggi affrontabile, ma al suo primo apparire non lasciava molte speranze di soluzione. Altri quesiti, non così dipendenti dal volume dei dati, sono a tutt'oggi irrisolti. Stabilire in quale modo un commesso viaggiatore, tra andata e ritorno, riesca a visitare tutte le città del suo territorio minimizzando il costo del viaggio, è diventato il prototipo di una serie di problemi di semplice formulazione, ma caratterizzati da un'esplosione combinatoria che ne rende la soluzione realmente impossibile.

Esistono oggi centinaia di problemi analoghi per cui non si conosce un algoritmo di risoluzione che non abbia un costo almeno esponenziale. Possiamo confrontare queste questioni con la nostra capacità di prolungare all'infinito l'atto di contare. Georg Cantor, uno dei massimi geni matematici del Diciannovesimo secolo, dimostrò che gli insiemi infiniti sono tanti, articolati in una gerarchia illimitata in cui ogni insieme è più grande di quello che lo precede. Da allora l'atto di contare poté estendersi e riorganizzarsi in una profusione inaudita di numeri e di insiemi. Cantor aveva così cercato di rispondere alla domanda: *quanto grande può essere l'infinito?*

Nel 1925 David Hilbert dichiarava che "nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi". Ma in quegli anni, dopo l'euforia delle recenti conquiste scientifiche, il clima era già cambiato. Hilbert dovette ammettere, contro i suoi stessi auspici, che l'infinito è un'illusione e che nella realtà non si trova da nessuna parte. Per dare un fondamento sicuro alle teorie di Cantor, i metodi deduttivi basati sull'infinito andavano sostituiti con procedimenti *finiti* che dessero gli stessi risultati, cioè che rendessero possibili le stesse dimostrazioni e gli stessi metodi per ottenere formule e teoremi. Questo programma, è ben noto, non andò a buon fine, e lasciò aperte diverse questioni, tra cui la seguente: che cosa si intende per "procedimenti *finiti*"? Una risposta plausibile venne dalle teorie del calcolo ricorsivo: i procedimenti finiti sono, semplicemente, gli *algoritmi*. Fu così che una scienza degli algoritmi, di cui affiorarono pian piano, dai primi anni del Novecento, tutte le formidabili implicazioni, finì per ereditare alcune delle principali questioni poste dalle teorie matematiche dell'infinito. Divenne allora ineludibile la domanda: *quanto grande può essere un insieme finito?* E se il finito cresce a dismisura, pur restando finito, come riusciamo a dominarlo con i nostri algoritmi?

Erano soprattutto i problemi applicativi a porre questi interrogativi. Le equazioni della fisica matematica dovevano risolversi in calcoli puramente aritmetici, e dunque in quei procedimenti finiti di carattere ricorsivo che sembravano indubitabili, allo stesso modo di quelle proposizioni dell'aritmetica, come due più tre uguale a cinque, che Descartes, nella *Terza meditazione*, aveva classificato tra le verità certe. Ma la *dimensione* dei calcoli cresceva ora a dismisura, tanto da non poterli eseguire nemmeno con il più potente calcolatore.

Qui si creò allora un'importante saldatura tra le applicazioni reali della matematica e la sua vocazione astratta e teoretica, un passaggio decisivo nella storia della scienza del Ventesimo secolo. Le grandi questioni sulla decidibilità e calcolabilità teorica, assieme alle tecniche che erano servite ad affrontarle, cominciarono a riguardare anche il calcolo concreto e la misura dell'efficienza degli algoritmi, senza perdere il loro significato di interrogativi fondamentali su ciò che la matematica è o non è in grado di risolvere.

I sistemi di equazioni lineari con cui si approssimano i modelli per risolvere problemi di fluidodinamica, di filtraggio di segnali, di previsione di sviluppo di fenomeni sociali o economici, erano di dimensioni enormi, e solo grazie ai fondamentali contributi sul calcolo matriciale di Goldstine e Von Neumann, nel 1947, e di Turing, nel 1948, si cominciò a capire come misurare l'errore accumulato in una mole mostruosa di calcoli. La dimensione delle matrici era uno dei nodi da affrontare, e oggi sono anche i miliardi di righe e di colonne delle matrici che intervengono nella valutazione dell'importanza delle pagine web a farci capire l'enormità del calcolo su grande scala. Dunque: *quanto grande può essere il finito?*

Si comincia a congetturare che il calcolo automatico potrà essere un giorno affrontato da calcolatori quantistici, molto più veloci di quelli attuali. David Deutsch, in un articolo pionieristico del 1985 sugli algoritmi quantistici, afferma che, almeno da un punto di vista logico, non c'è una ragione perché la costruzione di macchine sempre più potenti non possa "procedere *ad infinitum*", e perché debba esistere una funzione non calcolabile da alcuna macchina fisica.

Non sembra allora di riudire, in questa sorta di *hybris*, di tempesta innovativa, l'eco delle grandi speranze che avevano segnato un secolo prima le teorie dell'infinito matematico? Se non guardassimo a tutte le complesse motivazioni che ne hanno promosso lo sviluppo, non riusciremmo a capire la nostra fiducia, a tratti irresponsabile, negli algoritmi. Né riusciremmo a cogliere le ragioni profonde che sembrano consegnarci, inermi e impreparati, a quella fiumana di tecnologie digitali che sarebbero perfino in grado di alterare, se badiamo alle inquietanti analisi di Jaron Lanier, la nostra mente e la nostra identità.

Nessuno è più schiavo di colui che si ritiene libero senza esserlo
(Johann Wolfgang Goethe, *Le affinità elettive*).

... il grande coperchio ... dischiuse, ..., fra gli uomini, e i mali vi sparse
(Esiodo, *Le opere e i giorni* – Prometeo e Pandora, versi 94-95).

Inferenza e post-verità

Inferenza deriva da un verbo latino (in-fero = portare dentro) e, in senso figurato, significa. riflettere e, nella statistica, denomina un grande capitolo, riguardante il confronto d'ipotesi, il controllo d'ipotesi ed il controllo di qualità. Per questa ragione, inferenza non è il regno della certezza, ma quello del dubbio che, per quanto possibile, la stessa (con i vari e diversi test statistici) cerca di restringere. A riguardo, una curiosità rileva che, essendo irregolare il verbo madre latino (fero – tuli – latum – ferre, passando dal presente, prima al passato remoto, poi al supino ed infine all'infinito presente), la parola: illazione (derivata dal modo supino) ha quasi lo stesso significato di inferenza, seppure spesso con una connotazione negativa (e non neutra), in quanto un test può sempre passare, così come può invece fallire.

Post-verità è una parola nuova, abusata ed abbastanza ambigua. Nell'immediato prosieguo, sono riportati due interessanti interventi, rispettivamente di un letterato e saggista, e di un filosofo della scienza, contro ed a sostegno (seppure in modo assai critico) l'uso del termine: post-verità. Coloro che scrivono appartengono ad un diverso settore scientifico disciplinare che fa uso della statistica, avendo contribuito a fondarla, con la teoria degli errori, i metodi di osservazione e misura, la teoria e pratica della misure, ed il trattamento delle osservazioni. Tuttavia la scelta, ben consapevole, che nessuna scienza e soprattutto nessuna tecnica sono a se stanti, li porta a prendere in considerazione e rispettare pensieri e ragioni fondati, anche parzialmente opposti (così come chiedono attenzione e rispetto, da parte di umanisti ed artisti, verso scienza e tecnica).

Avrei una notizia da dare: questa storia della post-verità è una bufala ²². Vorrei essere più preciso: sarebbe bello se la smettessimo, tutti, di usare l'espressione "adesso che viviamo nell'epoca della post-verità" perché è infondata e fuorviante. Non aiuta a capire. In compenso aiuta spesso a sdoganare comportamenti discutibili e idee sciocche. Fine. Cioè, fine per quelli che hanno fretta.

Per gli altri, provo ad argomentare. Come si sa, il 5 febbraio 2003, Colin Powell, allora segretario di Stato americano, esibì davanti alle Nazioni Unite le prove che in Iraq il regime di Saddam possedeva e stava sviluppando armi di distruzione di massa. Fece anche un bel numero teatrale, con una fialetta di antrace: fu molto convincente. Un mese e mezzo dopo, gli Usa, forti delle prove che inchiodavano Saddam, invadevano l'Iraq: iniziava una guerra che avrebbe avuto incalcolabili conseguenze nello scenario geopolitico del Medio Oriente: per essere più chiari, avrebbe avuto immani conseguenze sulla vita e la morte di moltissimi umani. Purtroppo oggi sappiamo con certezza che le prove esibite quel giorno da Colin Powell erano false, e lo erano in modo piuttosto ridicolo. Soli due anni dopo quella bella recita all'Onu, lo stesso Colin Powell ammise che quel discorso sarebbe rimasto come una macchia sulla sua carriera politica. Sostenne che lui era hi buonafede, e accusò la Cia di aver costruito deliberatamente quella bufala. Quelli della Cia lo presero come un complimento.

Se vogliamo passare ad argomenti più frivoli, un ciclista di nome Lance Armstrong vinse, tra il 1999 e il 2005, sette edizioni del Tour de France, impresa mai riuscita a nessuno nella storia del ciclismo. In precedenza Armstrong era stato colpito da un cancro, e il fatto che dopo averlo sconfitto fosse tornato alle corse diventando il più grande ciclista di tutti i tempi rappresentò per molti anni una favola irresistibile: insegnava una forza e una fede nella vita che sicuramente aiutarono innumerevoli umani a svegliarsi al mattino, qualunque fosse la generosità della loro sorte. Va aggiunto che Armstrong stesso si impegnò a fondo per diventare testimonial della lotta contro il cancro, e in un certo senso, in termini più generali, un eroe che aveva schiacciato, a nome di tutti, il male e la paura del male. Malauguratamente oggi sappiamo con certezza che Armstrong vinse i suoi sette Tour perché si dopava, si dopava da matti, e lo faceva con determinata e abilissima ostinazione. Naturalmente in quegli anni gli accadde innumerevoli volte di negare, pur conoscendo la verità, qualsiasi accusa. Con una faccia di tola che desta perfino ammirazione, non smise un attimo di portare avanti la sua carriera di eroe. Confessò poi tutto, quando le prove divennero schiaccianti, nel salotto televisivo di Oprah Winfrey. Immagino non sia necessario continuare.

La cosa interessante è che di fronte a due enormità come quelle appena ricordate non ci è venuto in mente di parlare di post-verità. L'espressione esisteva, qualcuno l'aveva già coniata, ma evidentemente ai più non era sembrata utile per capire le cose. Era lì, a disposizione, ma non sapevamo cosa farcene. Quelle di Bush e di Armstrong le chiamavamo menzogne, e non c'erano sembrate poi così differenti da ciò che succedeva da secoli. Quindi l'espressione post-verità è rimasta in qualche piega nascosta del linguaggio collettivo fino a

²² Dall'articolo di Alessandro Baricco (La Repubblica – Robinson, domenica 30 aprile 2017): Perché questa definizione è infondata.

quando, anni dopo, è letteralmente esplosa, spinta in superficie da due eventi imprevisi: la Brexit e l'elezione di Trump. In entrambi i casi, l'opinione pubblica più allineata alla narrazione dominante, e l'élite che aveva forgiato quella narrazione e grazie a essa governava, divennero improvvisamente sensibili alla quantità di palle che giravano intorno a quelle due consultazioni politiche e alla difficoltà enorme che avevano incontrato a riportare l'attenzione della gente sui fatti, o almeno *su quelli che loro ritenevano essere fatti*: non riuscivano a credere che la gente avesse votato in quel modo ed erano così convinti di aver ragione che molto velocemente annunciarono l'avvento di un mondo in cui i fatti contavano ormai poco e le leggende stavano prendendo il sopravvento: risultò molto comodo raccontarlo come un passaggio epocale, la fine di una certa civiltà. "Adesso che viviamo nell'epoca della post-verità ...".

Riassunto: quando credevamo alle menzogne di Bush e Armstrong era tutto più o meno regolare; quando qualcuno ha iniziato a credere che Qbama era nato in Kenya e non negli Usa, siamo scivolati nell'era del disprezzo dei fatti e delle scelte fatte con la pancia. Mah. A essere brutali, la si potrebbe liquidare così: post-verità è il nome che noi élite diamo alle menzogne quando a raccontarle non siamo noi ma gli altri. In altri tempi le chiamavamo *eresie*. La si potrebbe liquidare così, ma tuttavia non credo che sia tutto lì. C'è sotto qualcosa di più articolato e affascinante. Come un piccolo cambiamento, tardivo, nel nostro rapporto con la parola *verità*.

Per quello che capisco io, la prima ovvia obiezione al termine post-verità è che non è mai esistita un'epoca della verità; anzi, se dovessi proprio dire quel che penso, confrontata ad altre epoche la nostra mi sembra decisamente poco incline a farsi prendere per il culo dalle menzogne. Senza tornare indietro a quando il sole girava intorno alla terra anche se il cannocchiale e i calcoli dimostravano il contrario, basterebbe ricordare che mio nonno ha combattuto due guerre in nome di narrazioni che oggi non riuscirebbero a portare suo nipote non dico in una trincea, ma neanche a fare una rissa al bar. In ogni caso, nessuna bufala usata per sostenere Trump o il fronte della Brexit è nemmeno lontanamente comparabile alle menzogne di Bush, e forse nemmeno di Armstrong: attribuire loro un valore epocale, leggendovi un cambiamento di paradigma, è quanto meno curioso. Come siamo arrivati fin lì? Perché gente avveduta e informata finisce a parlare di post-verità senza rendersi conto che sta farneticando? Cosa è successo al nostro pacato rapporto con la verità e le menzogne? Mi piacerebbe tanto saperlo, e un poco forse lo so.

Come tutte le bufale, quella della post-verità esegue un'acrobazia molto interessante: prendere una convinzione molto radicata ma anche un po' indefinita e darle un packaging più efficace, un design più chiaro, un nome più memorizzabile. Esempio: sento con grande chiarezza che un tiranno come Saddam c'entra in qualche modo con l'11 settembre, è un despota che odia la mia civiltà, è un pazzo capace di qualsiasi gesto ed è un uomo i cui principi e valori non c'entrano niente coi miei: tutto abbastanza chiaro ma un po' confuso, no? Sentite come suona molto più rotondo dopo una piccola operazione di design: Saddam possiede armi di distruzione di massa. Ammetterete che risulta tutto più convincente, tanto a mio figlio di dieci anni, quanto ai delegati all'Onu. La tecnica, qui, è collaudata: forgiare delle convinzioni nella chiarezza di un fatto. E se non si trova un fatto abbastanza nitido, *inventare* un fatto che pronunci la verità molto più chiaramente dei fatti veri. Ditemi se non è astuto. Un fatto *falso* che pronuncia una verità *vera*. E' uno dei grimaldelli più usati, da secoli, per scassinare le coscienze.

Se lo mettete in mano al Pentagono ne escono cose molto raffinate. Se lasciate fare a degli amateur vi ritrovate con la notizia che Obama è nato in Kenya: fatto falso che però, indubbiamente, da un design molto funzionale alla sensazione, per molti nettissima, che quell'uomo, nero, liberal, pacifista e mite fosse la negazione di tutti i principi e valori degli Stati Uniti e pertanto non avesse diritto a diventare Presidente. Chi usa la parola post-verità tende a sottolineare come nel mondo del web simili operazioni abbiano assunto una velocità, una forza e un coefficiente di penetrazione senza precedenti e che questo segnali appunto il passaggio a una nuova epoca. Anche qui, la cecità è spettacolare: chiunque capirebbe che una bufala al telegiornale quando il web non c'era e quando c'era *un solo* telegiornale era immensamente più efficace e veloce di una bufala lanciata oggi in rete: oltre tutto era molto più macchinoso smentirla o contrastarla. Eppure non lo si vuole capire, e allora arriviamo alla domanda più importante: se la post-verità è una bufala, qual è la cosa vera a cui sta dando voce, sta offrendo un design, sta consegnando un packaging efficace?

Per quel che ne capisco io, il termine di post-verità registra, un po' in ritardo, e sintetizza, in modo piuttosto efficace, alcune cose che abbiamo scoperto recentemente sul nostro rapporto con la verità. A costo di schematizzare provo a isolarne quattro.

La prima viene dalla riflessione filosofica, quindi non è facile da capire bene, ma in fondo è sufficiente annusarla. Riassumerei così: la verità non è una foto, un'istantanea, ma una sequenza di fotogrammi in cui qualsiasi fotogramma, preso di per sé, non è né vero né falso. E' dunque una struttura piuttosto complessa, che reagisce malamente a qualsiasi tentativo di ridurla a una figura sintetica, facilmente trasmettibile. Per questo, da un po', la verità ci sembra ancora più lontana, poco adatta al nostro tempo.

La seconda fa a pugni con la prima e qui iniziano i casini: è più vera una cosa inesatta, ma capace di circolare velocemente nel sistema sanguigno del mondo, di una cosa esatta che però si muove con lentezza. E' più vera una definizione imprecisa ma comprensibile che una precisa ma difficile da capire. E'

più vera una notizia inesatta raccontata bene che una notizia esatta raccontata male. Quando dico che è *più vera*, intendo proprio dire che è *vera*: non dico efficace, facile da comunicare, vincente, no. Dico, *vera*. *La prendiamo come la verità*, e quella genera delle conseguenze molto reali: vita e morte delle persone, per dire. Per questo, da un po', la verità tende a sembrarci un prodotto piuttosto pop, e sempre meno un segreto esoterico, privilegio di una setta di competenti.

La terza sembra facile, ma è piuttosto sottile e va capita bene. Si possono forse distinguere i fatti dallo storytelling – cioè il modo in cui li si presenta e rappresenta – ma è da stupidi credere che da una parte ci sia la verità e *dall'altra* lo storytelling. Quel che abbiamo capito è che tutto ciò che è reale – potremmo dire *vero* – è composto di fatti e narrazione, che sono inscindibili, non esistono praticamente gli uni senza l'altra. Per questo, da un po', la verità ci sembra scivolare nelle mani di quelli che la sanno raccontare, non di quelli che la sanno e basta.

La quarta è l'ultima arrivata, regalino della rivoluzione digitale. Bene o male siamo stati abituati per secoli al fatto che una certa élite decidesse cos'era vero. Può piacere o meno, ma se non altro è una situazione piuttosto chiara, stabile, leggibile. La rivoluzione digitale (una cosa che non ha più di vent'anni) ha mescolato un po' i ruoli, e ora di fatto una vera separazione tra chi dà le carte e chi le prende sta venendo a mancare. Tutti hanno il loro mazzo e giocano. Risultato: una sovrapproduzione di verità, quindi un'impennata dell'offerta, forse un calo della richiesta, sicuramente un crollo del valore. Per questo, da un po', la verità sembra valere meno, una merce svalutata.

Se provate a immaginare questi quattro movimenti rotolare uno nell'altro, mettersi in azione contemporaneamente, capite che tutto si è fatto dannatamente difficile. Naturalmente la relazione con la verità non è mai stata una passeggiata, ma è indubbio che da un po' siamo finiti comunque fuori dalla *comfort zone* in cui ci eravamo rifugiati, e ci tocca pattinare su un terreno molto scivoloso, fragile e soprattutto sconosciuto. Il fatto importante – da capire assolutamente – è che a patire *sono soprattutto le élite*, cioè quei gruppi di umani che per mestiere, ceto e vocazione hanno controllato per secoli il monopolio della verità. Paradossalmente, il nuovo statuto della verità rende piuttosto inessenziale quella skill particolare che era *conoscere la verità*: ignorarla almeno in parte sembra produrre risultati migliori. Sicuramente non è questa un'epoca per specialisti, per eruditi, per gente che sa. Non pensate a Pico de Paperis, pensate anche solo ai giornalisti. In teoria sarebbero quelli più prossimi alla verità, se si parla di notizie: ma da un po' succede che quello che poi si sedimenta come notizia non viene da loro, o non viene sempre da loro, o non viene da loro quando è importante. Passando da Facebook o da Twitter, milioni di umani che non hanno mai fatto un corso di giornalismo (e, incredibile, non sono nemmeno figli di giornalisti) fanno informazione, senza che sia il loro mestiere farlo, senza saperlo fare: ma la fanno, e questa circostanza produce notizie, e genera verità. Facendo una media, sono verità più false di quelle che per un secolo il giornalismo professionale ha prodotto quotidianamente? Difficile dirlo. Ma il solo fatto che sia difficile dirlo è una campana a morte per il giornalismo, per i competenti, per quelli che hanno studiato, per le élite del sapere. E' effettivamente la fine di un'epoca.

Così, a un certo punto, *proprio le élite* hanno coniato l'espressione post-verità. Stavano cercando di dire che qualcosa era cambiato, e che il tavolo da gioco non era più quello di una volta, e che loro questa partita non erano mica tanto sicuri di saperla giocare: nel frattempo la stavano perdendo. Di per sé l'istinto era giusto: nominare i cambiamenti. Solo che se scegli come nome *post-verità* stai già scivolando nell'alibi: non stai riconoscendo che la verità ha assunto un nuovo statuto che non controlli più tanto bene, stai dicendo che la verità è morta nell'istante in cui tu non sei più stato in grado di controllarla: che presunzione, che cecità, che malafede, che menzogna, che bufala, che post-verità.

La cosa ha definitivamente virato nel grottesco quando è arrivata l'espressione "adesso che viviamo nell'epoca della post-verità". Santo cielo. Adesso che viviamo nell'epoca della post-verità anche un campione di baseball può fare lezione all'università, le etichette dei salami possono dire quello che vogliono, solo l'arte può difendere la verità, e chiunque può decidere se Bobbio era un fesso o no. Insomma: adesso che viviamo nell'epoca della post-verità, liberi tutti. Vorrei essere più chiaro possibile: è l'ennesimo "dopo di me il diluvio", non è nient'altro. Sono le élite che strillano di paura. Stanno dicendo che il sistema-verità, così come se lo trovano in mano, non lo sanno gestire, e senza il loro controllo sarà il caos.

In questo senso, e poi la finisco di scocciare, tutta la vicenda della post-verità non è che una sfumatura di un grande evento che sta ridisegnando il mondo, uno dei tre o quattro macro-eventi che spiegano il pianeta in cui stiamo vivendo. Lo potete intravedere partendo da una bellissima frase pronunciata recentemente dal grande Hawking: il problema degli umani è che hanno sviluppato una tecnologia in grado di distruggere il pianeta terra, ma non una tecnologia in grado di portarli via da quel pianeta. Qualcosa di simile sta accadendo a livello culturale: l'intelligenza collettiva ha costruito una navicella con cui abbandonare il vecchio mondo e volare nel nuovo: ma gli intellettuali non riescono a salirci, maledizione! Altri ci salgono, e smanettano sul quadro comandi. Hanno già acceso i motori. Ma le élite intellettuali, appesantite da libri, microscopi e macchine varie continuano per lo più a restare a terra; solo alcuni, quelli che hanno accettato di mollare una parte di quel che avevano, sono riusciti a salire a bordo. E' obbiettivamente una situazione difficile: il mondo vecchio è ormai minato, sta per esplodere, e quello nuovo sembrerebbe raggiungibile solo

da una navicella con al comando dei dilettanti. Così la gran parte di noi si sveglia la mattina indecisa se imbarcarsi di corsa sulla quella navicella o tornare indietro e provare a sminare il vecchio mondo. Alcuni – più saggi o confusi degli altri, non è chiaro – comprano su Amazon dischi in vinile. E' il paesaggio in cui viviamo. Potete giudicarlo come vi pare, ma vi prego di una cosa sola: non chiamatelo "epoca della post-verità". Non lo è.

Sebbene sia forte la tentazione di dire che le bufale sono sempre esistite, che la menzogna è un ingrediente imprescindibile della politica e della vita, e che dunque non c'è niente di nuovo sotto il sole di ciò che si chiama "post-verità"²³; sebbene si abbia voglia di tagliar corto dicendo che – al massimo – si tratta di fare attenzione a quel che si legge così come si fa attenzione a quel che si mangia e si beve, sono convinto, invece, del fatto che la post-verità sia un concetto distinto da quelli di bufala o di menzogna, e che la sua emergenza (perché nessuno ha deciso in qualche stanza "oggi lanciamo la post-verità") metta in luce questioni che riguardano tutti, e che ci possono insegnare almeno tre cose.

Dal postmoderno al populismo

La prima riguarda la responsabilità degli intellettuali rispetto al mondo. Siamo abituati a pensare che siano una frangia irrilevante e ornamentale, eppure, in qualche modo, talvolta perverso, le idee possono realizzarsi nel mondo, spesso in maniera impreveduta e indesiderata, ma si realizzano, in altre forme e contesti, e magari con esiti catastrofici. La post-verità politica come compimento del postmoderno filosofico è un esempio luminoso di questo principio.

In tanti seminari e dibattiti sulla post-verità a cui ho partecipato negli Stati Uniti molti mi attribuivano una facoltà profetica rispetto all'era di Trump, ma facevo notare che se uno si è formato nel postmoderno degli ultimi quarant'anni, e se ha conosciuto vent'anni di populismo mediatico italiano, ciò che appare come profezia è, pianamente, autobiografia. Come già nel caso italiano, la post-verità è il risultato della massificazione di un atteggiamento di avanguardia. Il che è una bella cosa, ma comporta effetti scalari del tutto impreveduti: quando Baudelaire e Théophile Gautier si trovavano in un nobile palazzo decaduto sull'Ile Saint-Louis a fumare hashish, era pittoresco; ma se sospettate che lo abbia appena fatto il pilota del vostro aereo, lo è molto di meno. Nel passaggio dal postmoderno al populismo e di qui alla post-verità è andata pressappoco così.

Incominciamo con un po' di storia. Il "*New York Times* è pura propaganda", ha scritto Noam Chomsky il 20 maggio 2015. E, meno di due anni dopo, il 17 febbraio 2017, Donald Trump ha scritto che le *fake news* (con il *New York Times* in testa) "non sono il mio nemico, sono il nemico del popolo americano". Tra le due posizioni – in apparenza identiche – c'è una differenza essenziale. Nel criticare il *New York Times*, Chomsky si comporta come Socrate ed enuncia un principio di origine illuministica e idealistica: la scienza è la garanzia di una verità che rende liberi (illuminismo) ed è disinteressata, cioè al di sopra delle parti e priva di interessi pratici (idealismo). Dunque lo scienziato è il guardiano della verità, e da questa posizione può giudicare le verità altrui, per esempio quelle della stampa borghese, asservita agli interessi del capitale e della politica imperialistica.

Niente di ciò che scrivo va preso in senso ironico: sono convinto che Chomsky la pensasse proprio così, e che dicesse tutto questo in nome della verità. Trump invece è l'espressione del popolo americano in quanto portatore di verità, una verità che non ha niente a che fare con l'oggettività ma che riguarda piuttosto la solidarietà di un popolo contro le macchinazioni di una élite. E' un atteggiamento che si è presentato in tante occasioni nella storia otto-novecentesca, ma che nel *post-truismo* ha un colorito tipicamente postmoderno. Con il postmoderno si è infatti imposta una prospettiva molto diversa da quella dell'illuminismo chomskyano. La scienza è un'istituzione, tanto quanto lo è la politica o il capitale, dunque può essere criticata, e si può far ricorso a verità alternative. Di questa preistoria della post-verità abbiamo due versioni, una nichilista e una pragmatista. Quella nichilista è esemplificata da Michel Foucault. La volontà di sapere, la volontà di verità, non sono altro (ce lo ha insegnato Nietzsche) che volontà di potenza. Sono parte di un gioco, o meglio di un conflitto, dunque non hanno alcuno statuto privilegiato rispetto, poniamo, al potere politico. La versione pragmatista è proposta da Richard Rorty, e suona: la scienza e l'oggettività non sono la vera, né meno che mai la sola, misura della realizzazione e della felicità umana, l'intellettuale non ha un rapporto privilegiato con la realtà. Ciò che l'esperienza storica del Novecento e delle sue catastrofi ci ha insegnato è che la solidarietà è più importante dell'oggettività, e che la democrazia è più importante della filosofia. Dobbiamo dunque dire addio al culto tutto sommato superstizioso per la verità, e cercare di promuovere il dialogo e l'intesa sociale.

A questo punto, arriva Trump. In realtà ha degli antecedenti, per esempio nell'amministrazione Bush che aveva elaborato la teoria delle "comunità basate sulla realtà" (i comuni mortali che credono nell'oggettività) e difeso la possibilità, per i detentori del potere, di creare una loro realtà. In proprio, Trump si limita a dare del bugiardo agli altri, ma quando gli altri danno del bugiardo a lui, il che avviene in ragione direttamente

²³ Dall'articolo di Maurizio Ferraris (La Repubblica – Robinson, domenica 30 aprile 2017): Perché dobbiamo chiamarla così.

proporzionale alle accuse di bugiaderia rivolte agli altri, delega ai propri portavoce il compito di spiegare che si trattava di "verità alternative". Il conio linguistico è una reminiscenza della critica postmoderna alla scienza: pretendere che la verità sia una è dogmatismo, bisogna ammettere che ci sono verità alternative proprio come ci sono medicine alternative ed energie alternative.

Sbaglia dunque *Time* – me la prendo anch'io con la stampa – quando (nell'edizione del 3 aprile 2017) titola "La verità è morta?". Piuttosto, abbiamo a che fare con una inflazione della verità. Né Chomsky, né Trump, né il *New York Times* intendono dire niente di diverso dalla verità. Anzi: vogliono dire la verità, nient'altro che la verità: il Professore e il Presidente dicono che il Giornale Per Eccellenza mente (manifestando entrambi un disprezzo, rispettivamente di sinistra e di destra, rispetto alla stampa borghese), e il Giornale Per Eccellenza, a sua volta, senza curarsi dell'irrelevante Professore, si impegna a segnalare tutte le bugie del Presidente, che però non sono considerevolmente più elevate di quelle di Kennedy o di Roosevelt. E anche Foucault, nel sostenere che la verità è volontà di potenza, o Rorty, nel dire che bisogna sostituire la verità con la solidarietà, ritenevano di dire la verità. Il grande gioco della post-verità è tutto qui: se Cartesio asseriva che la verità è indice di se stessa e del falso, i *post-truisti* sostengono che il modo migliore per affermare la propria verità è dare del bugiardo al prossimo, sia esso il *New York Times* nel caso di Chomsky e Trump, o Socrate, questo incurabile malato di verità, nel caso di Foucault e Rorty.

Dal Capitale alla Documedialità

La seconda illuminazione della post-verità riguarda l'importanza della tecnica nell'emergere delle idee e dei comportamenti. Siamo abituati a pensare alla tecnica come alla realizzazione di un progetto con scopi deliberati e circoscritti (ho bisogno di aprire un tappo, invento il cavatappi) ma non è così. La tecnica, non è orientata dal proprio scopo, come altri saperi umani. Essa è al contrario autonoma e creativa: chi ha inventato la macchina a vapore non pensava che ne sarebbe nato un intero ordine sociale che ha regolato la vita degli esseri umani per quasi tre secoli: il capitalismo. E chi ha inventato il web non immaginava che avrebbe dato luogo a un apparato ancora più potente di quello che lo aveva preceduto, un apparato complesso che propongo di chiamare "documedialità", termine composto che designa la fusione tra la forma vincolante e costitutiva dei documenti nel mondo sociale e la forza mobilitante dei media. La documedialità ha posto (insieme a tante altre cose, buone e cattive) le premesse materiali della post-verità esattamente come il postmoderno ne aveva elaborato le premesse ideali.

L'assetto tecnico offerto dalla documedialità risponde a una domanda inevitabile: vuoi dire che i populistici hanno letto i post-moderni, e che i *post-truisti* si sono alimentati delle gesta dei primi e sui tomi dei secondi? No. Voglio dire che Trump non ha avuto bisogno di leggere Rorty o Foucault per attuare il mondo post-veritativo più di quanto Vanderbilt abbia avuto bisogno di leggere Marx per attuare il mondo capitalistico. Sugli uni come sugli altri gravava un orizzonte tecnico vincolante: il modo di produzione capitalistico nel caso di Vanderbilt e di Marx, il modo di produzione documedialistico nell'arco che da Rorty e Foucault conduce a Trump, e che consiste nella produzione non più di artefatti, bensì di oggetti sociali, di documenti, con quello che, del tutto riduttivamente, è stato reso attraverso il concetto di finanziarizzazione del capitale, mentre è – in effetti – la sostituzione del capitale da parte della documedialità.

Ecco la vera trasformazione silenziosa. Tutti parlano di una rivoluzione, a proposito del web, ma – e qui sta il vero problema – non è chiaro di che si tratti, come avvenga e quali conseguenze comporti. Per comprenderlo, il ricorso al concetto di "documedialità" propone anzitutto di concepire la rivoluzione tecnologica come una rivelazione socio-antropologica. Per quanto grandi siano le trasformazioni apportate dal web – ampiamente analizzate negli ultimi decenni – resta che il suo merito maggiore sta nel rivelare le strutture profonde della realtà sociale, strutture ben precedenti il web. Ha mostrato che la realtà sociale non ha bisogno solo di comunicazioni, ma, ancor più, di registrazioni, mettendoci sotto gli occhi, per l'appunto con l'esplosione della scrittura a cui assistiamo da tre decenni a questa parte, il ruolo non accessorio, ma costitutivo, che i documenti svolgono nella costruzione della realtà sociale.

Grazie a queste proprietà, il web si candida a essere, ben più che il capitale, che ne è semplicemente una preforma, l'assoluto del nostro tempo: il sapere assoluto, sul mondo e su noi stessi (conosce le nostre abitudini e i nostri pensieri meglio di noi), il non-sapere assoluto (quante falsità o idiozie circolano sul web, e circolano regolarmente sotto la forma di post-verità o di verità alternative), il potere assoluto (fuori del web non c'è potere economico, politico o militare: chi avrebbe pensato che il Presidente americano si sarebbe espresso a colpi di tweet?), e anche il dovere assoluto, l'imperativo categorico, una motivazione che sta alla base di una mobilitazione di risorse e di energie che non ha precedenti nella storia umana e che ha di mira un'unica aspirazione: esprimerli, sii te stesso, anche a costo di mostrare il peggio.

Così, l'Ottantanove non ha segnato semplicemente la fine delle due verità contrapposte che si guardavano dai due lati di un muro, ha anche visto i primi passi di uno strumento, il web, che avrebbe dato voce (e, soprattutto, scrittura, permanenza, viralità) a milioni di verità individuali, di deliri della presunzione (avrebbe detto Hegel) o, se preferiamo di post-verità. Ogni ricettore dei tetri e concettosi messaggi ideologici di quarant'anni fa, e dei più suadenti e ironici messaggi populistici di vent'anni fa è ora produttore di messaggi post-veritativi, e il problema della post-verità non sono tanto le dichiarazioni di Trump, ma le viralità del web, gli effetti che producono e insieme gli intensi piaceri che generano, sia pure sui temi più futili.

Dall'alienazione al riconoscimento

La terza rivelazione della post-verità, che è il risultato delle prime due, riguarda l'idea di democrazia che emerge dall'incontro fra post-verità e documedialità. E si riassume in una considerazione molto semplice: la post-verità costituisce un momento di mobilitazione di massa con pochi precedenti. Ogni utente del web esprime la propria verità, con una libertà che tecnicamente è sovrana rispetto a ogni altra istanza – uno vale uno, in politica come nel sapere, e se io sostengo che la luna è fatta di formaggio è indemocratico obiettarmi che forse non è così. Ma la domanda, a questo punto, è molto semplice: può esserci una democrazia senza verità condivisa? E, inversamente, quali possono essere i caratteri della democrazia nell'epoca della post-verità?

Bisogna partire da un punto decisivo. Il mondo documediale genera consenso esattamente come lo generava il mondo capitalistico prima che nascesse la lotta di classe, la quale peraltro si è rivelata alla lunga perdente, e dopotutto si capisce il motivo: il capitale dava mezzi di sussistenza e in cambio chiedeva alienazione, la cessione del proprio tempo da destinarsi ad attività meccaniche e ripetitive. Ma la documedialità che cosa dà in cambio? Qui la mia ipotesi è che offra – e lo si vede benissimo guardando al web, e ai movimenti politici che ha generato – la più grande (anche se spesso rovinosa) speranza che possa animare un essere umano: quella di essere riconosciuto dai suoi simili, fosse pure soltanto con un like, e di sentirsi dar ragione, magari da qualcuno matto come te e convinto che la Terra è concava e non convessa, che i vaccini causano l'autismo, che gli attentati dell'11 settembre li ha voluti la Cia e, ovviamente, che la Luna è fatta di formaggio.

Che l'umanità sia intenta a pensare con la propria testa più di quanto non sia avvenuto in qualunque altro periodo della storia è comunque una grande conquista. Resta da fare ancora uno sforzo, quello che ci ricordava Kant quando sosteneva che l'Illuminismo non è solo pensare con la propria testa, ma anche nell'essere capaci di mettersi nella testa degli altri. L'analisi della reputazione (quella che i filologi chiamavano critica delle fonti) e il *fact-checking*, ossia il controllo delle informazioni, sono rimedi ovvi ma insufficienti alla post-verità, perché suppongono una umanità interessata a sapere il vero, laddove la situazione è molto più complicata e, di nuovo, perversa. L'umanità, infatti, non è interessata a sapere il vero, ma ad avere ragione e a trovare conferma delle proprie convinzioni, ossia si è appropriata, in un momento di intensa democratizzazione, delle prerogative delle élite. Quando si parla di post-verità si pensa sempre a Trump, ma si dimenticano due cose essenziali. La prima è che gli elettori di Trump la pensano esattamente come lui, altrimenti non lo avrebbero eletto, e che tutti insieme sono convinti non di dire cose post-vere, bensì di affermare la pura e semplice verità, e che i bugiardi sono gli Altri, cioè tutti coloro che non gli danno ragione.

L'ideologia che anima la post-verità è l'atomismo di milioni di persone convinte di aver ragione non insieme (come credevano, sbagliando, le chiese ideologiche del secolo scorso) ma da sole. Il centro di questa nuova ideologia è la pretesa di esser nel vero a prescindere, e nel cercare riconoscimento attraverso un apparato tecnico, il web, che permette l'espressione delle idee dei singoli rendendole irrilevanti (appunto perché uno vale uno) e realizza invece la microfisica del potere, canalizzando tutte quelle idee – diverse, ma tutte equivalenti – in un gigantesco *I like*, un apparato che conta per i numeri che esprime e che, insieme, manifesta una opinione pubblica totalmente monodica. Io sono io, ecco il *refrain* che sta alla base di una inflazione di verità fai da te (proprio come, invece, al tempo delle ideologie, c'era una sola verità che costituiva un articolo di fede per immense comunità).

Che fare? Il miglior correttivo alla post-verità è la verità, cioè la cultura. La consapevolezza del fatto che verità non sta all'inizio, ma alla fine, quando c'è, e quando ci si arriva, magari per dispetto nei confronti della post-verità: basti pensare che è stato lo smascheramento di un *fashionable nonsense* come la Donazione di Costantino – il falso che sanciva il potere temporale dei Papi – a determinare la nascita della filologia umanistica.

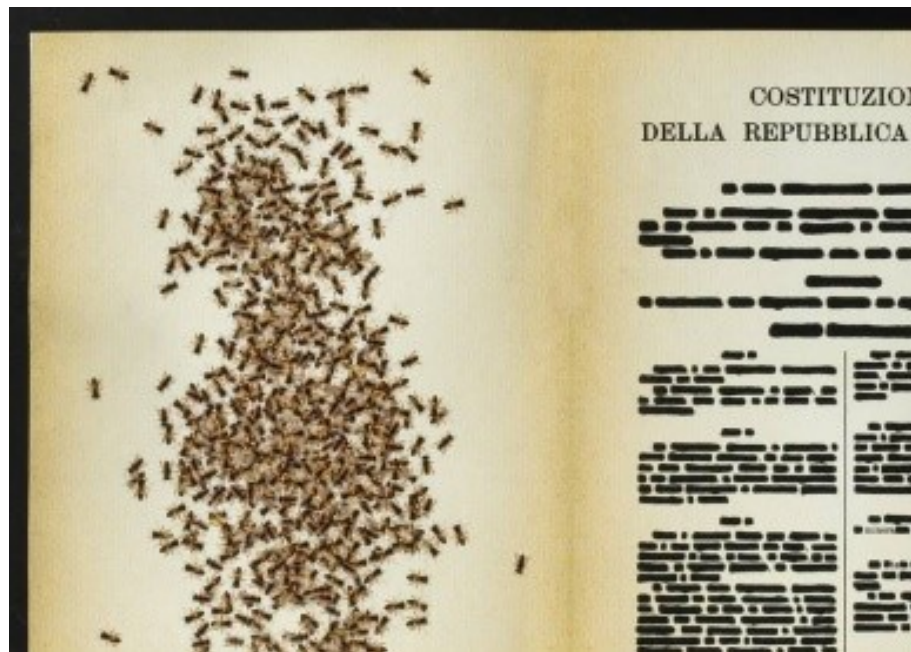
Insomma, sebbene la verità prima o poi venga a galla, la ricerca della verità difficilmente si può svolgere a mani nude e senza un addestramento culturale. Lo dice Agostino nelle *Confessioni*: voglio *fare* la verità, non solo nel mio cuore, ma anche per iscritto e di fronte a molti testimoni. Che cosa intende? Che si fa la verità così come si fa il caffè? No. Proporrei di interpretare questa frase così: la verità non è nulla di autoevidente, e richiede un addestramento tecnico, oltre che una buona dose di buona volontà e alle volte persino di coraggio personale.

Le idee sono a buon mercato come le mele, diceva Hegel, e l'esplosione documediale del web lo dimostra come meglio non si potrebbe. Come distinguere le buone idee? Sottofondendole non a un asfittico *fact-checking*, bensì – con uno sguardo filosofico e politico – all'impegnativo test proposto da William James: "Vere sono quelle idee che possiamo assimilare, convalidare, corroborare e verificare. Le idee cui non è possibile fare tutto questo sono false".

Non troverai mai la verità, se non sei disposto ad accettare anche ciò che non ti aspettavi di trovare (Eraclito). La verità può essere occultata anche per lungo tempo, ma la verità non può essere mai davvero sconfitta (Agostino d'Ippona).



Marco Cingolani, Il dovere al potere (mostra Arte contro la corruzione – Casa Testori, Novate Milanese)



Emilio Isgrò, La costituzione cancellata (mostra Arte contro la corruzione – Casa Testori, Novate Milanese)

Se vuoi diventare un cercatore della verità, almeno una volta nella vita devi dubitare di tutte le cose (Cartesio). Pazienza per un poco: le calunnie non vivono a lungo. La verità è figlia del tempo (Kant).

Forse post-verità è proprio una parola inutile, ma la scelta fra inferenza ed illazione pone invece davanti ad un'alternativa importantissima. Infatti l'inferenza mette in gioco le probabilità ed un approccio corretto alla probabilità, considera la stessa come affidabilità, mentre un approccio, errato e pericoloso, riduce questa ad azzardo. Di conseguenza, illazione è sì fare ipotesi, come con l'inferenza, ma certamente fare ipotesi, poco affidabili e parecchio azzardate. In questo contesto, illazioni sono le menzogne (soprattutto le menzogne dei potenti), con una deresponsabilizzazione personale e collettiva (che qualcuno chiama forse post-verità, ammantandola poi abilmente). La scelta contraria della probabilità come affidabilità è invece pienamente a favore della responsabilità, della giustizia e delle virtù civili di una società felice.

La cultura non ha limiti

La cultura di massa può rappresentare sia pericoli che opportunità, perché potrebbe abbassare il livello di competenze od aumentare il numero di persone che abbandonano l'analfabetismo. Trascurare i pericoli porta ad una cultura d'élite per una minoranza, pericolosa per la democrazia, la libertà e l'equità; d'altra parte enfatizzare le opportunità, senza adeguati supporti, riduce la cultura di massa alla moda, perdendo contenuti profondi di scienza, tecnica, letteratura e arte. D'altra parte, la cultura di massa, opportunamente guidata, è l'unico modo per consentire a molte persone di crescere in campi diversi, di incontrare altre culture, di acquisire uno spirito di tolleranza e di rispetto reciproco.

Infatti la possibilità di studiare (oltre a vivere una vita dignitosa ed agiata) è ancora un miraggio per gran parte della popolazione mondiale, non solo nei paesi in via di sviluppo ma anche in alcune parti di quelli avanzati. Pertanto riconoscere e favorire la costituzione (di) un insieme di persone che producono cultura è un passo importante che illumina la strada da percorrere. A riguardo, un'ulteriore osservazione riguarda il numero esiguo di donne. In effetti questa osservazione richiederebbe una ricerca avanzata, perché una storia tradizionale, scritta da un punto di vista maschile, ha l'effetto di nascondere una storia alternativa, da un punto di vista femminile.



Giacomo Ceruti ²⁴, Donne che lavorano (Pinacoteca Tosio Martinengo, Brescia)

²⁴ Noto anche come Pitocchetto.

Considerazioni pro e contro

Due esempi servono a sostenere la crescita graduale del progresso e della cultura, favorita dallo sviluppo delle società dove questa crescita avviene, ma senza pretendere (inesistenti ed) assurde “linearità” ²⁵, così:

- ❑ lo sviluppo geografico e geodetico della scienza ellenistica ²⁶ non sembra disgiunto dalla descrizione dello scudo di Achille, realizzato nella fucina di Vulcano, dove: Il gran fiume Oceán l'orlo chiudea (Omero, Eneide: canto XVIII, verso 607 / traduzione di Vincenzo Monti), perché acqua, al bordo di una terra piatta, è un assurdo, mentre acqua, nella parte sconosciuta di una terra sferica, è cosa possibile ed assennata;
- ❑ le scoperte, tardo cinquecentesche e secentesche, di Galileo e di Keplero non possono essere disgiunte, a loro volta, dalla rinascenza culturale, dapprima italiana e presto poi anche europea, con le Università (di Bologna, Oxford, Parigi, ecc.) e, cosa curiosa, una Cattedra di Greco antico a Firenze ²⁷, su iniziativa di Francesco Petrarca e Giovanni Boccaccio, perché la cultura è unica: non umanistica, né scientifica.

Invece altri esempi servono a mostrare, quanto sia facile interrompere bruscamente un cammino, di crescita culturale e progresso civile, generando perdite e regressi, spesso difficili da recuperare, quali ad esempio:

- ❑ la distruzione di Cartagine e la conquista dei regni post-macedoni in Grecia, Siria ed Egitto, ad opera dei romani, con la fine della scienza ellenistica;
- ❑ la fine della rinascenza romana, tardo repubblicana ed imperiale, a seguito della guerra tra i goti ed i bizantini, e dell'invasione dei longobardi, allora ancora nomadi, con l'incastellamento di ville ed abbazie;
- ❑ il dominio tartaro e mongolo, su Persia, Mesopotamia, Anatolia, Siria ed Egitto, laddove invece l'Islam arabo ha mantenuto e portato cultura e sviluppo, recuperando anche sapienza e conoscenze indiane;
- ❑ le due riconquiste: angioino-aragonese, della Sicilia araba (e poi normanno-sveva), e cattolica-spagnola, dell'Andalusia musulmana, con la fine di una lunga tolleranza inter-religiosa;
- ❑ la conquista delle Americhe, con la quasi estinzione delle popolazioni amerinde e la spogliazione di tutte quelle terre, continuata fino a tutto l'Ottocento, ed aggravata da uno schiavismo d'importazione ²⁸;
- ❑ la grave oppressione controriformista italiana, contro il diffondersi della Riforma e del pensiero riformato bruniano (libero anche rispetto all'intolleranza riformata), e la fuoriuscita dal contesto scientifico europeo;
- ❑ il lungo dominio turco sulla Grecia e sui Balcani, fino alle porte di Vienna, con la dispersione dell'eredità bizantina, recuperata solo parzialmente in una nascente Moscovia (che si vuole chiamare Terza Roma);
- ❑ il totalitarismo nazista, fino alla seconda guerra mondiale ed alla shoah, contro ebrei, diversi ed i popoli slavi, contro la grande cultura mitteleuropea e weimeriana, erede dell'Illuminismo e del Romanticismo;
- ❑ la dittatura sovietica e soprattutto il totalitarismo staliniano, con la guerra civile e le grandi purghe, contro qualsiasi dissenso liberale, cristiano (ortodosso, cattolico e riformato), socialdemocratico ed anarchico;
- ❑ l'anticomunismo anglo-americano, il liberismo e la globalizzazione selvaggia, contro le attese dei popoli liberi e le speranze dei cittadini democratici (a partire dai ceti popolari) dei loro stessi paesi.

²⁵ Ad esempio, è ben chiaro che lo sviluppo della matematica e della fisica abbia fatto da battistrada a quello di tutte le scienze naturali (a partire dalla chimica e dalla biologia), come pure delle scienze umane (a partire dall'economia). Eppure certe scoperte mediche, con le figure di Andreas van Wesel (it. Andrea Vesàlio) e William Harvey, quali la natura del sistema nervoso e la struttura della circolazione sanguinea (cardiaca, polmonare, epatica ed esterna), precedono altrettanto importanti scoperte fisiche ed astronomiche.

²⁶ La scienza ellenistica ha anche altri fecondi sviluppi: matematici e geometrici, fisici e meccanici, medici e naturalistici.

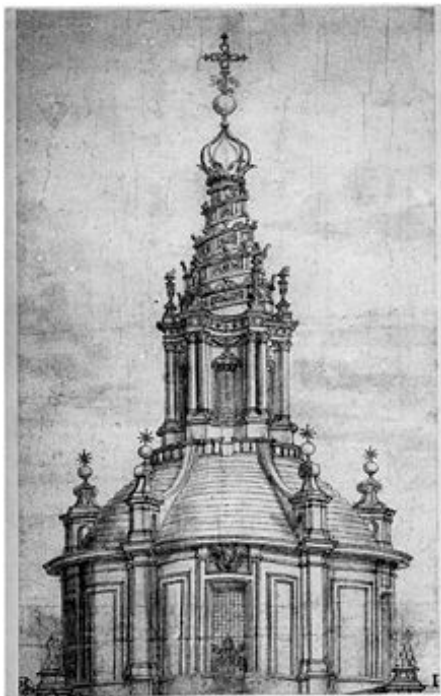
²⁷ A ricoprire la Cattedra (in un'anticipazione, vera e propria, dell'Umanesimo e del Rinascimento, e con una “resurrezione” neoplatonica, libertaria ed epicurea, contro la rigida dogmatica aristotelica) è chiamato: Leonzio Pilato, monaco e traduttore della Calabria bizantina.

²⁸ Lo schiavismo comporta, a sua volta, la spogliazione di molte terre d'Africa che continua poi, nell'Ottocento, con la colonizzazione/ dominazione europea dell'Africa ed colonialismo di gravissima rapina, esteso a tutto il continente africano.

Per contro, riprendendo volutamente “discorsi pro”, tre esempi mostrano interessanti contaminazioni fra geometria ed architettura. Infatti è geometria euclidea il Tempio Malatestiano rinascimentale, progettato in base al numero $1.618590347 \dots$ della sezione aurea (anche se i suoi costruttori sono gli antesignani della prospettiva). Inoltre fa uso della geometria proiettiva la vista prospettica della cupola, a torciglione, di Sant'Ivo alla Sapienza (piena espressione del Barocco, quando già si è alla ricerca di altre geometrie). Infine la Torre Shabolovka, per la diffusione radiofonica, richiama geometrie non-euclidee (con ellissi ed iperboli) e tutto questo prova l'indivisibilità della cultura e la bontà di una crescita collegata della scienza (con la tecnologia) e delle arti (insieme alle lettere), pena cadere in inutili e sterili controversie.



Leon Battista Alberti et al., Tempio Malatestiano (Rimini)



Francesco Borromini, Sant'Ivo alla Sapienza (Roma)



Vladimir Grigoryevich Šukhov, Torre Shabolovka (Mosca)

Pensieri critici e talvolta “cattivi”

L'esigenza della multidisciplinarietà è fortemente sentita, sempre più, in un tempo/mondo dove i settori scientifico disciplinari si stanno notevolmente allargando, arrivando con alcune discipline di frontiera anche a toccarsi l'uno l'altro. Questo fatto suggerisce l'invenzione di co-discipline, dove una dà un suo contributo nel campo dell'altra e viceversa. Inoltre questo stesso fatto impone l'interdisciplinarietà, impartendo metodologie e competenze umanistiche ed artistiche in ambito scientifico e tecnologico, così come (ed altrettanto bene) metodologie e competenze scientifiche e tecnologiche, in ambito umanistico ed artistico. In questo modo, si superano ottuse guerre di primazia e posizione, e si costruisce un sapere condiviso, base per una politica di confronto, non parolaia, né insulsa.

Infatti solo una politica competente e responsabile permette di decidere ed operare, secondo le conoscenze derivanti dai vari mondi della scienza e della cultura, nei modi in cui queste conoscenze sono comunicate e comprese dalle popolazioni coinvolte. In questo ambito, duplici sono le responsabilità, per scienziati, tecnici ed uomini di cultura, nel comunicare e farsi comprendere, e per le popolazioni coinvolte, nella loro crescita culturale, intesa nella sua accezione più ampia, cosicché la loro partecipazione alla politica sia volta al bene della cosa pubblica. D'altra parte, il bene della cosa pubblica non è mai la somma degli interessi privati e solo la coscienza e la responsabilità sono garanti della bontà dei risultati attesi. In questo contesto, l'etichetta, con l'educazione civica ed un galateo minimo, apre la via all'etica ed alla giustizia.

A riguardo, essenziale è innanzitutto l'educazione, impartita ai minori, fin da piccoli, nei vari e progressivi ordini scolastici, poi ai giovani, con l'istruzione superiore, ed infine agli adulti (anche anziani), con l'istruzione permanente. Infatti prendendo in considerazione i tempi passati ed andando oltre quelli più vecchi (con paesi tutti contadini e cattolici, così come altri sono stati contadini e protestanti, oppure pastori ed islamici, ecc.), i corpi intermedi (come i circoli culturali, le sedi sindacali e/o di partito, le parrocchie e gli oratori), pur con i loro limiti, hanno svolto una funzione essenziale, affiancando e sostenendo le famiglie, in generale, oltretutto non monofamiliare. Adesso invece la famiglia è quasi sempre monofamiliare, a volte anche frantumata, nelle funzioni genitoriali, e comunque lasciata sola, in una società atomizzata.

Allora il compito delle istituzioni scolastiche, a tutti i livelli è fornire metodologie e competenze, privilegiando il metodo sulle nozioni. Ad esempio, insegnare la grammatica e la sintassi è più importante di fare l'elenco di tutte le letterature del mondo, così come insegnare l'aritmetica e la geometria è più importante che divulgare tutte le curiosità della matematica e della fisica (un esempio è particolarmente significativo: le dimostrazioni della geometria euclidea richiedono due anni di scuola superiore ed un terzo per le poche della geometria euclidea 3D, non troppo difficili, ma sono certamente molto formative, in un ambito scientifico e tecnico, così come la grammatica e la sintassi latina e greca, in un ambito classico ed artistico). Pertanto ogni sforzo deve essere messo in atto per promuovere, sostenere e consolidare queste linee programmatiche.

il discorso, fin qui fatto, pone di fronte alla complessità caotica della vita quotidiana delle società moderne, in base al quale occorre riconoscere l'impossibilità di trovare il bandolo dell'intera matassa. Per questa ragione, è strettamente necessario mescolare sapientemente la formazione scientifica e culturale, innanzitutto fra loro, e poi con la partecipazione politica. Solo cittadini coscienti e maturi possono comprendere e sanno scegliere, bene, razionalmente e responsabili. D'altro canto, l'illusione di una guida illuminata dall'alto, come mostrato da tutta la storia, quasi sempre, è destinata ad essere frustrata e produce gravi fallimenti (a volte, addirittura drammatiche catastrofi). Infatti la storia passata è piena di tragedie, cosicché solo la democrazia moderna, con tutti i pesi e contrappesi necessari (affiancata alla “scuola”), può forse essere la bussola cercata.

Sembra un pensiero cattivo, ma i pensieri “cattivi” sono ancora molto più invasivi: bisogna esserne consci e non farne un uso reazionario, razzista o criminale. Ad esempio, la Bibbia proibisce l'incesto (narrando di un prima e di un dopo) ed i sacrifici umani (all'atto stesso della sua esecuzione), ma non vieta il cannibalismo, lasciando così intendere che quel problema non si poneva. Per contro, esistono prove storiche di episodi di cannibalismo in Nuova Guinea ancora nella seconda metà dell'800. Infatti allo stesso modo, dalla rivoluzione neolitica (con la domesticazione di animali e piante, la sedentarizzazione, la lavorazione di materiali ceramici, metalli e tessuti) alla rivoluzione industriale, lo sviluppo ed il progresso seguono linee tortuose ed ineguali, di non facile comprensione, in ogni caso.

[illegible]

²⁹ L'isola del tesoro è un romanzo d'avventura di Robert Louis Stevenson, narratore e viaggiatore scozzese, dell'800.

PARTE II – METODI DI FOURIER

Generalità

I metodi di Fourier raggruppano una serie di tecniche matematiche che vanno dalla serie di Fourier alla sua trasformata (trasformata di Fourier) e possono estendersi alla trasformata Wavelet (altrimenti dette: ondine). Il loro campo d'elezione è quello dell'analisi matematica e questa osservazione spiega il perché di una certa loro relativa marginalità nell'ambito del trattamento delle osservazioni, dove la statistica è lo strumento principe. D'altra parte, in particolare oggi con gli attuali mezzi digitali, un'importante branca della statistica rivolge la sua attenzione all'analisi numerica ed alla statistica computazionale, prendendo in considerazione metodi numerici che il calcolo numerico ha derivato non solo dall'algebra, ma anche proprio dall'analisi matematica. Allora questo fatto giustifica l'attenzione rivolta ai metodi di Fourier anche nell'ambito del trattamento delle osservazioni, arricchendo la collezione dei metodi offerti alla geostatistica ed alla geomatica, nonché ad altre discipline (di carattere ingegneristico e non) attente ad un approccio simile ai problemi d'interesse.

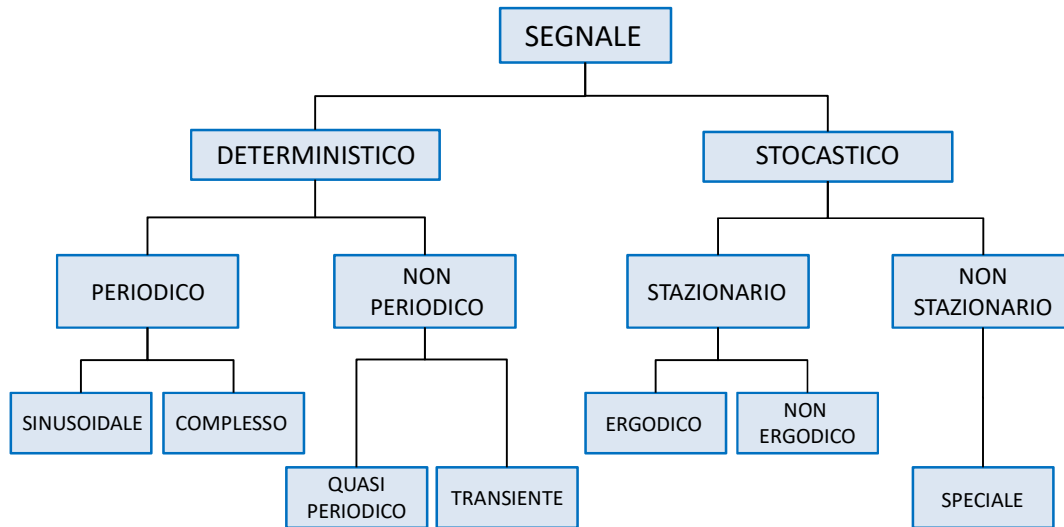
Andando oltre gli aspetti matematici e la messa in evidenza dei legami tra le diverse parti della matematica e della matematica applicata, è interessante notare i contributi apportati dai metodi di Fourier alle discipline del rilevamento, storicamente in geodesia e cartografia, ma recentemente anche in geostatistica e geomatica. Infatti ad esempio, il geomonitoraggio, l'analisi d'immagine e la costruzione dei DSM (o modelli digitali di superficie), operazioni tipiche rispettivamente del controllo dei movimenti e delle deformazioni, della fotogrammetria, della foto-interpretazione e del telerilevamento, e della cartografia numerica (ovvero della costruzione di DB topografici) possono vantaggiosamente avvalersi dei metodi di Fourier. Invece per quanto riguarda la geodesia e la cartografia, i metodi di Fourier sono impiegati rispettivamente per derivare le funzioni armoniche sferiche di Legendre (per lo studio del campo fisico della gravità terrestre) e come approssimazione della soluzione integrale di funzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali delle rappresentazioni cartografiche (piane) dell'ellissoide di rotazione terrestre.

Approcci simili sono altresì adottati, ad esempio, nell'ambito della fisica terrestre, della geofisica applicata, dell'ingegneria strutturale, della meccanica applicata, di quella dei fluidi e dell'idraulica, dell'aerodinamica e della meccanica del volo. In particolare, la geofisica applicata e l'ingegneria strutturale sono solite rivolgere parte della loro attenzione alle condizioni dinamiche del sottosuolo e/o delle strutture. Questo studio avvicina queste discipline a quelle del rilevamento, completando lo studio di movimenti e deformazioni, proprio del geomonitoraggio. Infatti come questo, esso può vantaggiosamente avvalersi dell'apporto fornito dai metodi di Fourier che, qui come altrove, trovano la loro naturale collocazione, in parallelo al metodo degli elementi finiti, all'approccio fornito dai processi stocastici (assumendo che i dati siano una sequenza estratta da una realizzazione di un qualche processo stocastico), ecc. Da ultimo, è opportuno rilevare come la relativa vicinanza con tecniche tipiche dell'analisi statistica giustifichi l'inserimento dei metodi di Fourier, qui esposti, tra le metodologie e le procedure proposte dal trattamento delle osservazioni per l'analisi dei dati.

Classificazione dei segnali

In generale, due classi principali di segnali possono essere distinte: segnali continui e segnali discreti. I segnali continui sono descritti da una funzione continua che fornisce per ogni istante di tempo informazioni sul segnale stesso. I segnali discreti sono descritti da una sequenza che fornisce informazioni per punti discreti sull'asse del tempo.

A riguardo, si noti che il significato di tempo, benché usualmente scontato, non è esclusivo. Infatti a rigore, qualsiasi parametro uni-dimensionale può essere utilizzato in sua vece.



Classificazione dei segnali in base alle loro caratteristiche

Dato un segnale $s(t)$, il campionamento di una sequenza avviene attraverso la seguente operazione:

$$s(m) = s(t) \Big|_{t=mT_s}$$

dove $m \in \mathbb{Z}$, T_s è l'intervallo di campionamento ed $f_s = 1/T_s$ è la frequenza di campionamento.

Inoltre i segnali si distinguono in segnali deterministici e segnali stocastici. La trattazione completa dello studio di segnali stocastici è considerata estranea agli scopi del presente lavoro. I segnali deterministici possono essere integralmente descritti da un punto di vista sia matematico che grafico. Data la presenza di rumore aggiuntivo, i segnali in natura non sono quasi mai deterministici, ma può risultare opportuno approssimare o modellare il segnale tramite funzioni deterministiche. Tra i segnali deterministici si possono distinguere quelli periodici, esprimibili come:

$$s(t) = s(t + nT)$$

con $n \in \mathbb{Z}$, e T periodo del segnale. Il segnale periodico è costituito da una forma d'onda base avente durata pari a T che si ripete un infinito numero di volte.

Altri segnali sono invece non-periodici e, tra questi, si distinguono quelli quasi – periodici e quelli transitori.

Elementi della serie di Fourier

Le espansioni in serie sono spesso utilizzate per semplificare i calcoli con valide approssimazioni o per poter esprimere una funzione localmente o globalmente. In particolare, in prossimità di un determinato punto, l'espansione in serie di Taylor permette di esprimere una funzione come un semplice polinomio in modo da

fornire un'espressione accurata da applicare ad un dominio sempre più vasto al crescere dell'ordine del polinomio. Per contro, data una determinata funzione periodica, l'espansione in serie di Fourier separa la funzione in sinusoidi di diverse frequenze. Il miglior adattamento consiste nella minimizzazione dell'errore che, per una funzione h e la sua approssimazione h^a , è misurata nell'intero dominio come:

$$E = \int (h(t) - h^a(t))^2 dt$$

Le espansioni in serie di Fourier sono espresse sia in forma trigonometrica che in forma esponenziale:

Serie di Fourier trigonometriche

L'espansione in serie di Fourier, h^a è la combinazione lineare di funzioni $\{\cos(nt)\}$ e $\{\sin(nt)\}$:

$$h(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

Dove i coefficienti A_0 , A_n , B_n sono così calcolati:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) dt \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos(nt) dt \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin(nt) dt$$

I coefficienti A_n e B_n indicano l'influenza delle componenti armoniche di periodo: $T = 2\pi/n$.

Nel caso la funzione h sia campionata per punti, come pure se si analizza un segnale discreto, con periodo N (cosicché: $\Delta t = 2\pi/N$), l'espansione in serie del segnale è dato dalla seguente somma ed il calcolo dei coefficienti A_0 , A_k , B_k è ricavato dalla discretizzazione delle espressioni precedenti:

$$h(n) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=0}^{N-1} (A_k \cos(kn) + B_k \sin(kn))$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \Delta t \quad A_k = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(kn) \Delta t \quad B_k = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(kn) \Delta t$$

Serie di Fourier esponenziali

L'espressione esponenziale della serie di Fourier è data dalla formula di Eulero:

$$e^{int} = \cos nt + i \sin nt$$

$$\text{dove: } \cos(nt) = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(nt) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

ed applicando queste ultime due espressioni, alla forma trigonometrica delle serie di Fourier, si ottiene la seguente espressione:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in \frac{2\pi}{T} t} \quad \text{con} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(t) \cdot e^{-in \frac{2\pi}{T} t} dt$$

e, discretizzando l'espressione precedente:

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h(t) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}$$

espressione utile nel caso la funzione h sia campionata per punti, come pure se si analizza un segnale discreto, con periodo N , essendo la suddetta somma, in tal caso:

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{i \frac{2\pi}{N} kn}$$

Condizioni sufficienti per la convergenza della serie di Fourier sono date dalle condizioni di Dirichlet:

- ❑ la funzione $h(t)$ può avere solo un numero finito di discontinuità;
- ❑ la funzione $h(t)$ può avere solo un numero finito di valori estremi.

Le serie di Fourier sono la base della trasformata di Fourier che si ottiene trasformando C_n da una variabile discreta ad una variabile continua ponendo: $T \rightarrow \infty$ e $n/L \rightarrow f$.

Trasformata di Fourier

Un processo fisico può essere descritto sia nel dominio del tempo, come una funzione $h(t)$, che nel dominio delle frequenze, specificando lo stesso processo tramite la definizione della sua ampiezza $H(f)$ ³⁰, con $-\infty < f < +\infty$. Poiché $h(t)$ e $H(f)$ sono due diverse rappresentazioni della stessa funzione, è possibile alternare le due rappresentazioni, mediante le equazioni della trasformata di Fourier³¹:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-2\pi i f t) dt \quad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(2\pi i f t) df$$

In generale, anche se le serie di Fourier sono descritte come funzioni complesse, serie di funzioni reali possono essere ricavate ponendo la parte immaginaria pari a zero. Di solito, la trasformata nel dominio della frequenza è una funzione complessa di ampiezza A e fase θ :

³⁰ In queste espressioni, se t è misurato in secondi, f è espresso in cicli al secondo o Hertz.

³¹ L'operazione di trasformata è un'involuzione, ovvero la trasformata della trasformata di una funzione è la funzione stessa. In generale, è involutoria qualsiasi operazione di periodo due, ad esempio, come le potenze di meno uno.

$$A = \|H(f)\| = \sqrt{H_{real}^2 + H_{imag}^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{H_{imag}}{H_{real}}\right)$$

Esistenza della Trasformata di Fourier

Una condizione sufficiente, ma non necessaria, per l'esistenza della trasformata di Fourier della funzione $h(t)$ è che essa sia una funzione assolutamente integrabile, ovvero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

ed abbia, al più, un numero finito di discontinuità finite. Questo requisito è generalmente soddisfatto per i segnali reali, ma può essere violato se:

- ☐ la funzione ha energia infinita (ad esempio, come la funzione di Eulero o quelle periodiche);
- ☐ la funzione contiene impulsi od altre funzioni limite.

Entrambe le eccezioni sono utili per applicazioni ingegneristiche: considerando la trasformata di Fourier come limite di una sequenza per la quale esiste una trasformazione che permette l'applicazione dell'analisi di Fourier a molti di questi casi.

Per completezza si riporta l'espressione della funzione di Eulero:

$$\varphi(n) = n \left(\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \right) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

dove p_i sono tutti gli r fattori primi che compongono la fattorizzazione di n .

Proprietà della trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier è un'operazione lineare, con le conseguenti proprietà di omogeneità ed additività.

- ☐ La proprietà di omogeneità consiste nel fatto che la trasformata di una costante, posta a moltiplicare una determinata funzione, è la stessa costante moltiplicata per la trasformata della funzione.
- ☐ La proprietà di additività è determinata dal fatto che la trasformata della somma di diverse funzioni è uguale alla somma delle trasformate delle singole funzioni.

Nel dominio del tempo, la funzione $h(t)$ può presentare particolari simmetrie, come essere puramente reale o puramente immaginaria, altrimenti pari: $h(t) = h(-t)$, oppure dispari: $h(t) = -h(-t)$. Nel dominio della

frequenza, queste simmetrie portano a relazioni tra $H(f)$ e $H(-f)$. La seguente tabella fornisce la corrispondenza tra le simmetrie nei due domini:

Se:	allora :
$h(t)$ è reale	$H(-f) = [H(f)]^*$
$h(t)$ è immaginario	$H(-f) = -[H(f)]^*$
$h(t)$ è dispari	$H(f)$ è dispari
$h(t)$ è pari	$H(f)$ è pari
$h(t)$ è reale e dispari	$H(f)$ è reale e dispari
$h(t)$ è reale e pari	$H(f)$ è reale e pari
$h(t)$ è immaginario e dispari	$H(f)$ è immaginario e dispari
$h(t)$ è immaginario e pari	$H(f)$ è immaginario e pari

dove il simbolo $*$ indica la funzione complessa coniugata della funzione data. Queste simmetrie sono utilizzate al fine di aumentare l'efficienza computazionale. Inoltre le proprietà della trasformata di Fourier permettono di definire il passaggio matematico da un dominio ad un altro. Di seguito sono indicate alcune proprietà elementari della trasformata di Fourier (dove il simbolo $\Leftrightarrow$ indica la coppia trasformata).

Se $h(t) \Leftrightarrow H(f)$ è una coppia, allora le altre coppie trasformate sono:

$$\begin{aligned}
 h(at) &\Leftrightarrow \frac{1}{|a|} H\left(\frac{f}{a}\right) && \text{scalatura temporale} \\
 \frac{1}{|b|} h\left(\frac{t}{b}\right) &\Leftrightarrow H(bf) && \text{scalatura di frequenza} \\
 h(t - t_0) &\Leftrightarrow H(f) \exp(2\pi i f t_0) && \text{traslazione nei tempi} \\
 h(t) \exp(2\pi i t f_0) &\Leftrightarrow H(f - f_0) && \text{traslazione nelle frequenze} \\
 h(t) * g(t) &\Leftrightarrow H(f) G(f) && \text{convoluzione (operatore *)}
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la proprietà di scalatura temporale, se si riduce la larghezza della funzione, mantenendo costante la sua altezza, si ricava uno spettro di Fourier più ampio e basso. Al contrario, un aumento della larghezza della funzione, rende lo spettro più stretto e più alto. Simili proprietà sono date dalla proprietà di scalatura di frequenza. Inoltre se $a = -1$ o $b = -1$: $h(-t) \Leftrightarrow H(-f)$.

Per quanto riguarda invece la proprietà di traslazione nei tempi, la trasformata di Fourier di una funzione traslata consiste nella trasformata della funzione, non traslata, moltiplicata per un fattore esponenziale la cui fase è lineare.

Proprietà analoghe si osservano nella proprietà di traslazione nelle frequenze.

Teorema di Parseval

La potenza di un segnale, rappresentato da una funzione $h(t)$, è la stessa, se calcolata a partire dal segnale, nel dominio del tempo, oppure a partire dalla sua trasformata, nel dominio di frequenza:

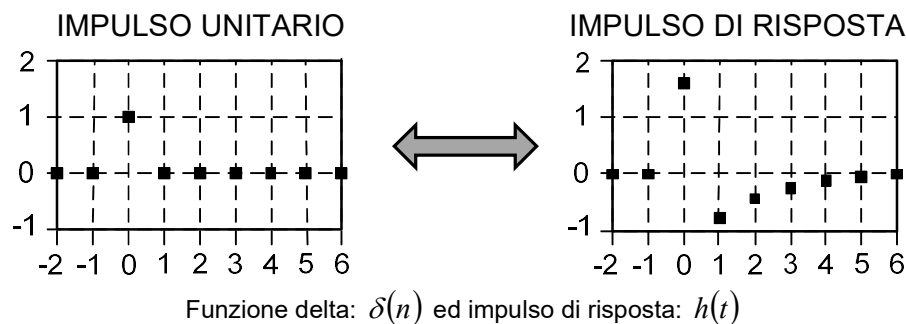
$$h^2(t) \cdot dt = |H(f)|^2 \cdot df$$

dove la potenza dello spettro $P(f)$ è data da: $P(f) = |H(f)|^2$.

Trasformata di Fourier e funzione delta

A causa della linearità dell'operazione, si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In questo modo, il segnale su cui deve essere valutata la trasformata è scisso in semplici componenti additive, ognuna delle quali è trattata individualmente, riunendo i risultati solo alla fine.

Allora un segnale è generalmente decomposto in molteplici impulsi normalizzati: segnali i cui valori sono tutti nulli, ad eccezione di un unico punto il cui valore risulta unitario. Questo processo è descritto matematicamente da una convoluzione e, nella figura sottostante, sono definiti l'impulso unitario o funzione delta: $\delta(n)$, e l'impulso di risposta: $h(t)$.



Pertanto quando si calcola la trasformata di Fourier della funzione δ , si ricava:

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-2\pi i f t) dt = \exp(-2\pi i f t) \Big|_{t=0} = 1$$

Dai segnali continui ai segnali discreti

La maggior parte dei segnali, direttamente incontrati nelle scienze ed in ingegneria, sono continui e, al fine di consentire ai computer digitali di interagire con essi, è necessaria una conversione.

L'informazione digitale è diversa da quella continua (od analogica), in quanto campionata e quantizzata.

- ❑ Il campionamento converte una variabile indipendente (ad esempio, il tempo) da continua a discreta.
- ❑ La quantizzazione converte una variabile dipendente (detta segnale) da continua a discreta.

Sia il campionamento che la quantizzazione limitano le informazioni del segnale digitale. Le forme d'onda, rappresentate nella figura sottostante, illustrano il processo di digitalizzazione.

- ❑ La prima fase, dal segnale analogico originale (a) al segnale analogico campionato (b) , è denominata sample-and-hold (S/H) e permette di convertire il tempo da continuo a discreto.
- ❑ La seconda fase, dal campione del segnale analogico (b) al segnale digitalizzato (c) , tramite l'ADC, fa sì che la variabile dipendente sia convertita nel numero intero più prossimo.

In questo modo, solo l'informazione corrispondente al valore istantaneo del segnale, quando si effettua il campionamento periodico, è conservata. Invece i cambiamenti nel segnale di ingresso che si verificano tra due tempi di campionamento sono trascurati. Anche i dati in uscita possono cambiare solo ad intervalli periodici.

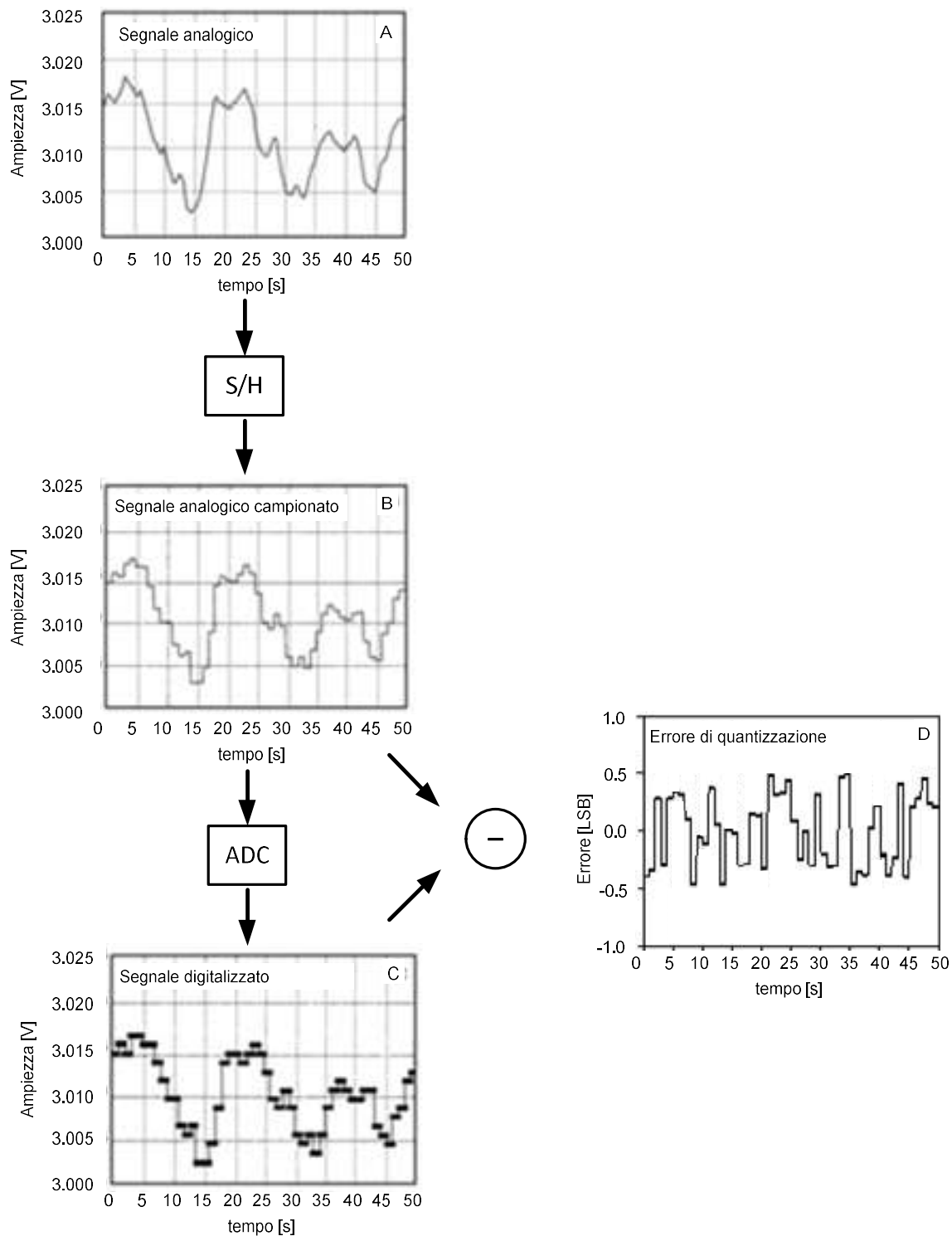
Ciascun campione, nel segnale digitalizzato, ha un errore massimo di $\pm 1/2 \text{ LSB}$ (*Least Significant Bit*, pari alla distanza tra due livelli di quantizzazione adiacenti), come mostrato dall'errore di quantizzazione (d) , ricavato sottraendo (b) a partire da (c) , con opportune conversioni. L'errore di quantizzazione appare come un rumore casuale e, di solito, può essere modellato come semplice aggiunta di rumore al segnale.

Teorema del campionamento di Nyquist

Al fine di ricostruire esattamente il segnale analogico dai campioni che descrivono le informazioni chiave del processo, il segnale continuo deve essere campionato correttamente.

Secondo il teorema di Nyquist, un segnale continuo non può contenere componenti di frequenza superiore alla metà della sua frequenza di campionamento. A riguardo valgono le seguenti considerazioni:

- ❑ Dato un segnale, rilevato con dati campionati ad intervalli Δt e caratterizzato da una frequenza di campionamento: $f_s = 1/\Delta t$ (campioni al secondo), la componente di frequenza più elevata prende nome di frequenza di Nyquist: $f_N = f_s/2 = 1/2\Delta t$.
- ❑ Se esistono frequenze più elevate della frequenza limite di Nyquist, esse assumeranno valori compresi tra 0 e f_N , e risulteranno combinate con le frequenze dell'intervallo $[0, f_N]$.
- ❑ Il teorema del campionamento di Nyquist è un'applicazione del principio (fisico) di indeterminazione di Heisenberg (uno dei padri nobili della fisica dei quanti), dato che l'area del rettangolo, definito da Δf e Δt , ha un minimo pari a $1/2$.



Processo di digitalizzazione di una forma d'onda

Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

Dato un segnale discreto composto da una serie complessa: $x(k\Delta t)$ con $k = 0, \dots, N-1$, costituita da N campioni nell'intervallo di tempo: $T = N\Delta t$; la trasformata di Fourier Discreta (DFT), definita come $X(k\Delta f)$ e composta da N campioni, è così definita:

$$X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \exp(-i2\pi(k\Delta t)(n\Delta f))$$

dove:

Δt è l'intervallo di campionamento di t

$\Delta f = 1/T$ è l'intervallo di campionamento di x

L'operatore inverso è detto Anti-Trasformata di Fourier (IDTF) e trasforma la sequenza trasformata $X(k\Delta f)$ nella sequenza di partenza $x(k\Delta t)$:

$$x(k\Delta t) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f) \exp(i2\pi(k\Delta t)(n\Delta f))$$

cosicché lo spettro di Fourier risulta:

$$S(k\Delta f) = \frac{1}{N\Delta t} |X(k\Delta f)|^2 \quad \text{e} \quad S(k\Delta t) = \frac{1}{N\Delta t} |x(k\Delta t)|^2$$

Fast Fourier Transform (FFT)

Tra i vari modi per calcolare la trasformata Discreta di Fourier (DFT), l'algoritmo Fast (Discrete) Fourier Transform (FFT) è uno dei più popolari ed efficaci, per la riduzione dei tempi di calcolo. Questa tecnica è inizialmente scoperta da Gauss, agli inizi dell'800; tuttavia risultata poco pratica, per mancanza di mezzi di calcolo adeguati, è in gran parte dimenticata. Nel 1965, all'inizio della rivoluzione tecnologica portata dai computer³², J.W. Cooley e J.W. Tukey ripropongono l'algoritmo FFT.

Il successo dell'algoritmo FFT consiste nel fatto che nella trasformata Discreta di Fourier sono presenti ridondanze che aumentano il carico computazionale. Inoltre scegliendo la frequenza di analisi del campione, per tale frequenza, sono generate sia un'onda sinusoidale che un'onda cosinusoidale, cosicché l'ampiezza della trasformata di Fourier è data da

$$X(k\Delta f) = \Delta t \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \sin(2\pi(k\Delta t)(n\Delta f)) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \cos(2\pi(k\Delta t)(n\Delta f)) \right)^2}$$

Questa è una operazione di ordine N^2 , dove sono coinvolte due variabili (numero di frequenze da analizzare e numero di campioni) ed il tempo di calcolo è proporzionale al prodotto di queste due variabili. Allora in primo luogo, le onde seno e le onde coseno sono le stesse onde in diverse posizioni. Considerando solo l'onda sinusoidale, l'onda cosinusoidale si ottiene spostando la fase di $\pi/2$. Inoltre grazie alle proprietà

³² L'avvento e la diffusione dei calcolatori datano a partire solo dagli anni '50 del '900, nonostante idee e propositi precedenti, risalenti addirittura a Pascal (nel secolo d'oro del '600 francese) e via, via perfezionate ed arricchite, fino alla prima metà del '900.

di simmetria delle onde, si riducono ulteriormente i tempi di calcolo. Infatti nell'equazione in forma complessa, è presente un termine noto:

$$W(k, n) = \exp(-i2\pi(k\Delta t)(n\Delta f))$$

Se $N = 2^\gamma$, $W(k, n)$ può essere espresso come il prodotto di γ matrici di dimensioni $N \times N$, al fine di ridurre l'onere computazionale, da un'operazione di ordine di N^2 , ad una di ordine di $N \log_2 N$.

Pertanto uno dei requisiti dell'algoritmo è che il numero di campioni del segnale sia uguale ad una potenza di 2. In caso contrario, si deve aggiungere ai campioni del segnale dato un supplemento di campioni, di valore fissato pari a zero, per ottenere il numero di campioni richiesto uguale ad una potenza di 2 (tenendo conto che, in generale, l'aggiunta di campioni di valore nullo non modifica le stime della densità spettrale).

Limitazioni della FFT

Dal punto di vista computazionale, la FFT è un approccio efficace, ma rivela alcune limitazioni, quando è applicata alle serie temporali. Di conseguenza, devono essere presi in considerazione metodi alternativi che superino queste limitazioni. I principali punti deboli delle tecniche di Fourier sono: la dispersione spettrale, l'*aliasing* e la risoluzione spettrale.

Dispersione spettrale

La dispersione spettrale (*spectral leakage*) si manifesta come frammentazione dell'energia (ampiezza) da distinte caratteristiche spettrali che si distribuisce nei canali di frequenza adiacenti, dando luogo a componenti spurie nello spettro delle frequenze del segnale. La componente di frequenza del segnale non appare una singola linea, ma mostra una diffusione di frequenze e la risposta di un segnale più debole può essere coperta da quella di un segnale più forte.

La dispersione spettrale si verifica, quando la componente di frequenza di un segnale non finisce tutta esattamente in uno dei canali di frequenza dello spettro calcolato. Se il periodo del segnale campionato è $N\Delta t$, dove N è il numero di campioni e Δt l'intervallo di campionamento, i canali di frequenza sono le armoniche della frequenza fondamentale $1/N\Delta t$.

Per evitare completamente tale rischio, occorrerebbe far sì che tutte le componenti di frequenza del segnale coincidano esattamente con i canali di frequenza dello spettro calcolato. Tuttavia questo metodo è poco pratico e conseguentemente poco usato,, soprattutto per segnali arbitrari, contenenti molte componenti della frequenza (di solito, sconosciute).

Gli effetti della dispersione spettrale possono invece essere ridotti mediante tecniche di finestrazione. I valori del segnale campionato sono moltiplicati per una funzione che si riduce fin a zero alle estremità della finestra, cosicché il segnale possa avere origine ed interrompersi in maniera graduale e non bruscamente.

In questo modo, si riduce certamente l'effetto delle discontinuità e, di conseguenza, la dispersione spettrale. Tuttavia anche questo metodo ha uno svantaggio, perché le linee dello spettro di un segnale diventano più ampie, rendendo più difficile distinguere le componenti di frequenza separate e riducendo così la risoluzione spettrale.

Aliasing

Un alias rappresenta un'identità assunta, spesso falsa³³. Se una componente di frequenza del segnale è sotto-campionata (ovvero rilevata con un tasso di campionamento inferiore al minimo prescritto dal teorema del campionamento di Nyquist), si trovano frequenze di alias più basse. Allora le componenti di frequenza del segnale più elevate potrebbero apparire come componenti a bassa frequenza ed è impossibile ricostruire correttamente le informazioni contenute nel segnale originale.

Pertanto dato che la frequenza di Nyquist è la più alta componente di frequenza che può correttamente essere identificata senza aliasing, il tasso di campionamento deve soddisfare il teorema del campionamento di Nyquist.

Risoluzione spettrale

Sulla base del teorema del campionamento di Nyquist, la banda di frequenza è fissata tra 0 e la frequenza di Nyquist e non tra le frequenze presenti nel segnale. Se N è il numero di campioni e Δt l'intervallo di campionamento, la risoluzione spettrale è data da $1/N\Delta t$.

La risoluzione spettrale indica il livello di dettaglio dello spettro di frequenza, ovvero la capacità di distinguere la risposta spettrale di due o più segnali. Se la risoluzione spettrale è troppo rozza, si possono perdere dettagli dello spettro. Allora $N\Delta t$ deve essere amplificato, aumentando N od amplificando Δt , oppure entrambi.

Tuttavia se l'intervallo Δt è troppo grande, può verificarsi l'aliasing. Per contro, l'aumento di N può richiedere un'elevata quantità di memoria, necessaria per immagazzinare i dati da processare, e tempi di calcolo troppo lunghi. Pertanto N e Δt devono essere scelti, in modo da fornire un'adeguata risoluzione di frequenza ed evitare inconvenienti.

Analisi di sequenze stocastiche

L'analisi di Fourier di segnali stocastici richiede particolare attenzione, perché devono essere considerate quantità medie. D'altra parte, tutte le medie dipendono dalla deviazione standard e così, noti i valori degli scarti quadratici medi, si conoscono i valori di tutte le funzioni di correlazione del processo stocastico. Per processi ergodici gaussiani, la densità spettrale è la trasformata di Fourier della funzione di correlazione, cosicché è facile ricavare tutte le proprietà statistiche del processo stocastico, una volta determinata la sua densità spettrale.

Dopodiché si considera la funzione di autocorrelazione della sequenza stocastica. Poiché l'autocorrelazione è una funzione deterministica, applicando la trasformata di Fourier, si ricava una funzione deterministica nel dominio della frequenza. La trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione è definita come densità spettrale di potenza (*Power Spectral Density* o *PSD*) e serve per descrivere la densità di potenza del segnale stocastico sull'asse delle frequenze:

$$PSD(s(t)) = S_{ss}(\omega) = F(r_{ss}(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{ss}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

³³ In ambito scientifico, non si fa una sua traduzione, ma si potrebbe usare la parola: camuffamento, con una certa libertà figurativa.

Se la funzione di autocorrelazione è pari, la *PSD* è reale.

Spesso interessa analizzare la relazione tra due processi che, nel dominio del tempo, è data dalla funzione di cross-correlazione: $r_{xy}(t, \tau) = E(x(t)y(t - \tau))$ e nel dominio della frequenza, la sua trasformata di Fourier prende il nome di densità spettrale di *cross-power* o *cross-spectrum*:

$$S_{xy}(\omega) = F(r_{xy}(\tau)) = |S_{xy}(\omega)| e^{j\theta_{xy}(\omega)}$$

Si noti che, in questo caso, si abbia implicitamente assunto la stazionarietà dei segnali: $x(t)$ e $y(t)$, per cui la funzione di cross-correlazione non è funzione del tempo, ma della differenza τ . Inoltre $r_{xy}(\tau)$ non è pari, cosicché la sua trasformata di Fourier non è reale e necessita della conoscenza di modulo e fase. Il valore assoluto della densità spettrale di *cross-power* è limitato:

$$S_{xy}^2(\omega) \leq S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega) \quad \text{in quanto:} \quad \gamma_{xy}^2 = \frac{S_{xy}^2(\omega)}{S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega)} \leq 1$$

avendo normalizzato il suo valore assoluto che, in tal caso, è detto funzione di coerenza.

Analisi di segnali reali

L'analisi in frequenza del segnale, mediante le tecniche tradizionali finora presentate, è effettuata per segnali assimilabili a processi stocastici a banda limitata con distribuzione gaussiana e media nulla. In realtà, queste condizioni sono difficilmente realizzabili. Tuttavia il segnale, per intervalli di tempo relativamente brevi, può essere assunto come stazionario. Per caratterizzare il segnale sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza sono introdotte trasformate tempo-frequenza (*Time-Frequency Representation* o *TFR*), come ad esempio:

- ❑ *Short-Time Fourier Transform (STFT)*, altrimenti detti: spettri evolutivi;
- ❑ *Wavelet (WT)*, altrimenti dette: ondine.

In entrambi i casi, per analizzare un segnale variabile, rispetto al tempo, si calcola lo spettro del segnale in un intorno dello stesso, troncando il segnale, con una finestra di durata limitata, ed effettuando così l'analisi spettrale. Forma e durata della finestra influiscono sui risultati dell'analisi: nella *STFT* ampiezza e forma della finestra rimangono costanti durante tutta l'analisi, mentre nella trasformata *Wavelet*, la durata della finestra aumenta al diminuire della frequenza.

Uno svantaggio comune alle due tecniche consiste nella contrapposizione tra la risoluzione nel dominio del tempo e quello della frequenza, dato che il prodotto è costante e pari ad un valore che dipende dalla finestra utilizzata. Inoltre si perde spesso l'accuratezza (cioè una buona corrispondenza tra i valori attesi e quelli di riferimento), nell'analisi statistica di segnali il cui contenuto armonico varia talmente velocemente, da rendere impossibile la scelta di una finestra appropriata.

Short Time Fourier Transform (STFT)

Nella trasformata di Fourier, il segnale è analizzato su tutti i tempi, per una durata infinita. Questo deriva dal fatto che non esiste il concetto di tempo nel dominio della frequenza e, di conseguenza, anche quello di cambiamento di frequenza rispetto al tempo. Pertanto la trasformata di Fourier è adatta a segnali stazionari, perché permette di evidenziare nettamente fenomeni che avvengono nel dominio della frequenza, ma non discrimina eventi che avvengono nel dominio del tempo.

Infatti da un punto di vista matematico, la frequenza ed il tempo sono ortogonali, mentre la maggior parte dei segnali reali fisici è di tipo non stazionario, cioè con caratteristiche variabili nel tempo, dove le componenti di frequenza dei segnali cambiano con il tempo, a loro volta.

La *Short Time Fourier Transform (STFT)* è un metodo per valutare il modo in cui le frequenze cambiano nel tempo. In questo caso, il segnale è suddiviso in piccole parti e, per ogni parte, si calcola la Trasformata di Fourier. Allora ogni spettro di frequenza fa riferimento solo ad un breve periodo di tempo ed il confronto, tra spettri consecutivi, mostra l'evolversi delle frequenze contenute nel segnale al passare del tempo, senza aver bisogno di alcuna ipotesi sulla stazionarietà del segnale.

La principale contraddizione della *Short Time Fourier Transform* consiste nel considerare che le frequenze siano valide solo se si fa uso di onde sinusoidali infinitamente lunghe, mentre allo stesso tempo essa accetta di applicare trasformate di Fourier a brevi tratti del segnale.

Wavelet Transform (WT)

Nella trasformata *Wavelet*, la durata della finestra aumenta al diminuire della frequenza. In questo modo, è possibile migliorare la risoluzione dell'analisi spettrale nel campo delle alte frequenze. La trasformata *Wavelet* è particolarmente appropriata per l'analisi di segnali transitori e di sistemi tempo – varianti (cioè variabili nel tempo), poiché è localizzata sia nel tempo che in frequenza.

Le *Wavelet* sono funzioni matematiche che separano i dati in diverse componenti di frequenza, in modo da studiare ogni componente del segnale con una risoluzione abbinata alla scala. Paragonate ai tradizionali metodi dell'analisi di Fourier, le *Wavelet* sono adatte per approssimare dati con cuspidi e discontinuità. Di conseguenza, i dati sono processati a differenti scale e risoluzioni:

- ☐ larghe finestre determinano gli aspetti più generali;
- ☐ piccole finestre permettono di analizzare i dettagli.

Matematicamente le *Wavelet* sono funzioni a durata limitata localizzate sia nel tempo che nella frequenza, con valore medio nullo. Affinché la condizione di media nulla sia sempre soddisfatta, la funzione deve essere oscillatoria da cui il nome *Wavelet*.

La procedura consiste nell'adottare una funzione prototipo $\psi(t)$, chiamata *Wavelet* madre (alcuni esempi sono mostrati nelle figure riportate nell'immediato prosieguo). La famiglia di *Wavelet* $\psi_{(a,b)}(t)$ può essere costruita tramite operazioni elementari che consistono in traslazioni e cambi di scala (cioè dilatazioni e contrazioni) della *Wavelet* madre:

$$\psi_{(a,b)}(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad b \in R \quad \text{e} \quad a > 0$$

dove a è il fattore di scala che indica la larghezza della *Wavelet* e b lo sfasamento temporale che ne definisce la posizione. La *Wavelet* prototipo corrisponde a $b = 0$ e $a = 1$. A riguardo:

- ❑ se il fattore di scala a è maggiore dell'unità, la trasformazione corrisponde ad una dilatazione della *Wavelet* madre;
- ❑ se il fattore di scala a è minore dell'unità, la trasformazione corrisponde ad una contrazione della *Wavelet* madre.

Il coefficiente $1/a$ è un fattore di normalizzazione per l'ampiezza della *Wavelet*, selezionato cosicché tutte le *Wavelet* nella famiglia abbiano la medesima norma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{(a,b)}(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)| dt$$

In funzione di a e b , è possibile osservare un'auto-similarità tra le basi *Wavelet* e, data la funzione di madre, tutto quello che riguarda la base è noto. L'accuratezza è controllata selezionando la larghezza della finestra della *Wavelet*: grandi finestre temporali forniscono una migliore localizzazione in frequenza, ma più povera nel tempo e viceversa. Uno dei principali vantaggi dell'analisi *Wavelet* è l'abilità di effettuare analisi locali, ovvero di analizzare una parte localizzata di un segnale più grande.

- ❑ L'analisi temporale è effettuata utilizzando versioni contratte, ad alta frequenza, della *Wavelet* prototipo.
- ❑ L'analisi di frequenza è effettuata con versioni dilatate, a bassa frequenza, della medesima *Wavelet*.

Se il segnale originale è rappresentato in termini di espansione *Wavelet* (cioè tramite i coefficienti di una combinazione lineare delle funzioni *Wavelet*), le operazioni sui dati possono essere effettuate utilizzando solo i corrispondenti coefficienti *Wavelet*.

La trasformata continua wavelet (CWT)

Come l'analisi di Fourier consiste nella scomposizione di un segnale in più onde sinusoidali, di differenti frequenze, allo stesso modo, nell'analisi *Wavelet* il segnale è scomposto in più versioni traslate e messe in scala della *Wavelet* madre.

La trasformata continua *Wavelet* (CWT) di una funzione è definita come la somma sul tempo di un segnale moltiplicato per versioni traslate e messe in scala della funzione *Wavelet*. I risultati della CWT sono idifferenti coefficienti *Wavelet* T_f , ovvero una funzione di posizione e scala:

$$T_f(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{(a,b)}}(t) dt$$

Moltiplicando ciascun coefficiente T_f per la *Wavelet* opportunamente ridimensionata e spostata, è possibile ricostruire le funzioni *Wavelet* che costituiscono il segnale originale e, in questo modo, modellare l'intero segnale dato.

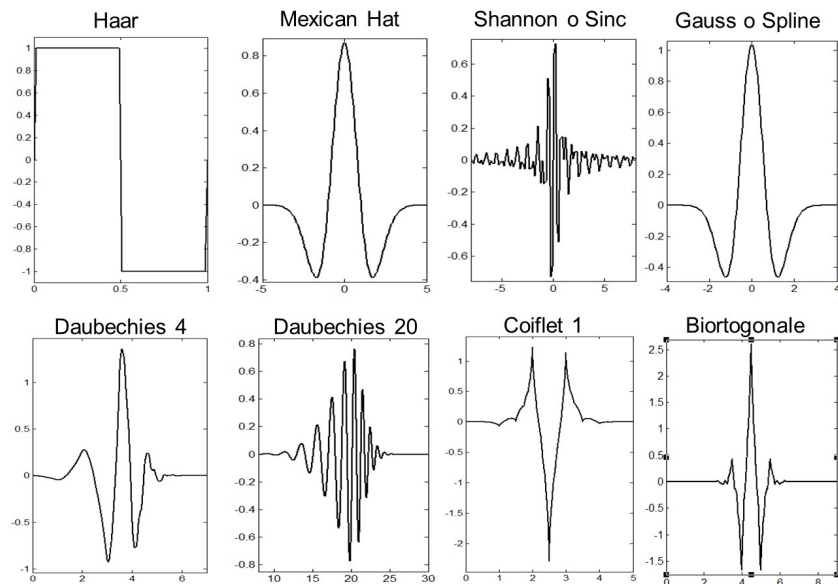
Con l'analisi *Wavelet*, è possibile utilizzare funzioni approssimate perfettamente contenute in domini finiti; tuttavia per impulsi con variazione continua della loro frequenza, la precisione della localizzazione è povera, se le ampiezze dell'impulso sono piccole.

- ❑ A partire dai coefficienti *Wavelet*, il metodo più diretto per determinare la frequenza istantanea di un segnale consiste nel trovare, per ogni istante b , la scala a per la quale l'ampiezza della trasformata risulta massima.
- ❑ In questo modo, non occorre usare alcuna informazione a priori, sulla localizzazione dei massimi, poiché il metodo si basa sull'osservazione euristica che, in un certo intervallo ristretto, l'energia del segnale è concentrata vicino alla sua frequenza istantanea.

Una volta determinato il massimo, le frequenze istantanee sono così calcolate:

$$\omega_s(b) = \frac{\omega_0}{a_r(b)}$$

dove ω_0 è la frequenza centrale della *Wavelet* madre, cosicché una *Wavelet* dilatata (dove: $a > 1$) ha una frequenza minore della *Wavelet* prototipo di a volte e viceversa una *Wavelet* contratta (con: $a < 1$) ha una frequenza maggiore della *Wavelet* prototipo di a volte.



Esempi di *Wavelet*

Con riferimento alla figura precedente, si riportano le espressioni di alcune funzioni *Wavelet*, rinviando alla letteratura specialistica, per quanto riguarda le funzioni *Wavelet* composte da una famiglia di funzioni (ad esempio, come le *Wavelet* Daubechies, biortogonali e Coiflet).

La *Wavelet* Haar è stata la prima *Wavelet* ad essere proposta nel 1909 da Alfréd Haar. E' la *Wavelet* più semplice, ma non è una funzione continua, né derivabile, la cui *Wavelet* madre è:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dopodiché la *Wavelet* madre della *Wavelet* Shannon o *sinc* è la funzione:

$$\psi(t) = \sin c \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{3\pi t}{2}$$

e la *Wavelet* Ricker o Mexican Hat (detta in italiano: cappello messicano) è data dall'opposto della derivate seconda normalizzata di una funzione di Gauss, dove la *Wavelet* madre è:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3\pi^{1/4}}\sigma} \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Infine le *Wavelet* spline sono costruite a partire da una funzione spline, cosicché la *Wavelet* madre della *Wavelet* quadratica B-spline è data da:

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & 0 \leq t < 1 \\ -t^2 + 3t - \frac{3}{2} & 1 \leq t < 2 \\ \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2} & 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Come già detto in precedenza, le *Wavelet* Daubechies, Biorthogonal e Coiflet appartengono rispettivamente alle omonime famiglie. In particolare le *Wavelet* Daubechies, definite da Ingrid Daubechies mediante alcuni specifici coefficienti, sono una famiglia di funzioni ortogonali la cui trasformata è ortogonale. Le *Wavelet* biortogonali sono funzioni la cui trasformata è invertibile, ma non necessariamente ortogonale. Le *Wavelet* Coiflet sono funzioni discrete e quasi simmetriche, definite mediante opportuni coefficienti.

PARTE III – VERSO UN METICCIATO CULTURALE

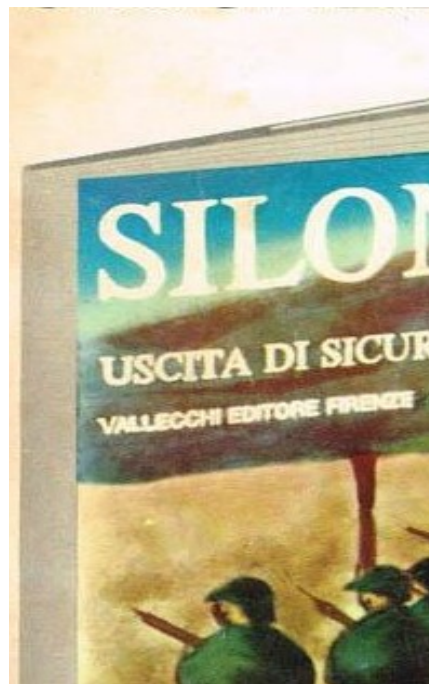
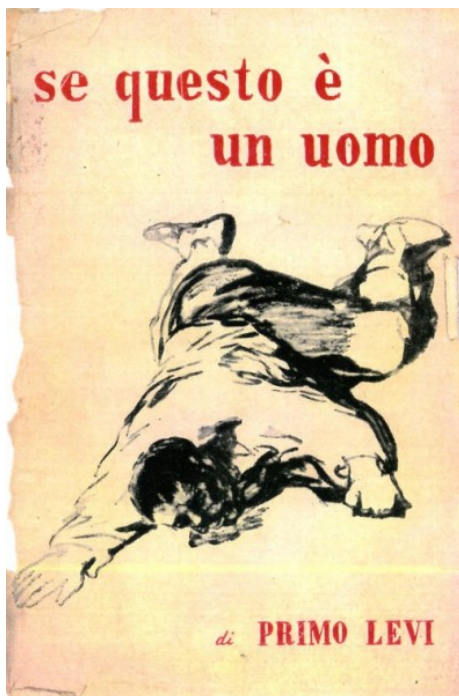
Pluralismo e multiculturalità

Quando vennero per gli ebrei e i neri, distolsi gli occhi
Quando vennero per gli scrittori e i pensatori e i radicali e i dimostranti, distolsi gli occhi
Quando vennero per gli omosessuali, per le minoranze, gli utopisti, i ballerini, distolsi gli occhi
E poi quando vennero per me mi voltai e mi guardai intorno, non era rimasto più nessuno ...
(Christy Moore, Triangolo giallo)

Questa canzone parafrasa un sermone del pastore Martin Niemöller, sull'indifferenza degli intellettuali tedeschi, all'ascesa al potere dei nazisti e di fronte ai loro crimini:

Prima di tutto, vennero a prendere gli zingari e fui contento, perché rubacchiavano. Poi vennero a prendere gli ebrei e stetti zitto, perché mi stavano antipatici. Poi vennero a prendere gli omosessuali e fui sollevato, perché mi erano fastidiosi. Quando poi i nazisti presero i comunisti, io non dissi nulla, perché non ero comunista. Quando rinchiusero i socialdemocratici, io non dissi nulla, perché non ero socialdemocratico. Quando presero i sindacalisti, io non dissi nulla, perché non ero sindacalista. Un giorno vennero a prendere me e non c'era rimasto nessuno a protestare.

Queste considerazioni sono importanti, perché tolleranza e reciproco rispetto, libertà e pace, uguaglianza e giustizia (intesa come equità) affermano e sostengono la cornice globale della cultura, sia scientifica che umanistica. Infatti la matematica, la fisica e le scienze naturali devono stare vicine alle scienze umane, alla letteratura e alle arti e viceversa, scambiandosi conoscenze e competenze, comuni e non. Trascurando e / o abbandonando questo mondo ricco si apre la via maestra ad un mondo povero, dove la miseria, la guerra e le devastazioni sono i prossimi passi. Purtroppo è già avvenuto, ora è ancora una realtà concreta, in gran parte del mondo (compresi i paesi in via di sviluppo), e può davvero accadere di nuovo in futuro.



Libri "testimonianza" di Primo Levi ed Ignazio Silone

Appendice A – Sul principio di continuità, a mo' di esempio ³⁴

La formazione dei concetti (e dei principi, in matematica e fisica) è sempre piuttosto complessa e contorta.

“Come l'istante prima che sfugga! Così rara nella vita l'ora giusta, l'ora delle grandi risoluzioni ... Solo isolati si manifestano i fili di cui è intessuta la fortuna, le occasioni, che solo se concentrate in un punto vitale diventano feconde.” A dirlo è il feldmaresciallo Illo nel “Wallenstein”, la grandiosa trilogia drammatica di Friedrich Schiller dedicata al condottiero della Guerra dei Trent'anni prima al servizio dell'imperatore Ferdinando II e fatto assassinare nel 1634. Wallenstein si troverà appunto a vivere l'ora critica, il momento risolutivo, in un intimo conflitto tra due decisioni possibili: il tradimento o la lealtà all'imperatore. La decisione doveva per lui corrispondere anche a un delicato punto di transito tra idea e lealtà, tra la libera scelta di progettare un'azione e la necessità delle sue conseguenze, del suo ineludibile mutarsi in fatti irreversibili. Serviva allora, per suffragare la scelta, un accurato esame astrologico: in una celebre scena del dramma, Wallenstein doveva sostare vicino a una rotonda ove erano esposte le statue dei sette pianeti, la cui esatta posizione era disegnata su una lavagna nera. Nulla di sorprendente: il Wallenstein storico si fece fare un oroscopo da Keplero, il grande astronomo che aveva immaginato un modello del sistema solare con le orbite dei pianeti iscritte nei cinque solidi regolari del *Timeo* di Platone.

Dunque, gli istanti in cui si concentrano le cause, le scelte e le opportunità devono corrispondere a esatte condizioni dei pianeti, a punti dello spazio che individuano opposizioni o quadrature, trigoni o sestili, o alle cifre dei gradi che possono segnare il destino del singolo. Il termine greco per designare un grado di circonferenza zodiacale era *moîra* (o *móros*) e le *moîre*, nella mitologia greca, decretavano i destini umani. Giorgio de Santillana e Herta von Dechend ricordano che nell'*Odissea* Egitto è accusato di aver compiuto azioni *hyper-móron*, letteralmente *oltre il grado*. Era questo il significato di *tras-gredire*.

La storia di Wallenstein e Keplero rimanda alla sapienza millenaria, forse di origine mesopotamica, per la quale le geometrie del cielo interferivano con ciò che accadeva sulla Terra. Ancora nel '600 si poteva pensare a quel cosmo, basato su quella che de Santillana definisce “aritmofia astrale”, in cui tutto si pensava in termini di moto regolare e misurato di stelle e pianeti.

Una combinazione tra matematica e astrologia risale alla potente Necessità a cui Parmenide assegnava il compito di tenere in catene l'intero universo, e di far da “limite agli astri”. La Necessità si manifestava nei numeri, nei gradi e nella figure geometriche del destino, a cominciare dalla gestazione e dalla nascita. Nel III secolo, Censorino spiegava come lo sviluppo del feto avviene in accordo con le successive distanze del sole dal punto del concepimento, secondo figure geometriche: “i settimane nascono secondo il diametro, i bambini di nove mesi secondo il triangolo, quelli di dieci secondo il quadrato”.

Urano, il dio del cielo, governava anche il luogo in cui si registravano fenomeni di prima e ultima apparizione dei pianeti e delle costellazioni, oltre che del Sole e della Luna. Questi fenomeni dovevano corrispondere a luoghi e tempi precisi, che scandivano i ritmi della natura e della vita. Durante la civiltà ellenistica e l'Impero dei Seleucidi, fu elaborata in Mesopotamia un'astronomia basata su calcoli puramente numerici. Le effemeridi di quel periodo consistevano in semplici colonne di numeri che quantificavano il movimento dei corpi celesti senza ricorrere, in apparenza, a modelli geometrici o cinematici.

L'esatta informazione sul moto continuo della Luna, del Sole e dei pianeti poteva essere così approssimata con una griglia discreta di valori numerici. La densità della griglia, l'accuratezza quasi ossessiva e l'estrema precisione di dettaglio rivelavano indirettamente tutta l'importanza di ciò che rimaneva nascosto e inaccessibile: l'esatto momento del sorgere o del tramontare eliaco di una costellazione, o l'esatte posizione e velocità di un pianeta in un dato istante. Questo valore doveva restare segreto ed enigmatico. In quei calcoli era però sottinteso un principio di continuità: un pianeta che si muove tra due punti A e B deve passare per tutti i punti intermedi tra A e B. senza tali presupposti il pianeta non sarebbe transitato per qualche punto critico compreso tra i due estremi di un intervallo.

Dal principio di continuità dipendeva anche l'esistenza dei punti per cui transitano gli astri del nostro destino. In che senso si può pensare che esistono le congiunzioni o le opposizioni, i poli, i solstizi e le intersezioni equinoziali tra lo zodiaco, o meglio tra eclittica e l'equatore celeste? Per capirlo è inevitabile porsi delle domande sulle proprietà dei punti di intersezione tra rette e cerchi, o tra cerchi e cerchi, dei centri dei cerchi o dei fuochi di un'ellisse. Che cosa suggeriscono a questo proposito le costruzioni degli *Elementi* di Euclide? Euclide costruisce il triangolo equilatero che ha per lato un segmento assegnato e un vertice che è il punto d'intersezione tra due cerchi. ma quel punto esiste davvero? Euclide non pone la domanda, a cui del resto non è facile rispondere. per trovare qualche risposta occorre attendere gli studi di Gerolamo Cardano sulle equazioni di terzo grado, da cui sarebbe poi derivata una prima conclusione, certo intuitiva, ma non facilmente dimostrabile: una curva continua, che passa da una parte all'altra di una retta, necessariamente la incontra in un punto. ma l'esistenza del punto sarebbe stata assicurata soltanto dopo la rifondazione dell'analisi proposta da Bernard Bolzano tra il 1816 e il 1817, e dopo i postulati di continuità elaborati alla fine del XIX secolo.

³⁴ Dall'articolo di Paolo Zellini (La Repubblica, mercoledì 19 aprile 2017): Il cielo stellato sopra di noi i numeri sacri dentro di noi.

Si possono allora intuire i motivi che avevano indotto Proclo, nel V secolo, a interpretare i centri delle sfere e i punti geometrici come entità arcane, sede di sostanze spirituali attive nel mondo sublunare, veri “simboli degli dèi incantatori”. Proclo riprendeva una tradizione pitagorica che arriverà fino al Rinascimento. Nei diagrammi metafisici di Giordano Bruno ricorrono cerchi e poligoni di varie forme; le loro intersezioni corrispondono a ranghi di demoni e spiriti, gli stessi che popolavano l'universo secondo complesse gerarchie, esercitando influssi celesti o diabolici. Ci si chiede cosa sarebbe capitato a quei demoni in un modo discontinuo, interrotto da lacune nei punti in cui Bruno li aveva collocati, e di cui si incominciava a intuire allora, con più precisione, l'esistenza matematica. Si sa comunque per certo che la soluzione di continuità è ciò che i demoni temevano di più. Il grande poeta francese Pierre de Ronsard scriveva che essi temono il ferro di una spada e fuggono davanti ad essa “per paura di sentire reciso il loro legame”.



Pablo Picasso, Natura morta: teschio e brocca (1945)

In generale, la formazione delle scienze non è poi disgiunta, da commistioni con pseudoscienze, oggi giorno ormai, da combattere, a tutto campo, perché solo deleterie e pericolose, ma allora esemplificative di quel cammino, complicato e tortuoso, che ne ha permesso la formazione. Così se già l'astronomia ha forti legami con l'astrologia ed anche l'aritmetica con la divinazione, la chimica nasce dall'alchimia e la medicina dalla magia sciamanica. Inoltre almeno all'inizio, molte tecniche non hanno fondamenti scientifici (e solo più tardi si strutturano, su basi ben più solide): così l'agricoltura e l'allevamento nascono da pratiche puramente empiriche, la lavorazione dei metalli, dei materiali ceramici e dei tessuti da semplici tecniche artigianali, la topografia dall'agrimensura, ecc.

Infine purtroppo la formazione delle scienze e lo sviluppo della tecnologia non è separabile dall'esercizio del potere, dalla divisione del lavoro (con la conseguente stratificazione in caste, classi e ceti sociali) e da tutte le violenze commesse (dagli omicidi, fino alla guerra). Infatti la specie umana è l'unica, tra tutti gli animali superiori, ad essere capace di arrivare a stermini, veri e propri, tra i propri simili (come ha purtroppo mostrato la storia, dai tempi antichi, fino ad oggi, tanto nelle regioni più povere e marginali, quanto in quelle avanzate e sviluppate). Queste osservazioni sono certamente un monito grave e richiederebbero un'attenta riflessione, da parte di tutti e di ciascuno, ma ancora purtroppo è difficilissimo essere capaci di avere molta fiducia, nella bontà e nella saggezza, dell'umanità tutta.

Appendice B – Tolleranza e solidarietà

Vogliamo aprire un promettente romanzo esoterico intitolato *La tenebra divina*³⁵ e capire quale tenebrosa storia ci racconta? Non è facile, perché i veri thriller non sono riassumibili, ma, in sintesi un po' brutale e casuale, ecco alcune delle sorprese che il thriller ci fa: scopriamo che Dio è maschio e femmina, e non è maschio e femmina solo il dio che incontriamo nei sacri testi indiani dei Veda o nel misterioso Ermete Trismegisto, ma ce l'hanno anche il più serio Jahvè e suo Figlio, e capiamo infine che è maschio e femmina ogni dio di ogni religione, e che l'unione sessuale e la fecondità sessuale e il gioco sessuale fanno parte degli dèi e di Dio; scopriamo poi che il cattolico San Tommaso D'Aquino diceva su Dio le stesse cose dette tremila anni prima dal Rigveda, e che esiste da sempre una sorta di società semisegreta i cui adepti studiano religioni diverse che però considerano discendenti da una religione eterna, la quale è una religione ma ancor più una filosofia; e scopriamo che le Lettere di San Paolo, la Bhagavadgita, le Upanisad, i poemi persiani e arabi, i poemi e i miti greci, il Graal e il dio Brahma sono connessi come in un puzzle elettronico; e poi... E poi, a questo punto, bisogna svelare che le storie culturali raccontate nel nostro bizzarro romanzo non le ha scritte (qualcuno) in preda all'Lsd, né un Maestro tantrico reincarnatosi ..., ma il grande studioso Ananda Coomaraswamy. *La tenebra divina* non è un romanzo, ma una raccolta di saggi ..., e va a completare due libri essenziali che sono *Il grande brivido* e *La danza di Shiva* Eppure se questo libro non è un romanzo, i singoli saggi che lo compongono sembrano avere la struttura di racconti, di tasselli conoscitivi che finiscono col comporre una specie di stupefacente narrazione su argomenti che vengono in genere definiti "esoterici": e quando si dice stupefacenti non si esagera, perché l'effetto di questi scritti è quello di una droga.

Il famigerato esoterismo, oggi spruzzato come mistero d'accatto dentro libri su codici e angeli che non valgono la carta su cui sono scritti, diventa in Coomaraswamy una lente quasi magica per leggere una verità essenziale nel brulicare di teorie e miti del Passato: un Passato che scopriamo essere in realtà anche un Presente e un Futuro, dal momento che Coomaraswamy ci spiega, solidale con tutti i sapienti che cita, che il Tempo non esiste così come lo concepiamo noi, e che le nostre vite, che crediamo individuali e separate dal Mondo e da Dio, sono come la spuma dell'onda: noi compariamo per un attimo, realissimi e concreti e molteplici come l'onda e la spuma dell'onda e la goccia che si stacca per un attimo dalla spuma dell'onda, ma poi siamo riassorbiti nel mare che è eterno e unico da sempre e per sempre: come Dio e il Mondo.

I racconti culturali che traboccano dalla *Tenebra divina*, e che a volte sembrano usciti dalla mente di un visionario, sono il frutto del lavoro accurato di uno studioso indiano che lavorava al Museum of Fine Arts di Boston a capo della sezione di arti orientali, capace di leggere il sanscrito e il pali, il greco e il latino nonché le principali lingue occidentali, e che a un certo punto della sua vita fu influenzato dalle teorie di René Guénon, l'autore del *Re del Mondo* e di altri scritti che oscillano anch'essi tra il romanzo culturale lisergico e il serio studio comparativo. Libri come *La tenebra divina* ci pongono una domanda radicale: perché mai in tempi di algoritmi dovremmo leggere "roba" che parla di dèi? E la risposta è semplice: perché gli algoritmi ci sono già nei Veda, perché la storia delle civiltà e delle idee è il romanzo più affascinante che ci sia, e anche perché nell'abisso lontano da cui emergono accoppiamenti di dèi e idee ci sono pensieri che potrebbero essere utili per noi ora.

Per esempio l'idea di Coomaraswamy che la tolleranza religiosa non va intesa come sopportazione indifferente, ma scaturisce dal pensiero che c'è un'unica verità e che ogni religione è solo il riflesso di quell'unica verità che nessuna religione possiede completamente: non sarebbe utile oggi capire che la parola stessa "religione" è pronunciata in modo abusivo? E scopriamo poi in Coomaraswamy l'idea che Platone, i Veda, le Upanisad e Cristo dicevano la stessa cosa, e cioè che Dio e gli dèi si manifestano giocando, e che gli esseri umani, imitando Dio, non possono fare niente di meglio che giocare: "L'attività di Dio è chiamata 'un gioco' proprio perché si dà per scontato che egli non abbia fini propri da perseguire; è in questo stesso senso che la nostra vita può essere 'giocata', e che, nella misura in cui la nostra parte migliore è presente in essa senza però appartenerele, la nostra vita diviene un gioco. A questo punto non possiamo più distinguere il gioco dal lavoro". E se a qualcuno sembrasse di aver letto qualcosa del genere nel Marcuse di Eros e civiltà, sappia che Coomaraswamy non filosofeggia, ma cita alla lettera i Vangeli, Platone e la storia delle religioni. E ci si chiede: se per caso oggi questa idea fosse approfondita, e si scoprisse che stava alla base di grandi civiltà passate ma che non sta alla base della nostra meschina civiltà di eurobond e terrore, e che quelle grandi civiltà costruivano e scrivevano meraviglie e noi costruiamo e scriviamo scemenze: questo non ci darebbe da riflettere? E non sarebbe interessante sottoporre l'idea di lavoro come gioco agli attuali reggenti del pianeta, che ci impongono il lavoro come annullamento di ogni creatività? Ecco a cosa servono i romanzi culturali come *La tenebra divina*: a farci uscire dall'analfabetismo mentale totalitario, perché se l'analfabetismo mentale si fregia oggi di essere "contemporaneo", non perciò smette di essere totalitario: e a noi non serve un pensiero unico e mortuario del mondo, asservito alla tecnocrazia e all'economicismo, a noi servirebbe un pensiero vivente e polimorfo: un pensiero con molti dèi e molte idee che giochino e facciano l'amore tra di loro.

³⁵ Dall'articolo di Giuseppe Montesano: *Quando gli dei danzavano con le idee degli uomini* (La Repubblica, venerdì 30 giugno 2017):

Due giovani intrecciano una fitta corrispondenza a molte centinaia di chilometri di distanza ³⁶. Si scambiano opinioni e scoperte scientifiche. Si pongono interrogativi profondi su come è fatto il mondo, su come tutto è incominciato e come andrà a finire. Lo fanno mille anni fa. E con una libertà che da noi non si sarebbe vista per molti secoli ancora. L'uno ha ventotto anni. Sa già di tutto. E' un geografo, un geologo, un fisico, un matematico, un astronomo, un filosofo. E' studioso di religioni comparate, di psicologia, persino musicista. Si chiama Al-Biruni, vive e lavora in quel che oggi è il nord dall'Afghanistan. L'altro, poco più che ventenne, si chiama Ibn-Sina (conosciuto anche come Avicenna). Nato in Khorasan, che oggi sarebbe Iran, al confine con l'Afghanistan, studia a Bukhara, che oggi è in Uzbekistan, si sposta a Gurganj, e infine a Isfahan, in Persia.

La chiamavano "Terra delle Mille città". Alcune erano allora più grandi e popolose di Parigi, Roma, Pechino o Delhi. Lui si trasferiva da una all'altra, offrendo le sue conoscenze e anche consigli politici (come capitò ad altri geni, ascoltati o inascoltati: da Confucio, a Dante, a Machiavelli). La sua opera più famosa è il ponderoso Canone di medicina, sulla cui traduzione latina è praticamente fondata tutta la nostra medicina. Nella corrispondenza col suo amico espone una teoria dell'evoluzione. Quasi dieci secoli prima di Darwin. I due avevano addirittura postulato l'esistenza in un punto imprecisato tra Atlantico e Pacifico di un continente ancora sconosciuto. Insomma erano arrivati in America 500 anni prima di Colombo, senza neanche mettersi in viaggio, in base a calcoli astronomici. Fenomeni. Ma non isolati. Ci fu un momento in cui l'Asia Centrale profonda pullulava di menti geniali e poliedriche. Mezzo millennio prima del miracolo del Rinascimento, dei Leonardo, dei Michelangelo e dei Galileo. Una folla di geni: da al-Khwarizmi, che avrebbe dato il nome al termine "Algoritmo", e che scoprì le orbite ellittiche dei pianeti attorno al Sole, secoli prima di Keplero, agli astronomi di Samarcanda che misurarono l'anno siderale con maggiore accuratezza di quanto poi fece Copernico, e l'inclinazione dell'asse della Terra con precisione pari a quella di oggi. Eccellevano nella scienze come in poesia. Di Omar Khayyam si conoscono le quartine in cui cantava la vita, l'amore, il vino, l'umanità.

Meno si sa che era anche un grande matematico. Fu tra i primi ad accettare i numeri irrazionali e a classificare i quattordici tipi di equazioni di terzo grado. Gli viene attribuita persino una teoria delle parallele che prefigura le geometrie non euclidee di Lobacevskij e Riemann, quelle che sarebbero servite ad Einstein per inquadrare le relatività e la "curvatura dell'Universo". Passano per arabi. E' vero, scrivevano in persiano e in arabo (che per un'epoca fu la lingua per eccellenza del pensiero e dei dotti). Ma non erano arabi. Sarebbe più esatto definirli cosmopoliti. Si professavano islamici come gli arabi. Ma in comune con gli arabi di El-Andalus avevano soprattutto tolleranza e rispetto per gli altri. I loro interlocutori erano ebrei, indù, buddisti e cristiani. Si trovavano più a loro agio a discutere con uomini di studio di una religione diversa, piuttosto che con i contrapposti fanatismi in seno alla propria. Erano a modo loro eretici. Anche se nessuno li mandò al rogo, come sarebbe successo invece secoli dopo ai loro colleghi europei. Le corti dei Califfi, gli Imperatori della Cina, e poi i Khan mongoli, si sarebbero contesi studiosi ed esperti appartenenti alle molte e diverse scuole dell'Asia centrale. Formavano una comunità, anzi una "rete liquida" che scambia informazioni e saperi, insomma anticipavano Internet.

Ibn Sina e Al Biruni sono solo i più famosi in mezzo ad una galleria sterminata di personaggi, scoperte, risultati scientifici, opere di ingegno, storie e aneddoti che affollano ... l'illuminismo perduto. ... L'età d'oro dell'Asia Centrale dalla conquista araba a Tamerlano è quasi un'enciclopedia (il cui) autore è uno studioso serio e molto brillante, che aveva iniziato la sua carriera come archeologo in Turchia e in Persia. Insegna alla Johns Hopkins, ha presieduto l'Aspen Institute, è uno dei massimi esperti mondiali di Asia Centrale. Al pari dei suoi soggetti di studio, coltiva interessi poliedrici. E' anche un musicista e ha scritto una strepitosa storia del jazz in Unione sovietica. L'illuminismo ... si riferisce a un'altra specialità in cui gli intellettuali dell'Asia Centrale eccellevano a cavallo tra il primo e il secondo millennio: la compilazione di grandi compendi dello scibile umano, anticipando Diderot e gli encyclopédistes nel secolo dei Lumi. La loro produzione rivaleggiava in quantità con i libri sacri dell'India e gli annali della Cina, superava l'analoga produzione europea nel Medioevo. Ma è andata in gran parte perduta. Delle 180 opere di Al Biruni ne restano 22, di cui gran parte ancora inedite, di Ibn Sina ne sopravvivono circa 200 su 400 ³⁷.

Ibn Sina e Al Biruni li avevo incontrati, se così si può dire, per la prima volta in Iran, quarant'anni fa. Me ne parlava, nella lunghe serate di coprifuoco a Teheran, un estroso collega giornalista, Pietro Buttitta, (il) fratello

³⁶ Dall'articolo di Siegmund Ginzberg: I primi illuministi parlavano arabo (La Repubblica, lunedì 12 giugno 2017).

³⁷ Nelle librerie di Teheran si potevano ancora reperire volumi di una serie di reprint anastatici di classici sull'Iran, sponsorizzati dalla sorella dello Scià. ... Qualche anno dopo avevo percorso in lungo e in largo l'Asia centrale cinese. Fu per me la scoperta di una terra magica, in cui il tempo pareva essersi fermato a molti secoli fa. Nel Xinjiang, il Turkestan cinese, avevo ritrovato le arguzie senza tempo di Nasreddin Hodja, l'amore per la vita, la danza e il vino, i tappeti di Kashgar, i meloni, le angurie e altri sapori della mia infanzia, e anche qualcosa della ferocia della Turchia in cui sono nato. Nel frattempo gli "Stan" (il Turkestan cinese, gli ex sovietici Kazakhstan, Kirgizstan, Uzbekistan, Tajikistan, Turkmenistan, ma anche Afghanistan, Pakistan e Iran) nell'immaginario occidentale sono ridiventati il buco nero del mondo. Malgrado uno sviluppo talora impetuoso, le contrade dove una volta vivevano i grandi geni ora evocano, ben che vada, il kitsch dell'esilarante Borat di Sacha Baron Cohen. Se no, di peggio: oscurantismo, ignoranza, burqa, taliban, malavita, terrorismo. A Mosca gli immigrati dall'Asia centrale ex-sovietica sono i più malvisti. Così come sono disprezzati a Pechino, temuti come mafiosi o terroristi gli uighuri originari dal Xinjiang. Salvo poi corteggiare gli Stan (e i loro dittatori) per farci passare le future magnifiche autostrade delle Vie della Seta.

del poeta, e in quanto siciliano passionatamente interessato all'eredità islamica.

Come ridare senso alla parola "umanesimo" ³⁸, chiedeva pensosamente Jean Beaufret subito dopo la seconda Guerra Mondiale ... intanto, conoscendolo nella sua vera natura, ...

Umanesimo, nella coscienza comune, è un pensiero puramente letterario (quasi un non pensiero) nemico della scienza (di qui l'annosa questione delle "due culture"), estraneo alla tecnica, o tecnico involontariamente, essendo una macchina per produrre discorsi retorici. Ma abbiamo eccellenti motivi per sostenere il contrario. L'umanesimo si manifesta ogni volta che una crisi, ..., ci costringe a ripensare la natura umana. Dove "crisi" non è solo un indice di decadenza, ma anche il segnale una trasformazione e un arricchimento che ha il proprio protagonista nella tecnica. Così è stato al tempo di Platone e dei Sofisti (svolta tecnica: l'alfabetizzazione di massa), al tempo degli umanisti (svolta tecnica: la stampa), e adesso con il web. Conclusione ovvia ma non sempre rilevata: l'umanesimo è una tecnica, e bisogna trovare delle tecnologie umanistiche adatte ai nostri tempi. Questo non è un semplice voto, ma un fatto, che ci viene suggerito, ...

... Una disciplina di nuova formazione, la biopoetica, ... getta un ponte tra le scienze cognitive, il darwinismo, la poetica e la paleoantropologia. La natura e lo spirito non sono due dimensioni contrapposte, sono i due volti di una medesima realtà che comunicano attraverso la tecnica, una delle cui forme più antiche è proprio la composizione di narrazioni, di quelle trame la cui origine non è diversa da quelle dei tessuti che ci accompagnano sin dal paleolitico. Gli umani, anche prima di parlare, raccontavano, tessevano trame con gesti, segni, tracce. E la nascita del linguaggio non decreterà certo la fine di questi storytelling muti e duraturi. Insediamenti come le grotte di Lascaux sono delle grandi forme di trasmissione di racconti che furono visitate non per le misere centinaia d'anni delle nostre cattedrali, ma per migliaia di anni, con una stratificazione che ha visto crescere il suo significato nel corso di questi tempi lunghissimi. Ma come è possibile raccontare ciò che non si sa? Perché indubbiamente i nostri antenati non erano consapevoli di fare storytelling parietale. La risposta viene da ... una riflessione sulla tecnica come competenza senza comprensione. Come già ricordava un grande esponente della tradizione umanistica, Vico, per cui homo non intelligendo fit omnia: gli umani agiscono prima di comprendere, e la comprensione, se e quando arriva, non è la premessa (come pensano i cartesiani) ma il risultato. L'immagine più potente ... condensare il ... discorso è il paragone tra un termitaio e la Sagrada Familia a Barcellona. Sembrano uguali, ma come è possibile? Gaudi ha fatto dei piani, ha avuto delle rappresentazioni, le termiti no. Ma proprio questo è il punto: nemmeno i neuroni di Gaudi hanno avuto delle rappresentazioni, hanno semplicemente "scaricato", esattamente come le termiti, che in fondo hanno trovato una scorciatoia: invece di creare delle rappresentazioni, come i neuroni di Gaudi, hanno direttamente creato la Sagrada Familia. Così pure, la lunghissima tradizione che ha portato a creare selci sempre più raffinate non è stata dettata da un progetto, ha incamerato il sapere nell'oggetto e lo ha trasmesso, con progressive evoluzioni, da una generazione all'altra.

Il che suggerisce che il tratto fondamentale dell'umano va cercato appunto nella capacità tecnica: l'umanesimo è anzitutto un manesimo, un uso sempre più esperto della mano. E la riflessione su cui si concentra il filosofo britannico Colin McGinn, in *Prehension. The Hand and The Emergence of the Humanity*, (The MIT Press, 2015) si concentra sulla funzione della manualità per la genesi del pensiero. Senza mani, e senza l'esperienza del manipolare e dell'afferrare, non avremmo avuto pensiero, senza la competenza della manualità non avremmo avuto la comprensione. Le mani com-prendono, afferrano (lo sapeva benissimo Hegel che riconosceva nel tedesco Begriff, "concetto", l'erede del verbo greifen, "afferrare"), indicano, e che, indicando senza afferrare, facendo dei gesti, avviano la produzione di simboli. È un tema centrale della filosofia, da Aristotele e Anassagora a Heidegger e Derrida, ed è tutto sommato un peccato che McGinn non lo ricordi (tranne un rapido riferimento a Heidegger), ma forse semplicemente non lo sa.

I gesti sono forse geroglifici transitori, come diceva Bacone, ma la loro codificazione rituale nella memoria di una società, oltre che la loro fissazione figurativa o letteraria ne garantisce la trasmissione storica, come suggeriva a metà dell'Ottocento Andrea de Jorio, in "La mimica degli antichi investigata nel gestire napoletano" che – con un evento che porterebbe alla rivalutazione di Jorio da parte ... dell'agenzia nazionale per la valutazione della ricerca universitaria notoriamente impressionata da tutto ciò che è anglofono – è stato pubblicato in traduzione inglese nel 2000 dalla Indiana University Press. Tra i gesti e le tecniche, da una parte, e lo spirito e l'immaginazione, dall'altra, non c'è discontinuità, ma si tesse piuttosto la grande trama dell'umano. In un libro che ha avuto una grande e meritata fortuna, e a cui sono particolarmente affezionato perché Eco me ne raccomandò la lettura l'ultima volta che lo vidi, *Da animali a dèi. Breve storia dell'umanità* ... lo storico israeliano Yuval Noah Harari sostiene che ciò che sta alla base dello sviluppo umano è l'immaginazione. Tesi giustissima, profondamente umanistica e radicalmente vichiana. I libri ... suggeriscono però che questa immaginazione non sta solo nella nostra testa, ma anche nelle nostre mani e nei loro manufatti tecnici.

³⁸ Dall'articolo di Maurizio Ferraris: L'eterno ritorno della parola umanesimo (La Repubblica, lunedì 3 luglio 2017),

Scienza e tecnica devono tutelare e sostenere pace, sviluppo sostenibile, progresso sociale e democrazia ³⁹.



Diego Velázquez, La fucina di Vulcano (Museo del Prado, Madrid)



Luca Giordano, Allegoria della pace e della guerra (Galleria Nazionale di Palazzo Spinola, Genova)



Pieter Paul Rubens, Le conseguenze della guerra ⁴⁰ (Galleria Palatina, Firenze)

³⁹ Non si possono certamente attribuire solo alla scienza ed alla tecnica tutte le responsabilità per le guerre e le ingiustizie, laddove queste originano, per lo più, dalle cattive politiche, spesso nelle mani degli umanisti (e degli avvocati, in primis), ma è innegabile che le scienze (soprattutto applicate) e le tecnologie sono ben capaci di costruire materiali e mezzi bellici, terribili e micidiali.

⁴⁰ Il dipinto allegorico è accompagnato da una lettera dell'artista che esprime il dolore per l'Europa, devastata dalle guerre, e si collega a sue riflessioni, durante le missioni diplomatiche per la Guerra dei Trent'anni, in cui diventa consapevole dell'inutilità della guerra e lancia un messaggio pacifista (che porta almeno alla pace tra l'Inghilterra e la Spagna). E' poi altresì evidente il legame storico-culturale con l'età contemporanea, dominata dall'imperialismo, i totalitarismi, la guerra civile europea, la shoah, la bomba atomica, la guerra fredda e le crisi attuali (pressoché strutturali).

Appendice C – Disparità ed alienazione

Dodici parole chiave, riunite in un elenco di sette, tracciano la via del vivere civile nelle società del mondo:

- | | |
|--|---|
| ☐ universalità | ☐ pluralismo / multiculturalità |
| ☐ fraternità | ☐ libertà / pace |
| ☐ tolleranza / reciproco rispetto | ☐ uguaglianza / equità / giustizia |
| | ☐ etichetta. |

Forse bastano queste parole, a testimoniare il perché del loro essere necessarie per il vivere civile nelle società del mondo (come “il pane e le rose”, per usare un celebre motto); pertanto quanto segue, integra con un breve commento queste parole. Allora universalità e fraternità servono a non porre confini, ricordandosi innanzitutto dei propri vicini, ovviamente familiari, amici, colleghi e conoscenti, ma anche i vicini qualsiasi. Infatti universalità è l’apertura al mondo, mentre fraternità fa sì che il mondo non sia fatto solo di belle parole, ma si concretizzi, a partire da proprio circondario (e dalle sue difficoltà reali).

Tolleranza e reciproco rispetto sono le parole chiave dei comportamenti richiesti, a tutti ed a ciascuno, per qualificare il vivere civile nelle società del mondo, perché nessuno ha un “più”, rispetto agli altri e tutti devono sapersi confrontare liberamente, evitando quelle cose che degradano e squalificano chi le propone/impone agli altri. Pluralismo e multiculturalità sono strumenti operativi, per concretizzare la tolleranza ed il reciproco rispetto, perché senza “più”, le diverse cultura portano ciascuna il proprio contributo e l’insieme delle culture arricchisce il mondo e le sue società.

Cancellate così tutte le cose indegne, la libertà “di e da”, cioè di essere persone piene/vere e di non essere persone prigioniere di una qualche miseria, è una condizione indispensabile e fondamentale, mentre la pace (intesa soprattutto come coesistenza pacifica) è la condizione ottimale, per usufruire degli enormi benefici della/e libertà. Infatti condizioni di guerra, guerriglia, terrorismo, ecc., di fatto, limitano la/e libertà, perché tutti sono giocoforza sottoposti a pesanti controlli. Inoltre pace è poi convivenza pacifica con l’ambiente naturale che non deve essere distrutto, per non finire assaliti da questo.

In parallelo alla/e libertà, l’uguaglianza, l’equità e la giustizia sono la garanzia per lo sviluppo delle persone singole e dell’intera società, in quanto solo così la sicurezza economica, i diritti politici e la crescita culturale possono esprimersi. L’alternativa è la fondazione di un sistema di caste e/o di classi, dove solo un’élite gode di certi benefici e tutti gli altri ne sono esclusi. A riguardo, un’attenzione particolare va poi riservata anche ai penultimi, perché spesso proprio a questi è fatto pagare il conto di accogliere/sostenere gli ultimi, lasciando invece indifferenti e non toccati quelli che stanno in alto.

Infine l’etichetta potrebbe sembrare un di più, forse inutile nel contesto del vivere civile delle società del mondo. Invece proprio l’etichetta, con tutte le sue cose minori, andando dall’educazione civica ad un galateo minimo, fa sì che le parole chiave precedenti si organizzano, si situino e si mantengano, in ambienti che ne permettano l’esistenza. Un semplice esempio è più che sufficiente e ben eloquente: è davvero piacevole vivere tra cumuli di immondizia, oppure è meglio vivere in un ambiente lindo ? ... la risposta è immediata e giustifica bene la scelta di mettere anche l’etichetta tra le parole chiave prescelte.

Oggi il concetto stesso di democrazia è inscindibile da quello dei diritti dell’uomo ... (con) l’effettiva partecipazione di tutti i lavoratori all’organizzazione politica, economica e sociale del paese. ... L’attuazione di una maggiore protezione dei diritti dell’uomo è connessa con lo sviluppo globale della civiltà umana. E’ un

problema che non può essere isolato sotto la pena non dico di non risolverlo, ma neppure di comprenderlo nella sua reale portata. Chi lo isola lo ha già perduto. Non si può porre il problema dei diritti dell'uomo astraendolo dai due grandi problemi del nostro tempo, che sono i problemi della guerra e della miseria, dall'assurdo contrasto tra l'eccesso di potenza che ha creato le condizioni per una guerra sterminatrice e l'eccesso d'impotenza che condanna grandi masse umane alla fame (Norberto Bobbio, L'età dei diritti).

Abbiamo paura dell'esclusione, di restare fuori dal posto dove tutti vogliono apparentemente esserci: club esclusivi, ma da milioni di iscritti! Siate consapevoli però che consegnate la vostra vita a degli algoritmi che possono venire utilizzati da autorità statali e, peggio ancora, da aziende che privatizzano alcune funzioni di controllo sulla società ⁴¹.

Prendo una coppia di concetti del filosofo tedesco Peter Sloterdijk, che non è di sinistra: la più grande disparità è tra quelli che sono in e quelli che sono out, tra i cosiddetti Paesi civilizzati, che hanno alti standard di diritti sociali, libertà e sicurezza, e quelli che ne sono fuori. Sloterdijk usa il termine "cupola", per indicare un muro di vetro, concavo, che ci fa vedere fuori e ci protegge, come in certi film di fantascienza, ... E' un paradosso: a 25 anni dalla caduta del Muro di Berlino viviamo in un mondo apparentemente più unito, e in effetti ci sono meno differenze tra gli Stati, ma sono aumentate le divisioni interne, sempre più profonde, e trasversali: ci sono abissi tra ceti diversi e dentro uno stesso ceto, per motivi culturali e religiosi, non solo economici.

Il muro è psicologico, simbolico, televisivo, con un effetto di realtà: distingue chi è in da chi è out. Anche se non verrà costruito, il messaggio è arrivato ... contro l'universalismo dei diritti, a favore di una visione locale e nazionalista per cui ognuno comanda a casa sua; e va bene anche agli anti-imperialisti africani come Mugabe, che apprezza Trump e il suo "America first", che diventa "Zimbabwe first".

Non mi piacciono (nemmeno) gli imprenditori privati che controllano lo spazio pubblico di milioni di vite. Sarebbe un'altra sciagura! A Davos mostrano il capitalismo dal volto umano, sembrano interessati a risolvere i problemi del mondo e demonizzano i nazionalismi, ma mentono! I nazionalismi sono la reazione al capitalismo e ci danno un falso senso di sicurezza, che è pericoloso. I social network hanno meccanismi simili a regimi poco democratici. In Cina vogliono misurare con algoritmi la fiducia sociale dei cittadini in base a quello che fanno sul web, se guardano siti dissidenti o pornografici. Come in una fiction, ... in un futuro vicino, la condizione sociale di ognuno di noi dipende dai like che prende sul web.

Intanto non demonizzerei la fiction in sé, a volte ci apre gli occhi. Penso ai film distopici di Hollywood ... nato per ragazzi, mostra alcuni problemi della nostra società meglio di tanti politici. Con la guerra fredda c'erano due grandi narrazioni: il mondo libero contro il mondo giusto, il liberismo contro il comunismo e ognuna produceva fake news. Oggi è solo aumentata la possibilità di produrle e diffonderle. La vera opposizione è tra modernità e relativismo. Penso alla destra creazionista americana che rifiuta Darwin e alla sinistra decostruzionista che vede ovunque il fascismo del potere e propone una visione relativistica; la prima nega la biologia, la seconda, in America Latina, equipara medicina e stregoneria. La scienza è unica, dobbiamo essere orgogliosi di questa invenzione dell'Occidente.

Dovremmo essere felici che l'auto si guidi da sola ⁴² e ci lasci guardare un film, leggere un libro, baciare una donna. Sennò dobbiamo rinunciare alla lavatrice che ha permesso alle donne di emanciparsi dal lavoro di lavandaie. E' falsa la dicotomia uomo/robot, le nostre vite sono già automatizzate, sempre più digitali; e sta mutando la nostra coscienza, il rapporto con la vita e la morte.

Il punto fondamentale è lo schermo. Vediamo tutto lì, e ciò crea l'illusione di una distanza, che sia un gioco. Non è un caso che sia parallelo il boom di social network e videogame: si forgia una nuova soggettività, in prima persona totale, del tutto immersa in una realtà virtuale, da trance, da gioco. Si regredisce alla soggettività di Tom e Jerry, i cartoon dove in una puntata si muore e in quella dopo si è vivi. Così i videogiochi ti possono trasformare in zombie. Attraverso lo schermo viviamo il tempo in modo circolare. Muori, giochi, muori ancora, riparti. Niente trascendenza, solo ripetizione.

Oggi è tutto apparentemente visibile. A livello di piccole storie possiamo vedere tutto: video rubati, intercettazioni, gossip. ... Ma sui grandi processi sociali ed economici ... siamo all'oscuro: sono più oscuri e imprevedibili. Chi poteva profetizzare la crisi del 2008? E il razzismo in Europa? Le nostre vite sono oscure a livello globale. Fin troppo chiare a livello personale. ...

L'amore vero è disperato: scelgo te perché non posso sopravvivere senza. Sono romantico in questo, monogamo e violento. L'amore è violenza, sopraffazione su se stessi e gli altri, è esclusivo. E osceno, oggi, perché i sentimenti sono estromessi da un mondo dove il porno regna sempre di più. Avere più partner che soddisfanno aspetti diversi non è vero amore. Sono contrario.

⁴¹ Dall'intervista al filosofo e psicanalista sloveno, Slavoj Žižek: Assurdo temere automazione – La scienza è l'orgoglio dell'Occidente (Corriere della Sera, venerdì 3 giugno 2017).

⁴² L'opposizione allo strapotere di Internet non significa riconoscere che l'avvento dei robot sia un progresso. Questa è una delle tesi dell'autore che non affronta invece il tema, di grandissima attualità, della disoccupazione crescente, a causa dell'automazione e della digitalizzazione. Un altro tema, legato poi all'automazione ed alla digitalizzazione, è la loro non-neutralità, perché scrivere sistemi vuol dire anche fare scelte non-neutre e, per lo più, volte al servizio del/i potere/i.

(Credo) nello Spirito Santo. Cito il mio amico Rowan Douglas Williams, arcivescovo inglese, per cui il cristianesimo dice: Dio è morto, c'è solo lo Spirito santo, che è una visione collettiva. Io ci credo in maniera materialistica: ci siamo solo noi, ma almeno ci siamo. Trovo pericolosa la visione spirituale pseudo-orientale che sta prendendo piede. I torturatori peggiori spesso sono mistici. Non parlo solo dei terroristi dell'Isis, ma del Brasile all'epoca della dittatura, dove molti torturatori della polizia avevano una visione mistica della religione.

La sky-boxification della società (è) un abisso (che) separa la gente comune da chi sta in cima: che non ha capito qual è il senso della protesta populista ⁴³.

Il malessere non nasce solo da disoccupazione e paura dei migranti, ma dalla perdita di stima e dagli slittamenti progressivi dell'identità sociale e politica. La protesta ha aspetti orribili e pericolosi, ma è basata su legittime rimostanze da parte di chi si sente indebolito da tre decenni di globalizzazione neoliberale. La passione e il risentimento che animano il populismo riguardano la perdita di status, il disprezzo subito dalla classe media, dai lavoratori, dalla gente.

Scrivevo da critico del liberalismo, ma da critico amichevole contro la tesi che il discorso pubblico liberale non deve impegnarsi su questioni sostantive circa che cosa sia una vita buona, che governo e legge dovrebbero rimanere neutrali rispetto a concezioni in competizione tra loro sul modo di intendere il bene.

Due (obiezioni principali): la prima (è) che non è possibile decidere fondamentali questioni di giustizia senza affrontare concezioni diverse della vita buona, la seconda (è) che tenere fuori dal discorso pubblico la discussione su che cosa sia bene crea un vuoto rispetto a quel che preme ai cittadini, il che taglia fuori la loro voce nelle questioni importanti. Questa esclusione provoca uno sgradevole contraccollo: c'è chi riempie il vuoto con concezioni intolleranti.

Esattamente (è) una rivolta populista contro un discorso pubblico di tipo puramente tecnocratico e manageriale, che si identifica con una fede trionfalistica nel mercato e che al mercato ha consegnato in outsourcing il giudizio politico e morale. Questo processo è cominciato negli anni Ottanta con Reagan e Thatcher, ma è continuato con i partiti di centrosinistra: Clinton, Blair, Schroeder hanno da una parte certo moderato la fede nel mercato, ma dall'altra l'hanno consolidata. Non è stata mai messa in discussione la promessa che i meccanismi del mercato siano strumenti primari per realizzare il bene pubblico.

E' anni Ottanta che naturalmente devo affrontare questa obiezione (perché una certa neutralità nella concezione del bene tiene al riparo dagli autoritarismi) e ho sempre risposto che se ho ragione nella mia tesi che un discorso pubblico neutrale non ci può fornire i principi per una società giusta, allora questa insistenza è percepita come una richiesta oppressiva, e anche disonesta, perché la gente sa che le decisioni che si prenderanno non accoglieranno la loro voce.

L'effetto paradossale è che il liberalismo della neutralità, che nasce soprattutto dalla intenzione di evitare il rischio dell'autoritarismo, crea di fatto la condizione per una politica autoritaria, perché genera una reazione contro le élite liberali che ha preso due forme: il fondamentalismo religioso e il nazionalismo populista di destra, un altro modo di vestire una sfera pubblica nuda.

E' la sfida del nostro tempo. Il tema centrale della politica è l'appartenenza alla comunità e il suo significato. Come cittadini democratici di società pluraliste noi abitiamo dentro una pluralità di comunità e le nostre identità sono definite in modi molteplici. Questo significa che dobbiamo deliberare insieme sui racconti e le tradizioni da cui possiamo trarre un significato.

Ci sono due diversi modi di affrontare il tema del rispetto reciproco. Uno è quello dell'evitarsi. L'altro è quello basato sull'impegno. Questo ci spinge a trovare modi di ragionare apertamente sulle differenze e incoraggia tutti i cittadini non a lasciar fuori dalla sfera pubblica le convinzioni morali e spirituali, ma a entrarci per come sono, pienamente "abbigliati" delle loro tradizioni, culture, convinzioni morali.

(La rivolta populista colpisce di più i partiti progressisti) perché sono sentiti come più collegati alle élite professionali e tecnocratiche che alla gente comune, che rappresentava la loro base. Per rivitalizzare il progetto socialdemocratico bisogna in primo luogo re-immaginare il significato, lo scopo e la dignità del lavoro ⁴⁴. In secondo luogo bisogna valorizzare il significato della comunità nazionale ⁴⁵, senza lasciare che il patriottismo diventi monopolio dei populist.

... Molti filosofi si rivolgono essenzialmente ad altri filosofi; io invece cerco di collegare la filosofia alla vita. Socrate camminava per le strade di Atene conversando con gente comune: cominciava con domande elementari e li portava ad affrontare questioni fondamentali della giustizia e del bene.

La velocità non giova a nulla, se si corre nella direzione sbagliata (proverbio di indiani nativi di America).

Filosofia ⁴⁶ è stata per gran parte della storia occidentale quasi sinonimo di scienza e sapienza. L'opera maggiore di Isaac Newton porta ancora il titolo di "principi matematici di filosofia naturale. Ma da allora, e con

⁴³ Dall'intervista al filosofo americano della politica, Michael Sandel: Vinciamo il populismo tornando a parlare con la gente comune (La Repubblica, lunedì 5 giugno 2017).

⁴⁴ Questa/o proposta/invito percepisce proprio il tema della disoccupazione crescente, a causa dell'automazione e della disoccupazione, lasciato invece irrisolto nell'intervista precedente.

⁴⁵ Nel contesto europeo e soprattutto italiano, la cosiddetta comunità nazionale deve spaziare dalla dimensione continentale, agli ambiti regionali e locali, certamente passando per le entità statali, ma sapendole opportunamente superare.

⁴⁶ Dall'articolo del filosofo, Andrea Zhok: Filosofo cercasi nell'era del caos (L'Espresso, domenica 18 giugno 2017).

particolare intensità dal secondo dopoguerra, le cose sono drammaticamente cambiate. Oggi la funzione e l'autorevolezza un tempo evocate dal termine "filosofia" sembrano essere monopolio delle scienze naturali. Ci si potrebbe chiedere, a questo punto, quale possa essere (o se ancora debba esservi) uno spazio della filosofia nel mondo odierno nell'epoca ella scienza. Il fatto che più o meno tutte le scienze oggi note, dalla fisica alla biologia, dalla psicologia alla sociologia siano nate come "costole" della riflessione filosofica può richiamare glorie passate, ma non dice molto delle possibilità presenti. Dovremmo forse risolverci a considerare la filosofia come una forma di conoscenza superata, da gettare nella "pattumiera" della storia, accanto all'alchimia, alla frenologia, all'astrologia ed altre pseudoscienze?

Di fatto, l'autorevolezza conquistata dalle scienze naturali ha finito per esercitare sulla filosofia una pressione sia concreta, in termini di riduzione degli spazi accademici e di ricerca, sia per così dire psicologica, creando una sorta di crisi identitario. Questa crisi ha indotto nel '900 l'attività filosofica a cercare di ridefinire la propria identità. L'esito di questo processo è stato l'emergere di quattro orientamenti primari: la filosofia si è concepita in sempre maggior misura o come "riflessione sulla scienza" (epistemologia, metodologia, ecc.), o come "cultura critica" (ermeneutica, postmodernismo, decostruzionismo, ecc.), o come preservazione della tradizione (storia della filosofia), o traendo senz'altro ispirazione e stilemi dalle scienze naturali (filosofia analitica). Questa classificazione è naturalmente approssimativa e non esaustiva, ma fatta ammenda per la necessaria approssimazione, queste tendenze sono nei loro tratti generali facilmente accertabili.

Ora, chiediamoci: tale ridefinizione degli orientamenti è tutto ciò che si può attendere dalla tradizione filosofica? E' utile soffermarci a questo proposito sul decisivo rapporto con la scienza. Quel è la forma di conoscenza che la scienza moderna de facto finisce per consentire e proporre? Al netto di analisi di dettaglio, il problema macroscopico che l'epoca della scienza naturale non può evitare di proporre è quello della frantumazione dei saperi. La divisione del lavoro, e l'interesse prioritario per l'efficacia casuale, hanno fatto sì che oggi nessun fisico possa dire di conoscere senz'altro la Fisica, nessun biologo di conoscere la Biologia, nessun economista di conoscere l'Economia, ecc. Il sistema di produzione delle verità scientifiche è un sistema che si giova delle virtù della divisione del lavoro e la raccomanda.

Articoli scientifici generalisti sono scarsamente apprezzati a livello accademico, mentre la specializzazione perseverante è costantemente premiata. Tutto ciò ha ottime ragioni nella capacità di questo modello metodologico di far crescere le competenze operative (si pensi agli straordinari progressi della medicina nell'ultimo secolo). E tuttavia, la Scienza, quando ancora non si distingueva dalla Filosofia, faceva qualcosa di essenzialmente diverso. Accanto all'attenzione per il governo locale dei processi materiali era essenziale la ricerca di una "visione vera" del mondo. Di ciò nella prassi delle scienze contemporanee non è rimasta sostanzialmente traccia. La frammentazione in oggetto non coinvolge infatti solo le partizioni interne alle singole scienze, ma in modo ancor più radicale le relazioni tra scienze diverse. Non esiste una concettualità compatibili tra, ad esempio, fisica, psicologia, economia, storia, biologia evoluzionistica. Ciascuna scienza organizza i propri saperi in cornici parzialmente, o talvolta integralmente, incompatibili con i quadri proposti da altre scienze. Concetti irrinunciabili in un campo risultano inconciliabili con conetti irrinunciabili in un campo diverso. Si potrebbe dire che questo è un necessario sacrificio al progresso scientifico. Questa frammentazione dei sapere non è però un incidente senza vittime. Il suo risultato complessivo è una forma storica inedita di irrazionalità. Un mondo sommerso di saperi specialistici, e di informazioni particolari irrelate, produce un disorientamento cognitivo profondo e diffuso. L'esito paradossale è che in un mondo apparentemente dominato da paradigmi scientifici lo spazio per pregiudizi vaghi, leggende metropolitane, credenze settarie, sapienze alternative, dogmi incoercibili è più ampio che mai.

E' in questa giunzione che la filosofia, intesa in senso classico, ha la possibilità di esercitare un ruolo essenziale. Gli orientamenti filosofici novecenteschi menzionati più sopra, pur preziosi e fecondi, mancano programmaticamente di un aspetto che fu invece al cuore del ruolo tradizionale della filosofia. Ciò che accomuna paradossalmente orientamenti filosofici così diversi come la riflessione epistemologica, la storia della filosofia, la critica culturale e l'indagine analitica (se intesi in senso specialistico) è la tendenziale rinuncia all'orizzonte della sintesi, al tentativo di produrre visioni del mondo, o loro abbozzi. La propensione tradizionale alla sintesi sistematica, al "sistema filosofico" è stata progressivamente percepita dal secondo dopoguerra come qualcosa di indebitamente ambizioso, di inattuale, di pretenzioso, addirittura di violento. L'influenza del modello organizzativo delle scienze ha finito per gettare implicitamente discredito proprio su quel tipo di sintesi razionale di cui oggi si sente acutamente la mancanza. Alla paradossale condizione odierno, di un irrazionalismo grondante di informazioni irrelate, oggi finiscono per porre rimedio guru autopromossi, tuttologi da Talk Show, promotori di fedi, e fondamentalisti vari. Occasionalmente (su appello dei media più scrupolosi) viene convocato qualche scienziato in pensione, la cui autorevolezza settoriale viene spesa per farlo esprimere su massimi sistemi di cui, nel migliore dei casi, è un tardivo dilettante ⁴⁷.

⁴⁷ In questo contesto, invece, l'indagine filosofica è l'unica forma culturale nota ad aver elaborato metodi e forme riflessive adatti a produrre sintesi razionali (scientificamente informate), quadri sistematici, mappe e visioni che consentano una lettura del presente e un orientamento razionale nel mondo. Una visione che miri alla comprensività e coerenza d'insieme non ha né rigore né statuto razionale inferiore a una visione analitica. La filosofia ha il diritto, ma anche il dovere, di porre un argine a questo pluralismo brado che, lungi dall'essere un contributo alla ragione, rappresenta una paradossale strisciante abdicazione ad ogni intelligenza.

Generalità

La presente postfazione prende in esame l'intera Commedia dantesca, in prossimità del 700° anniversario della scomparsa di questo Autore, proponendo innanzitutto una analisi statistica dei luoghi citati, nonché dei personaggi legati a questi luoghi. L'analisi si pretende esaustiva, ricordando anche i luoghi, ovviamente meno frequenti, fuori dall'Italia (a riguardo, si ricordi che Dante non poteva avere cognizioni geografiche molto maggiori di quelle già condensate nell'Ecumene di Tolomeo). Per questo fine, studenti di una Scuola superiore, a gruppi, hanno letto tutti i canti delle tre Cantiche con cui si compone la (Divina) Commedia (di Dante Alighieri), preparando una lista ordinata dei dati richiesti. La loro dedizione e la loro cura hanno fornito un supporto indispensabile, preziosissimo e fondamentale, per formare tutta la base di dati da cui sono partite le analisi statistiche, grafiche e geomatiche che costituiscono il centro di questa postfazione.

Dopodiché si presenta l'analisi di varianza (con il calcolo degli indici di Pearson) e l'analisi della connessione (con quello degli indici di Bonferroni), constatando l'assenza di una legge sul comportamento medio delle variabili trattate e tuttavia una disposizione non interamente casuale (per contro, il valore dei coefficienti di correlazione mostrano curiose tendenze nell'Inferno ed in Paradiso, in accordo con le idee politiche di Dante, risultando invece pressoché nullo per il Purgatorio). Infine si costruisce una rete che organizza il flusso di informazioni fra personaggi e luoghi, a partire dalle tabelle dei dati raccolti. Questa rete ha il modello funzionale simile a quello di una rete di livellazione, oppure ad una rete di differenze di potenziale o flussi, in altre discipline (pur nell'ovvia assenza di osservazioni e di un loro modello stocastico-metrologico). I dati raccolti sono condensati in una serie di mappe anamorfiche che ne facilitano la lettura.

Anche in questo caso, indispensabile, preziosissimo e fondamentale è il contributo dell'architetto e grafico che ha prodotto le mappe anamorfiche e le altre immagini, poste a corredo delle elaborazioni statistiche e numeriche della presente postfazione (a riguardo, meriti identici sono da attribuire al docente di italiano che ha ben coordinato tutta la ricerca dei suddetti studenti di Scuola Superiore): Senza piccoli, ma assai utili, contributi, anche le grandi idee non valgono nulla. L'intera analisi non ha pretese di analizzare la Commedia, ma segnala semplicemente, da un punto di vista numerico, il rigore della costruzione dantesca, in termini di precisione ed affidabilità. Per contro, da un punto di vista geomatico, la postfazione offre un ulteriore esempio delle possibilità offerte dalle Applicazioni geomatiche che attualmente riescono a muoversi in ambiti lontani dalla Geomatica e dalla Geomatica Applicata, quali quelli delle Scienze umane.

Questo approccio è particolarmente interessante, perché intende offrire, proprio senza alcun atteggiamento di superiorità, il punto di vista dei geomatici, con le loro tecniche di misura, i loro modelli matematici ed i loro metodi di calcolo e di analisi, ad altre discipline, prendendo in considerazione altri dati, diversi da tutti quelli tradizionalmente affrontati dalle discipline del rilevamento (con volontà di confronto, con spirito di servizio e con voglia di imparare cose nuove). Così il punto d'incontro auspicato è, da un lato, allargare i confini delle Applicazioni Geomatiche, in questa direzione (come in altre verso le quali, si spera, si rivolga presto l'interesse di altri gruppi della comunità dei geomatici), ma da altro canto, trovare interlocutori interdisciplinari e multidisciplinari che propongano esempi, di sicuro interesse, valutino criticamente le metodologie impiegate ed i risultati ottenuti, e tengano aperto un dialogo costruttivo che faccia crescere criticamente e migliorare tutte/entrambe le comunità d'incontro.

⁴⁸ Questa postfazione è interamente ripresa da: A 700 anni dalla morte di Dante: la Geomatica della Commedia, di Francesco Fiermonte, Marco Gnemmi, Luigi Mussio (Bollettino della SIFET, Sezione Scienza, 2021).

In questo modo, la lettura integrale della Commedia dantesca permette d'identificare un certo numero di personaggi e luoghi, come sono riportati nei versi che, a terzine di endecasillabi, compongono i canti dell'Inferno, del Purgatorio e del Paradiso. Le elaborazioni effettuate e presentate nel seguito procedono alla mappatura dei luoghi e dei luoghi dei personaggi, distinguendo l'Italia dal resto del mondo (allora conosciuto)⁴⁹, all'analisi statistica dei personaggi, raggruppati (per tipi), così come sono disposti nei vari siti (gironi, cornici e cieli) dell'Inferno, del Purgatorio e del Paradiso⁵⁰, ed infine alla costruzione di una speciale rete⁵¹ (di tipo geodetico), con il flusso di informazione che percorre l'intera Commedia. Per contro, non si danno altre informazioni sulla vita di Dante Alighieri (Firenze, tra il 21 maggio ed il 21 giugno 1255 – Ravenna, 13/14 settembre 1321, ed una “curiosa” illustrazione è riportata in Fig. 1), né sulle sue opere.

D'altra parte, essendo arcinoto (e facilmente reperibile) tutto quanto riguarda il sommo poeta è comunque estraneo agli scopi di questa postfazione. Ancora non si fornisce un commento sul testo della Commedia, né sulle ipotesi cosmologiche alla base della stessa, dove è ampiamente commentata⁵². Alcune considerazioni conclusive sottolineano i limiti di questa postfazione. Infatti mentre è riportata la successione dei personaggi e dei luoghi, come la loro ripartizione in canti ed in cantiche, nonché i loro riferimenti alla storia ed alla geografia, nulla è detto per quanto riguarda connessioni tematiche e/o lessicali, oppure semantiche e/o sintattiche. A riguardo, sarebbe facile citare tre volte le “stelle”, come parola finale di tutte e tre le cantiche, ma poi (ad esempio, che dire di due inizi, dopo quello arcinoto dell'Inferno), meglio avere coscienza dei limiti propri e di questa ricerca: altri possono continuare).

I dati

La lettura integrale della Commedia dantesca ha permesso di identificare un certo numero di personaggi e di luoghi, così come sono riportati nei versi che, a terzine di endecasillabi, compongono i canti dell'Inferno, del Purgatorio e del Paradiso. Le Tabelle 1, 2 e 3 riportano l'elenco dei personaggi, con il loro nome, la data e il luogo di nascita e di morte, una loro ricollocazione odierna (in termini di regioni, per l'Italia, e di stati altrove), e la loro professione. Le Tabelle 4, 5, 6 riportano l'elenco dei luoghi e la loro ricollocazione odierna (con gli stessi criteri) e, più oltre, la Tabella 8 dà avvio all'analisi statistica dei dati.

Una nota, appena prima di concludere la presentazione dei dati, ricorda le differenti strutture dell'Inferno, con i suoi gironi (da Gerusalemme proprio al centro della terra), del Purgatorio, con le sue cornici (dalla spiaggia dell'Oceano Australe al Paradiso terrestre), e del Paradiso, con i suoi cieli (da quello della Luna all'empireo), seguendo la nota distinzione, già aristotelica e tolemaica, valida fin all'avvento della concezione copernicana eliocentrica (per altro, già trovata da Aristarco di Samo e riscoperta dai persiani, con secoli d'anticipo rispetto a Copernico) fra il mondo sublunare ed i cieli con l'empireo.

Nel seguito, si procederà alla mappatura dei luoghi e luoghi dei personaggi, distinguendo l'Italia dal resto del mondo, all'analisi statistica dei personaggi, raggruppati (per tipi), così come sono disposti nei vari siti (gironi,

⁴⁹ A riguardo, notevoli sono le mappe anamorfiche che presentano superfici geografiche, opportunamente deformate in relazione alla presenza (o meno) di certe entità, quali personaggi e luoghi.

⁵⁰ L'analisi statistica è condotta classicamente, in modo completo, a due vie: siti (cioè gironi, cornici e cieli) e personaggi (divinità, regnati, nobili, religiosi, altri uomini, studiosi e donne), ed a tre vie (per le tre cantiche), solo relativamente all'analisi della connessione, in quanto risultata ben più significativa.

⁵¹ Una rete speciale (di tipo geodetico) è costituita dal flusso di informazione fra un personaggio od un luogo ad un altro personaggio e/o un altro luogo, così come si presentano nella Commedia, in relazione alle loro “regioni”, nonché alle loro epoche e professioni (se si tratta di personaggi). Questa rete che, in Geodesia e Topografia, ha il suo equivalente in una rete di livellazione (ed in altre discipline una rete di differenze di potenziale o di flussi materiali od immateriali), se interamente connessa, ha un solo difetto di rango e, come tale, richiede un vincolo esterno su uno qualsiasi dei suoi nodi (detti capisaldi, nelle reti di livellazione).

⁵² Commenti alla Commedia avvengono quasi da subito, in parte, da Giovanni Boccaccio, ed interamente da Francesco di Bartolo da Buti, e studiata, nella sua struttura, da Antonio di Tuccio Manetti cui ha fatto seguito la conferma autorevole di Galileo Galilei

cornici e cieli) dell'Inferno, del Purgatorio e del Paradiso, ed alla costruzione e studio di una speciale rete (di tipo geodetico), che costituisce il flusso di informazione fra un personaggio o luogo ad un altro personaggio e/o luogo, così come si presentano nella Commedia, in relazione alle loro "regioni", nonché alle loro epoche e professioni, se si tratta di personaggi.

La Tabella 7 mostra presenze, per Regioni italiane ed Altre nazioni, di personaggi (con i loro luoghi) e luoghi che si riferiscono, all'incirca, alle conoscenze geografiche già riportate sull'Ecumene di Tolomeo (Fig. 2). con l'intera Europa (comprese le isole Britanniche e confusamente la Scandinavia, ovvero con il Mar Baltico congiunto al Mar Binano e senza il Mar Glaciale Artico), il bacino del Mediterraneo (fino al Mar Nero ed al Mar Caspio), il Nord Africa (fino al Golfo di Guinea ed al Corno d'Africa), tutto il Medio Oriente e l'Asia che si affaccia sull'Oceano Indiano (con l'India, l'isola di Cylon / Sri Lanka e l'Indocina), oltre ad una terra immaginaria che congiunge l'Africa Orientale all'Asia Sudorientale: in questo, meglio Omero che chiude tutte le Terre emerse, allora note, con l'Oceano).



Fig. 1. Dante Gabriele Rossetti, Giotto dipinge il ritratto di Dante (collezione privata, 1852)



Fig. 2. Ecumene di Tolomeo

INFERNO

INFERNO

Nome e cognome	Nascita	Morte	Luogo
I canto			
Anchorse			Grecia
Camilla			Italia
Eurialo			Grecia
Julio (Giulio Cesare)	13/07/100 a.C. (Roma)	15/03/44 a.C. (Roma)	Italia
leone			inferno
lonza			inferno
lupa			inferno
Niso			Grecia
Ottaviano Augusto	23/09/63 a.C. (Roma)	19/08/14 d.C. (Roma)	Italia
Publio Virgilio Marone	70 a.C. (Pietole)	19 a.C. (Brindisi)	Italia
San Pietro	1 d.C.		Italia
Turno			Italia

Tabella 1. Personaggi dell'Inferno

Nel mezzo del cammin di nostra vita
mi ritrovai per una selva oscura,
ché la diritta via era smarrita.
(Dante Alighieri, Commedia – Inferno, canto I, versi 1-3).

PURGATORIO

PURGATORIO

Nome e cognome	Nascita	Morte	Luogo
I canto			
Calliope	-	-	Grecia
Piche	-	-	Grecia
Catone	95 a.C. (Roma)	46 a.C. (Roma)	Italia
Alighieri Dante	1265 (Firenze)	1321 (Ravenna)	Italia
Marone Publio Virgilio	70 a.C. (Andes, oggi Pietole)	19 a.C. (Brindisi)	Italia
Marzia	Seconda metà del I sec a.C.	Seconda metà del I sec a.C.	Italia

Tabella 2. Personaggi del Purgatorio

PARADISO

Italia/Lazio	-	-	Grecia
--------------	---	---	--------

Tabella 2. Personaggi del Purgatorio.

PARADISO

Nome e cognome	Nascita	Morte	Luogo
I canto			
Apollo			Grecia
Beatrice (Bice Portinari)	1266 (Firenze)	1290 (Firenze)	Italia
Glauco			Grecia
Marsia			Grecia

Tabella 3. Personaggi del Paradiso

INFERNO

INFERNO

Luogo citato	Luogo odierno
I canto	
Italia	Italia
Roma	Roma, Lazio, Italia
Troia	Hissarlik, Turchia

Tabella 4. Luoghi dell'Inferno

"O frati," dissi, "che per cento milia
perigli siete giunti a l'occidente,
a questa tanto picciola vigilia
d'i nostri sensi ch'è del rimanente
non vogliate negar l'esperienza,
di retro al sol, del mondo senza gente.

**Considerate la vostra semenza:
fatti non foste a viver come bruti,
ma per seguir virtute e canoscenza".**

Li miei compagni fec'io sì aguti,
con questa orazion picciola, al cammino,
che a pena poscia li avrei ritenuti.

(Dante Alighieri, Commedia – Inferno, canto XXVI, versi 112-123).

PURGATORIO

PURGATORIO

Luogo citato	Luogo odierno
I canto	
<u>Cirra</u>	Colle <u>Cirra</u> , Grecia (mitolo
Parnaso	Monte Parnaso, Grecia (mi
II canto ... XXXII canto	

Tabella 5. Luoghi del Purgatorio

Ahi serva Italia, di dolore ostello,
nave senza nocchiere in gran tempesta,
non donna di provincie, ma bordello!
(Dante Alighieri, Commedia – Purgatorio, canto VI, versi 76-78).

PARADISO

XXXIII canto	
//	

Tabella 5. Luoghi del Purgatorio.

PARADISO

Luogo citato	Luogo odierno
I canto	

Tabella 6. Luoghi del Paradiso

u' ben s'impingua se non si vaneggia.⁵³
(Dante Alighieri, Commedia – Paradiso, canto X versi 96).

A l'alta fantasia qui mancò possa;
ma già volgeva il mio disio e 'l velle,
sì come rota ch'igualmente è mossa,
l'amor che move il sole e l'altre stelle.
(Dante Alighieri, Commedia – Paradiso, canto XXXIII versi 142-145).

⁵³ Pochi passi, oltre la terzina iniziale del primo canto dell'Inferno, posto a proemio dell'intera Commedia, ed i quattro versi finali (cioè un'ultima terzina ed un verso isolato) del trentatreesimo ed ultimo canto del Paradiso, servono a mostrare lo spirito di Dante, come poi si evidenzia con le analisi fatte. Infatti Dante è uno spirito libero e dissidente che, pur credente, nel Dio cristiano del medioevo europeo, è certamente un cristiano maturo e non becero ossequiente un'autorità papale che parteggia per quelli (i guelfi neri) che lo condannano a morte e lo costringono all'esilio per tutta la vita. Allora il guelfo bianco, già politicamente impegnato nella gestione della cosa pubblica fiorentina, diventa un ghibellino fuggiasco. Pertanto Ulisse, spirito libero e dissidente, del mondo antico, è una sua bandiera e la critica politica si rivolge, senza giri di parole, tanto a quell'Italia che molto simile all'abbandonata sua Firenze, quanto a quella chiesa cattolica, così impegolata nel potere temporale, da compromettere la necessaria esemplarità spirituale. Tutto ciò fa sì che non solo la Commedia, ma anche Dante stesso siano tuttora attualissimi.

Inferno

Abruzzo: 1
 Campania: 1
 Emilia: 27
 Lazio: 67
 Liguria: 1
 Lombardia: 7
 Marche: 5
 Piemonte: 4 / **Italia: 215**
 Puglia: 1
 Sardegna: 4
 Sicilia: 7
 Toscana: 78
 Trentino: 2
 Veneto: 10
 Arabia: 2
 Austria: 2
 Belgio: 1
 Cipro: 2
 Croazia: 2
 Egitto: 5
 Etiopia: 1
 Francia: 12
 Germania: 1
 Grecia: 93
 India: 1
 Regno Unito: 3
 Iraq: 2
 Israele: 2
 Libia: 1
 Macedonia: 1
 Marocco: 3
 Mauritania: 1
 Palestina: 15
 Iran: 1
 Russia: 1
 Spagna: 5
 Tunisia: 3
 Turchia: 1
 Ungheria: 1
 Inferno: 18

Purgatorio

Campania: 7
 Emilia: 26
 Lazio: 28
 Liguria: 5
 Lombardia: 6
 Marche: 3
 Piemonte: 4
 Puglia: 2 / **Italia: 147**
 Sardegna: 3
 Sicilia: 6
 Toscana: 46
 Trentino: 1
 Umbria: 3
 Veneto: 7
 Belgio: 2
 Egitto: 1
 Etiopia: 1
 Francia: 21
 Germania: 7
 Grecia: 76
 India: 2
 Regno Unito: 1
 Iraq: 6
 Israele: 1
 Libano: 1
 Marocco: 1
 Palestina: 22
 Iran: 6
 Repubblica Ceca: 1
 San Marino: 1
 Siria: 2
 Spagna: 6
 Tunisia: 1
 Turchia: 3
 Paradiso terrestre: 1

Paradiso

Calabria: 2 **Regioni italiane**
 Campania: 2
 Emilia Romagna: 5
 Lazio: 51
 Liguria: 1
 Lombardia: 1
 Marche: 4
 Piemonte: 1 / **Italia: 129**
 Puglia: 1
 Sicilia: 5
 Toscana: 30
 Umbria: 13
 Val d'Aosta: 1
 Veneto: 14
 Albania: 1 **Altre nazioni**
 Algeria: 1
 Belgio: 1
 Cipro: 3
 Croazia: 2
 Egitto: 7
 Francia: 26
 Germania: 6
 Grecia: 47
 India: 2
 Regno Unito: 3
 Iraq: 2
 Israele: 3
 Lussemburgo: 1
 Mauritania: 1
 Norvegia: 2
 Palestina: 29
 Portogallo: 4
 Repubblica Ceca: 1
 Russia: 1
 Serbia: 1
 Siria: 1
 Spagna: 13
 Tunisia: 4
 Turchia: 1
 Ungheria: 2

Tabella 7. Sintesi dei luoghi e dei luoghi dei personaggi della Commedia
(riportata nella pagina precedente)

Le mappe anamorfiche

Sei mappe mostrano la distribuzione nelle regioni italiane (Figure 3, 4 e 5) ed anche tra gli Stati esteri (Figure 6, 7 e 8) dei personaggi (facendo riferimento ai loro luoghi) e dei luoghi (della Commedia). Le rappresentazioni delle informazioni acquisite sono fatte con mappe anamorfiche, opportunamente deformate a partire da basi geografiche con carte equivalenti (o quasi). A partire da una data base geografica, si utilizza un applicativo Java: "ScapeToad"⁵⁴. In questo caso, i limiti amministrativi (con basi territoriali per l'Italia da fonte: ISTAT⁵⁵ e per il Mondo da fonte: Thematic Mapping⁵⁶) sono deformati avendo come discriminante:

- una variabile della massa, data dal numero dei riscontri (nelle figure a sinistra nella pagina)
- un'altra rappresentazione per "densità", mettendo in relazione i riscontri con la superficie delle singole regioni e/o dei vari Paesi (nelle figure a destra).

I colori utilizzati, in questa rappresentazione anamorfica, come in tutte le cinque successive, non sono i tradizionali quattro colori (con cui si è dimostrato possibile rappresentare i dati, di una carta geografica, senza confusione di colore, tra le regioni adiacenti), ma rappresentano l'errore di "dimensionamento" del cartogramma (cartogram size error), ovvero la deformazione, funzione della distribuzione dei dati utilizzati, che hanno subito le geometrie, rispetto alla loro forma originale (dove i numeri, corrispondenti ai colori, sono così la percentuale di contrazione o dilatazione delle regioni).

E' interessante osservare come l'Italia abbia un ruolo proprio prevalente, nella rappresentazione degli Stati esteri, cosicché si è scelto di dividere il suo peso per 20, per far risaltare gli Stati esteri non nulli (come presenze), ma decisamente molto meno citati dell'Italia. In minor misura, questo è vero anche per la Grecia (soprattutto per la sua Mitologia ed il Mondo antico) e, per questo motivo, anche qui, si è scelto di dividere il suo peso per 10 (d'altra parte, scopo delle mappe anamorfiche è indurre deformazioni, per meglio mostrare il comportamento di specifiche variabili tematiche).

L'analisi statistica

L'analisi statistica dei dati della Tabella 8 è qui condotta dapprima separatamente per l'Inferno, il Purgatorio ed il Paradiso e successivamente per l'intera Commedia, perché l'indagine stessa è meglio guidata, proprio se indirizzata sulla base dei risultati precedenti. In entrambi i casi, si è proceduto prima alla classica analisi di varianza (ovvero della dipendenza funzionale, mediante il calcolo degli indici di Pearson) e poi con lo studio della connessione, cioè di una sola dipendenza vaga e generica, soprattutto data la scarsissima significatività della prima (mediante gli indici di Bonferroni). A riguardo, si badi che l'analisi riguardante l'intera Commedia prende in considerazione una struttura a tre strati (non più complessa, per quanto poco usata), dove le "righe" e le "colonne" sono le righe e le colonne di ciascuno strato (piano ed orizzontale), mentre sono chiamate "pile" tutte le colonne verticali che attraversano le celle (sovrastanti o sottostanti, a secondo del verso) dei tre strati.

⁵⁴ <http://scapetoad.choros.place/>

⁵⁵ <https://www.istat.it/it/archivio/104317>

⁵⁶ http://thematicmapping.org/downloads/world_borders.php

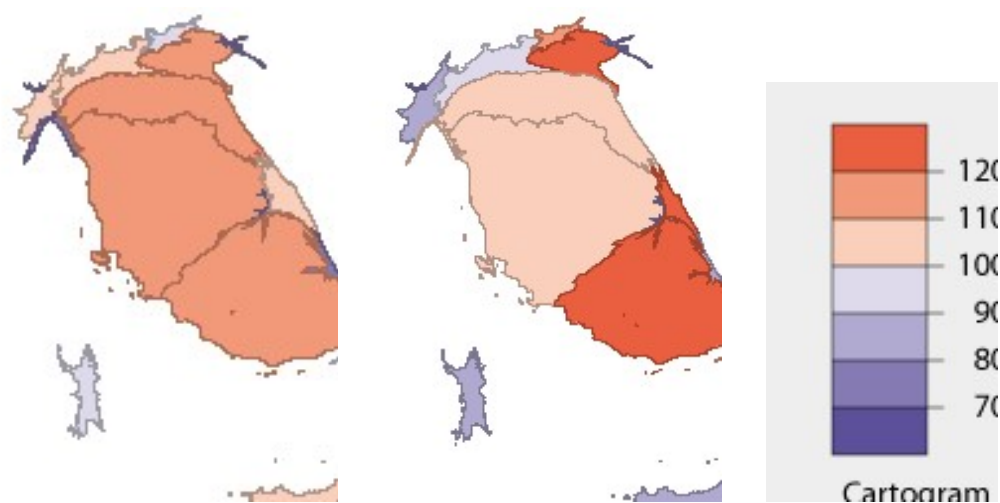


Fig. 3. Mappe anamorfiche delle regioni italiane per l'Inferno

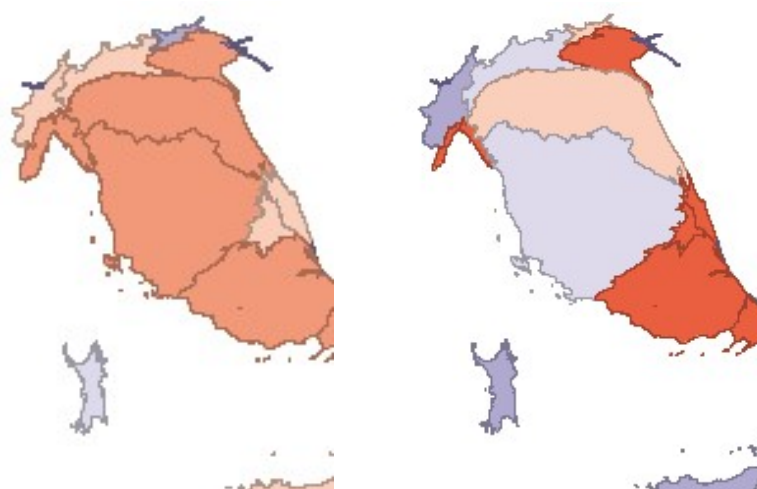


Fig. 4. Mappe anamorfiche delle regioni italiane per il Purgatorio

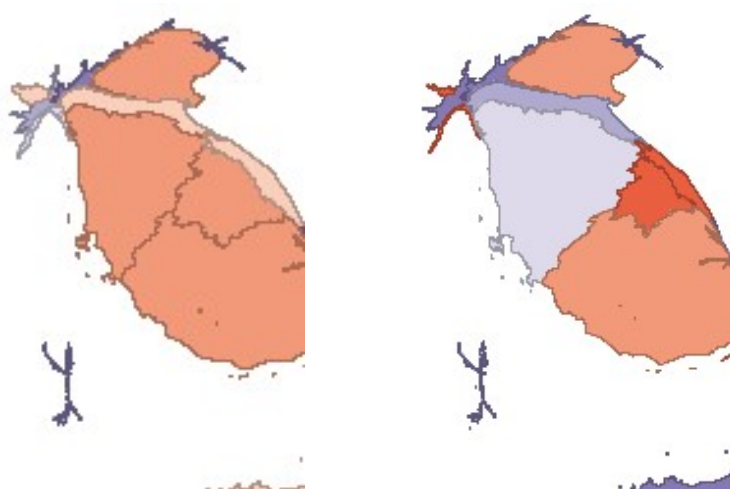


Fig. 5. Mappe anamorfiche delle regioni italiane per il Paradiso

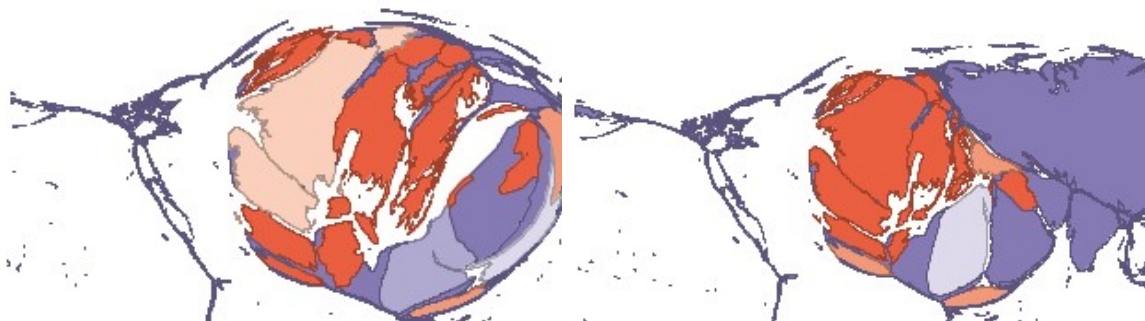


Fig. 6. Mappa anamorfica degli altri Stati per l'Inferno

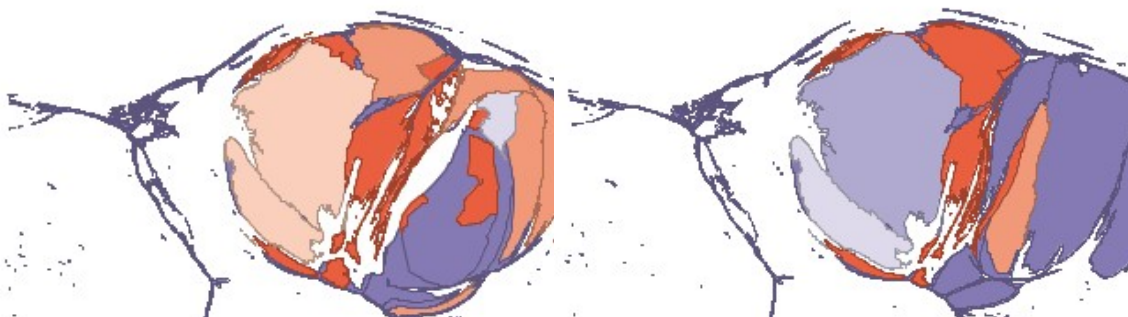


Fig. 7. Mappa anamorfica degli altri Stati per il Purgatorio

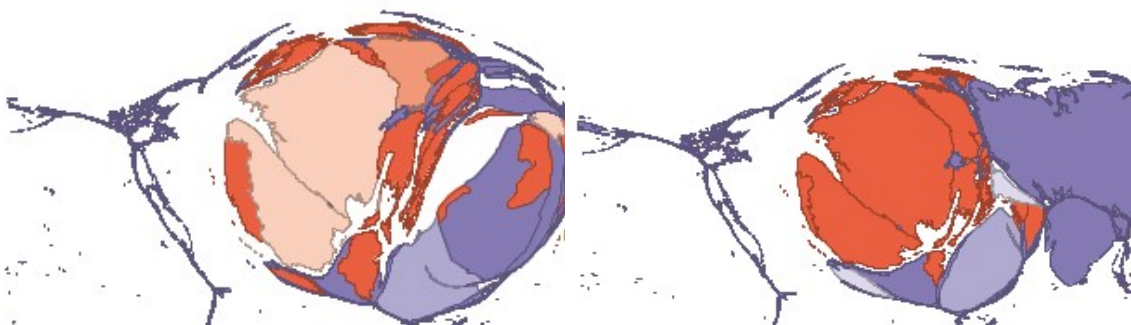


Fig. 8. Mappa anamorfica degli altri Stati per il Paradiso

La lettura della Tabella 9 evidenzia la pressoché totale assenza di dipendenza funzionale, ovvero l'assenza di una legge matematica sul comportamento in media delle variabili prescelte (ovvero i nove siti in cui sono stati raggruppati l'Inferno, il Purgatorio ed il Paradiso, ed i sette gruppi di persone presenti). Per contro, la loro disposizione non è affatto casuale (ovvero indipendente da una relazione, per quanto vaga e generica), ma ha valori compresi fra il 25% circa nell'Inferno e nel Purgatorio, ed il 40% circa nel Paradiso).

COMMEDIA

Inferno	Divinità	Regnanti	Nobili	Religiosi	Altri	Studiosi	Donne	Totali
1° cerchio: 1/4	4	8	3	5	6	25	11	62
2° cerchio: 5	1	2	5	0	0	0	5	13
3° cerchio: 6	2	0	1	0	4	1	0	8
4° cerchio: 7	2	0	0	0	0	0	0	2
5° cerchio: 8-9	6	0	1	1	1	0	0	9
6° cerchio: 10-11	0	1	0	3	1	2	0	7
7° cerchio: 12/17	9	8	4	1	11	4	4	41
8° cerchio: 18/31	23	4	8	16	27	13	10	101
9° cerchio: 32/34	5	0	7	2	5	1	0	20
Totali	52	23	29	28	55	46	30	263
Purgatorio:	Divinità	Regnanti	Nobili	Religiosi	Altri	Studiosi	Donne	Totali
Antipurgatorio: 1/9	11	16	7	0	7	8	13	62
1ª cornice: 10/12	2	7	1	1	4	6	4	25
2ª cornice: 13/15	1	1	4	1	10	0	2	19
3ª cornice: 16	0	0	1	0	3	0	1	5
4ª cornice: 17/19	1	3	2	2	2	0	4	14
5ª cornice: 20-21-22	5	7	2	8	2	10	7	41
6ª cornice: 23/25	5	1	0	3	4	1	3	17
7ª cornice: 26-27	2	0	0	0	1	2	3	8
Paradiso terrestre: 28/33	7	2	0	2	0	4	0	15
Totali	34	37	17	17	33	31	37	206
Paradiso:	Divinità	Regnanti	Nobili	Religiosi	Altri	Studiosi	Donne	Totali
1° cielo: 1/5	9	1	2	7	4	1	4	28
2° cielo: 6-7	1	7	3	1	10	1	5	28
3° cielo: 8-9	5	5	0	4	0	1	3	18
4° cielo: 10/14	3	0	0	21	0	9	1	34
5° cielo: 15/18	2	3	10	4	7	3	3	32
6° cielo: 19-20	1	17	0	0	0	0	0	18
7° cielo: 21-22	2	0	0	3	0	0	1	6
8° cielo: 23/27	1	0	1	11	0	0	2	15
9° cielo: 28/33	3	0	0	7	0	1	7	18
Totali	27	33	16	58	21	16	26	197
Totali generali	113	93	62	103	109	93	93	666

Tabella 8. Sintesi dei personaggi della Commedia

Nell'immediato prosiegua, si riporta la Tabella 10 con gli indici di Bonferroni (con la relativa legenda) adattati per l'analisi della connessione a tre vie (comunque di lettura immediata, benché poco nota ed usata). Per quanto assolutamente non significativa, da un punto di vista statistico, del resto, in perfetto accordo con l'inconsistenza dell'analisi di varianza (già messa in evidenza in Tabella 9), il segno delle rette di regressione e del coefficiente di correlazione, oppure la loro quasi nullità danno una curiosa indicazione sulla prevalente distribuzione dei personaggi nei vari siti (cioè gironi, cornici e cieli) dell'Inferno, del Purgatorio e del Paradiso. Infatti avendo distinto i personaggi in Divinità, regnanti, nobili, religiosi, altri (uomini), studiosi e donne (qui indistinte perché pochissime) solo nel Purgatorio è uniforme la distribuzione nelle cornici, mentre è "curiosa" tanto nell'Inferno, quanto nel Paradiso.

ANOVA A DUE VIE

0.116

0.140 0.133

Indici di Pearson per l'Inferno
(per colonne
per righe misto)

0.044

0.113 0.086

Indici di Pearson per ilPurgatorio
(per colonne
per righe misto)

0.213

0.122 0.155

Indici di Pearson per il Paradiso
(per colonne
per righe misto)

ANALISI DELLA CONNESSIONE A DUE VIE

0.267

0.265 0.266

Indici di Bonferroni per l'Inferno
(per colonne
per righe misto)

0.269

0.262 0.265

Indici di Bonferroni per il Purgatorio
(per colonne
per righe misto)

	0.419
0.415	0.417
Indici di Bonferroni per il Paradiso	
(	per colonne
per righe	misto)

ANALISI DELLA CONNESSIONE A TRE VIE

	0.377
0.360	
	0.366
	0.406
Indici di Bonferroni per la Commedia	
(	misto
per righe	
	per colonne
	per pile)

Tabella 9. Analisi statistica della Tabella 8

RETTE DI REGRESSIONE ED ANALISI DELLA CORRELAZIONE

-0.136	4.790	-0.203	0.041
Coefficiente angolare, intercetta, coefficiente di correlazione e suo quadrato per l'Inferno			
-0.015	4.124	-0.019	0.0004
Coefficiente angolare, intercetta, coefficiente di correlazione e suo quadrato per il Purgatorio			
0.072	3.523	0.100	0.010
Coefficiente angolare, intercetta, coefficiente di correlazione e suo quadrato per il Paradiso			

Tabella 10. Ulteriore analisi statistica della Tabella 8

Così nell'Inferno, la distribuzione per gironi riscontra una relativa maggioranza di donne, studiosi ed uomini qualsiasi, nei primi gironi, ed una certa maggioranza di divinità, regnati, nobili e religiosi, negli altri gironi (più bassi). Al contrario nel Paradiso, la distribuzione per cieli riscontra una relativa maggioranza di divinità, regnati, nobili e religiosi, nei primi cieli, ed una certa maggioranza di donne, studiosi ed uomini qualsiasi, negli altri cieli (più alti). Senza voler entrare in discussioni, fuori luogo, questi numeri stanno a conferma di un guelfo bianco (cacciato da Firenze), divenuto poi un ghibellino fuggiasco.

Una rete speciale di tipo geodetico

Una speciale rete (di tipo geodetico) è costituita dal flusso di informazione fra un personaggio od un luogo ad un altro personaggio e/o un altro luogo, come si presentano nella Commedia, in relazione alle loro "regioni" ed alle loro epoche e professioni, se si tratta di personaggi (Tabella 11), così come di seguito riassunte:

- ❑ 1117 dati estesi, costituiscono altrettanti parametri della rete speciale, incognite della sua compensazione e colone della relativa matrice disegno:
 - ❑ 1000 tra personaggi e luoghi;
 - ❑ 100 canti (da 1001 a 1100) della Commedia;
 - ❑ 5 regioni ⁵⁷ (da 1101 a 1105) in corrispondenza ai personaggi ed ai luoghi citati;
 - ❑ 4 epoche (da 1106 a 1109) in corrispondenza ai personaggi citati;
 - ❑ 3 Cantiche (da 1110 a 1112) ed 1 Commedia (1113);
 - ❑ 2 idee generali, ovvero l'Idea di Mondo (1114) e l'Idea di Storia (1115);
 - ❑ 2 idee propriamente dantesche, ovvero il Mondo di Dante (1116) e Dio ⁵⁸ (1117).

- ❑ 3853 legami tra i dati estesi, costituiscono altrettante osservazioni della rete speciale, equazioni della sua compensazione e righe della relativa matrice disegno:
 - ❑ 999 "passi" di Dante (talvolta accompagnato prima da Virgilio e poi da Beatrice) che incontra personaggi e/o sente parlare i personaggi e luoghi;
 - ❑ 1000 per collegare ciascun personaggio o luogo al proprio canto (da 1000 a 1999);
 - ❑ 1000 per collegare ciascun personaggio o luogo alla propria "regione" (da 2000 a 2999);
 - ❑ 621 per collegare ciascun personaggio alla propria epoca, ove possibile (da 3000 a 3620);
 - ❑ 99 per collegare un canto al successivo (da 3621 a 3719);
 - ❑ 100 per collegare ciascun canto alla sua Cantica (da 3720 a 3819);
 - ❑ 34 per collegare opportunamente tra loro le cantiche, queste alla Commedia, le "regioni" all'Idea di Mondo, le epoche all'Idea di Storia (come dettagliatamente specificato nella Tabella 11), nonché queste tre sintesi al Mondo di Dante ed a Dio, a loro volta collegati fra loro (il tutto da 3820 a 3853).

Questa rete che, in Geodesia e Topografia, ha il suo equivalente in una rete di livellazione (ed in altre discipline una rete di differenze di potenziale o di flussi materiali od immateriali), se interamente connessa, ha un solo difetto di rango e, come tale, richiede un vincolo esterno su uno qualsiasi dei suoi nodi (tradizionalmente detti capisaldi, nelle reti di livellazione). Forse questo è il punto più alto di ibridazione della Geomatica e di compromissione della Geomatica applicata (tramite una sua tecnica classica, cioè il trattamento delle osservazioni per la compensazione a minimi quadrati di reti geodetiche) con altre e diverse discipline, cosicché questo modo di procedere si è voluto conglobare in un nuovo "capitolo" del SSD, detto di Applicazioni Geomatiche. Infatti la conoscenza del nucleo centrale della Geodesia, Topografia Generale e Geomatica, e la presenza attiva nei campi della Geomatica Applicata mettono in atto prassi corrette e possono estendersi ai nuovissimi campi delle Applicazioni Geomatiche (del resto, queste ultime applicano tecniche di rilevamento, trattamento e rappresentazione, proprio in altri ambiti cui sono generalmente estranei ⁵⁹).

⁵⁷ Con il termine "regione" si intende qui: regione amministrativa (se riferito all'Italia), continente (se riferito all'Europa, Italia esclusa) e regione geografica (se riferito al resto del mondo, compresi quelli immaginari).

⁵⁸ Dio è un concetto filosofico universale (anche nella sua negazione: atea), ma il Dio di Dante è essenzialmente il Dio cristiano, seppure mediato dall'interpretazione tomistica del pensiero di Aristotele, sul primo mobile (per questa ragione, è stato qui scelto come nodo vincolato che, come tale, ha nullo il cofattore della propria varianza).

⁵⁹ Il campo specifico di questa applicazione è quello delle Scienze umane.

Un commento particolare riguarda le ultime due entità (mondo di Dante e Dio). Il mondo di Dante è un mondo culturalmente ricco: in ambito letterario, oltre Dante Alighieri, altri poeti fondano e diffondono il Dolce Stil Novo, fino alla soglia del primo Umanesimo: Guido Guinizzelli, Guido Cavalcanti, Lapo Gianni, Gianni Alfani, Cino de' Sigilbuldi da Pistoia e Dino Frescobaldi.; estendendo poi lo sguardo ad altri campi della cultura, oltre alla letteratura: la religione, la filosofia, la matematica, la musica, la pittura e la fisica (in particolare, con la medicina) hanno i loro rappresentanti rispettivamente in: Francesco d'Assisi (già Giovanni di Pietro di Bernardone), Tommaso d'Aquino, Leonardo Pisano (detto il Fibonacci, il primo ad usare la scrittura posizionale dei numeri, arabo-indiana, aggiungendo lo zero alle nove cifre), Jacopo dei Benedetti (detto Jacopone da Todi), Giotto (diminutivo di Ambrogio o Angiolo) di Bondone, Trotula de Ruggiero (una donna insigne (!!)) appartenente alla Scuola di Salerno, nel periodo del suo massimo splendore).

FUSSO DI INFORMAZIONI NELLA COMMEDIA

- Legenda:**
- A** numero progressivo del personaggio o del luogo (da 1 a 1000)
 - B** numero antecedente nel flusso di informazioni
 - C** numero conseguente nel flusso di informazioni
 - D** numero dei 100 canti (da 1001 a 1100)
 - E** numero delle regioni (collegati ad A):
 - 1101 Italia
 - 1102 Europa (Italia esclusa)
 - 1103 Nord Africa e Medio Oriente
 - 1104 Resto del mondo
 - 1105 Luoghi immaginari
 - F** numero delle epoche (collegate ad A, se A personaggio, con 621 collegamenti)
 - 1106 Mitologia greco-romana
 - 1107 Mitologia ebraico-cristiana
 - 1108 Mondo antico
 - 1109 Medioevo

A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F
1			1001	1105	1107	501	500	501	1044	1103	1108
2	1	2	1001	1105	1107	502	501	502	1044	1101	1108
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
500	499	500	1044	1102	1108	1000	999	1000	1100	1105	1106

Note: dopo 3620 righe di cui 999 passando da un personaggio o luogo ad un altro personaggio e/o luogo
 1000 per collegare ciascun personaggio o luogo al proprio canto
 1000 per collegare ciascun personaggio o luogo alla propria "regione"
 621 per collegare ciascun personaggio alla propria epoca (ove possibile)
 altre 99 righe collegano un canto al successivo: da 1001 – 1002 a 1099 – 1100
 100 righe collegano i canti alle loro cantiche: Inferno (1110), Purgatorio (1111) e Paradiso (1112)
 da 1001 (canto I) – 1110 a 1034 (canto XXXIV) – 1110

da 1035 (canto I) – 1111 a 1067 (canto XXXIII) – 1111 ⁶⁰

da 1068 (canto I) – 1112 a 1100 (canto XXXIII) – 1112 ⁶¹

2 righe collegano una cantica alla successiva: 1110 – 1111 e 1111 – 1112

5 righe registrano connessioni geografiche:

Italia (1101) – Europa (1102)

Italia (1101) – Nord Africa e Medio Oriente (1103)

Europa (1102) – Nord Africa e Medio Oriente (1103)

Europa (1102) – Resto del Mondo (1104)

Nord Africa e Medio Oriente (1103) – Resto del Mondo (1104)

2 righe collegano luoghi immaginari e mitologie:

Luoghi immaginari (1105) – Mitologia greco/romana (1106)

Luoghi immaginari (1105) – Mitologia ebraico/cristiana (1107)

6 righe registrano continuità storiche:

Mitologia greco/romana (1106) – Mitologia ebraico/cristiana (1107)

Mitologia greco/romana (1106) – Mondo antico (1108)

Mitologia greco/romana (1106) – Medioevo (1109)

Mitologia ebraico/cristiana (1107) – Mondo antico (1108)

Mitologia ebraico/cristiana (1107) – Medioevo (1109)

Mondo antico (1108) – Medioevo (1109)

3 righe collegano le tre cantiche (1110, 1111 e 1112) alla Commedia (1113)

5 righe collegano le “regioni” (1101, 1102, 1103, 1104 e 1105) all’Idea di Mondo (1114)

4 righe collegano le epoche (1106, 11107, 1108 e 1109) all’Idea di Storia (1115)

3 righe collegano la Commedia e le Idee di Mondo e Storia (1113, 1114 e 1115) all’epoca di Dante (1116)

3 righe collegano la Commedia, l’Idea di Mondo e l’Idea di Storia (1113, 1114 e 1115) a Dio (1117)

1 riga collega l’epoca di Dante (1116) a Dio (1117, assunto come nodo vincolato)

per un totale di 3853 righe (cui corrispondono 1117 colonne, 1 vincolo e 2737 gradi di libertà)

Tabella 11 – Flusso di informazioni nella Commedia

Le righe di una tabella (o di una matrice disegno) corrispondono ai lati di un grafo, alle equazioni di un sistema ed alle osservazioni di una rete, seppure non date, in questo caso specifico, come il loro modello stocastico, in particolare, con tutti i pesi delle osservazioni (indipendenti tra loro), di conseguenza, assunti tutti pari ad uno; le colonne della stessa tabella corrispondono ai nodi di un grafo, alle incognite di un sistema ed ai parametri di una rete, seppure da non stimare. I gradi di libertà sono la differenza fra il numero delle righe ed il numero delle colonne, aumentata di uno, per effetto del vincolo imposto.

Prima di entrare nel merito del trattamento dei dati, propriamente detto, è importante constatare il rapporto oltre tre ad uno tra il numero di righe ed il numero di colonne, cosicché i gradi di libertà sono oltre due volte e

⁶⁰ La relazione 1065–1111 (ovvero canto 31 del Purgatorio con il Purgatorio stesso) potrebbe altresì essere cancellata, perché nessun personaggio, né luogo è menzionato in quel canto, ma è stata mantenuta per l’effettiva sequenzialità della Commedia.

⁶¹ Le relazioni 1081–1112 e 1091–1112 (ovvero canti 14 e 24 del Paradiso con il Paradiso stesso) potrebbero essere cancellate, perché nessun personaggio, né luogo è menzionato in quei canti, ma sono state mantenute per l’effettiva sequenzialità della Commedia.

mezzo il numero di colonne (questo fatto garantisce, in sé, il buon condizionamento del sistema da risolvere e l'alta affidabilità dello schema di misura, e deriva, di fatto, dalla notevole abbondanza di informazioni date e di relazioni che le collegano).

Del resto, altre informazioni/relazioni (quali lessicali, sintattiche, semantiche e stilistiche, estranee agli scopi di questa postfazione) non potrebbero che migliorare ulteriormente i risultati (a tal proposito, giova ricordare che, benché il team degli autori sia composto da un geomatico (anche con funzioni di coordinatore della ricerca), un letterato ed un designer, questa è essenzialmente una ricerca di Geomatica ed è presentata come un'Applicazione Geomatica nell'ambito delle Scienze umane).

Il trattamento specifico dei dati, raccolti in tabella e disposti nella matrice disegno, procede con la formazione della matrice normale ed il calcolo della matrice inversa e dei cofattori dei residui delle osservazioni. Gli elementi diagonali della matrice inversa darebbero le varianze dei parametri, se moltiplicati per la varianza dell'unità di peso (cioè per il quadrato di sigma zero), ed estratta la loro radice quadrata, gli scarti quadratici medi (sqm) dei parametri. Invece i cofattori dei residui delle osservazioni, moltiplicati per i corrispondenti pesi delle osservazioni ⁶², forniscono le ridondanze locali delle osservazioni stesse.

Il secondo risultato è definitivo e dà chiare indicazioni sull'affidabilità dello schema di misura, mentre il primo risultato è "orfano" del quadrato di sigma zero, mancando il problema dei valori delle osservazioni. Allora è necessario ricorrere alla standardizzazione degli scarti quadratici medi, per ottenere numeri compresi fra zero ed uno. Pertanto come numeri compresi fra zero ed uno indicano osservazioni via, via più affidabili, così altri numeri, compresi fra uno e zero (a rovescio), indicano parametri via, via sempre più precisi, dove la precisione conferma anche il buon condizionamento del sistema da risolvere (mostrato anche da un numero di condizione prossimo ad uno).

La semplice lettura delle statistiche riassuntive (dell'analisi del flusso di informazioni nella Commedia) mostra come i dati: (personaggi e luoghi della Commedia, classificati e raggruppati, in base alle loro epoche (solo se possibile) e "regioni" (come già detto in precedenza), nonché disposti nei canti (talvolta solo nei siti: gironi, cornici e cieli) delle loro cantiche, non sia affatto un'accozzaglia di citazioni, fatte con gli intenti più vari, ma contiene un ben ragionato e valutato elenco di personaggi e luoghi che, secondo il percorso e gli intenti di Dante, parte dalla Gerusalemme terrestre ed arriva fino all'empireo di Dio.

Il calcolo statistico non aggiunge informazioni al testo della Commedia, ma quantifica numericamente quanto appena detto, con valori di precisione dei parametri (ovvero con gli scarti quadratici medi standardizzati di tutti i dati) dell'ordine di poche decine di millesimi e con valori di affidabilità delle osservazioni (ovvero con le ridondanze locali dei collegamenti fra un personaggio e un luogo con un altro personaggio e/o un altro luogo, nonché con tutte le sopraccitate informazioni accessorie relative alla struttura propria della Commedia, come pure alle "regioni" ed alle epoche, se possibile) sempre superiori a 50% ⁶³.

La Tabella 12 mostra tutti i risultati: sqm standardizzati dei parametri e ridondanze locali delle osservazioni. In questo modo, andando oltre il dettaglio puntuale di carattere statistico-matematico e rivolgendosi invece, alla compensazione della suddetta rete speciale di tipo geodetico, le Figure 9, 10 e 11 mostrano le parti dello schema "interno" della rete speciale, relative all'Inferno, al Purgatorio ed al Paradiso, mentre le successive Figure 12 e 13 mostrano la parte della rete che riunisce le tre cantiche ed i loro canti nella Commedia, insieme alle varie "regioni" con l'Idea di Mondo ed alle varie epoche con l'Idea di Storia, a loro volta, tutti

⁶² In questo caso specifico, la moltiplicazione è ovviamente inutile, essendo tutti i pesi pari ad uno, come già detto in precedenza.

⁶³ Come già detto in precedenza, sqm standardizzati ben prossimi a zero e ridondanze locali superiori a 50% dimostrano un'eccellente precisione ed ottima affidabilità.

collegati con il Mondo di Dante e quel Dio cristiano (proprio della cultura del suo tempo); qui le rappresentazioni degli schemi servono solo a mostrare la topologia della rete speciale, perché nessuna geometria è presa in considerazione (per quanto altresì studiata, come già detto in precedenza).

STANDARDIZZAZIONE DEGLI SCARTI QUADRATICI MEDI

Date N variabili x , tutte positive (ad esempio, come gli scarti quadratici medi σ), è possibile definire la loro media μ e la loro ampiezza τ , quando la loro varianza sia massima, ovvero se si ha un caso estremo:

$x_1 = x_2 = \dots = x_{N-1} \equiv 0$ e $x_N = T$, essendo T anche la loro somma (in questo caso specifico), cosicché:

$$\mu = T/N \quad \text{e} \quad \tau = T$$

ed il corrispondente scarto quadratico medio: $\sigma_{\max} = \mu\sqrt{N-1}$

In questo modo, è possibile standardizzare tutte le suddette variabili (ovvero tutti gli scarti quadratici medi del campione, in esame), ottenendo variabili standardizzate (cioè comprese fra zero ed uno):

$$0 \leq \omega = \frac{x}{\sigma_{\max}} = \frac{x}{\mu\sqrt{N-1}} \leq 1$$

Questo indice è noto come il “coefficiente di variazione di Gini” e, in alternativa, si può usare il “coefficiente di variazione di Pearson”, ma facendo l'ulteriore ipotesi di simmetria delle variabili date, rispetto alla loro media:

$x_1 = \dots = x_k \equiv 0$, tali che: $P_i < 0.5 \quad \forall i$, e $x_{k+1} = \dots = x_j = \dots = x_N = \tau = T$, tali che: $P_j \geq 0.5 \quad \forall j$

(benché questa nuova ipotesi sia meno realistica, nel caso le variabili date siano scarti quadratici medi):

$$0 \leq \varpi = \frac{x}{\mu} \leq 1$$

Un'osservazione conclusiva, circa l'utilità effettiva di questo modo di operare, messo subito a confronto con le ridondanze locali: $q_i = 1 - p_i a_i (A^T P A)^{-1} a_i^T \quad \forall i$ (come noto, utilissime per valutare l'affidabilità dei dati, cioè delle osservazioni, al fine di individuare eventuali, ma purtroppo sempre possibili errori grossolani), segnala come variabili standardizzate siano praticamente necessarie, quando si ottengono numeri di valutazione dell'incertezza, da un calcolo che tuttavia non è fondato su alcuna informazione metrologica, riguardante i parametri attesi (ad esempio, se si è privi dei valori delle osservazioni, soprattutto se queste sono solo numeri, senza alcun modello metrologico). Per completezza, si segnala come anche le statistiche quantitative e qualitative della mutua variabilità, quali rispettivamente il Delta di Gini e l'Entropia di Shannon, abbiamo la loro standardizzazione nel rapporto di concentrazione, variabile tra zero ed uno (ovvero tra una concentrazione nulla ed una concentrazione massima).

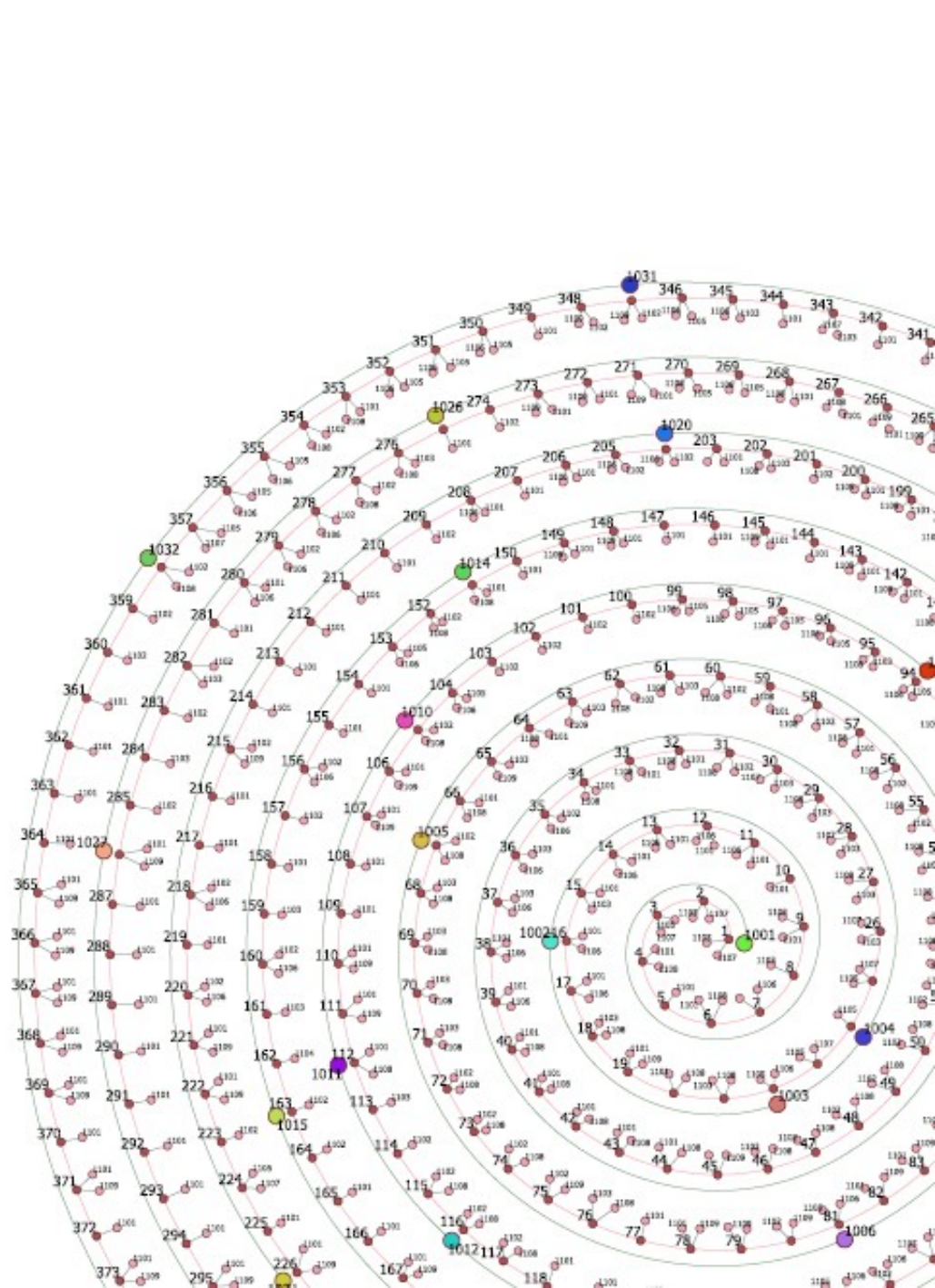


Fig. 9. Schema della rete speciale relativo all'Inferno ⁶⁴.

Inferno: cerchi e canti

- 1° cerchio: 1-2-3-4
- 2° cerchio: 5
- 3° cerchio: 6
- 4° cerchio: 7
- 5° cerchio: 8-9
- 6° cerchio: 10-11
- 7° cerchio: 12-13-14-15-16-17
- 8° cerchio: 18-19-20-21-22-23-24-25-26-27-28-29-30-31
- 9° cerchio: 32 -33-34

⁶⁴ Come evidente dal contesto: "questi" Inferno, Purgatorio e Paradiso sono costruzioni religiose, in voga nel Medioevo e, solo in parte, prese dal modello delle Sacre Scritture.

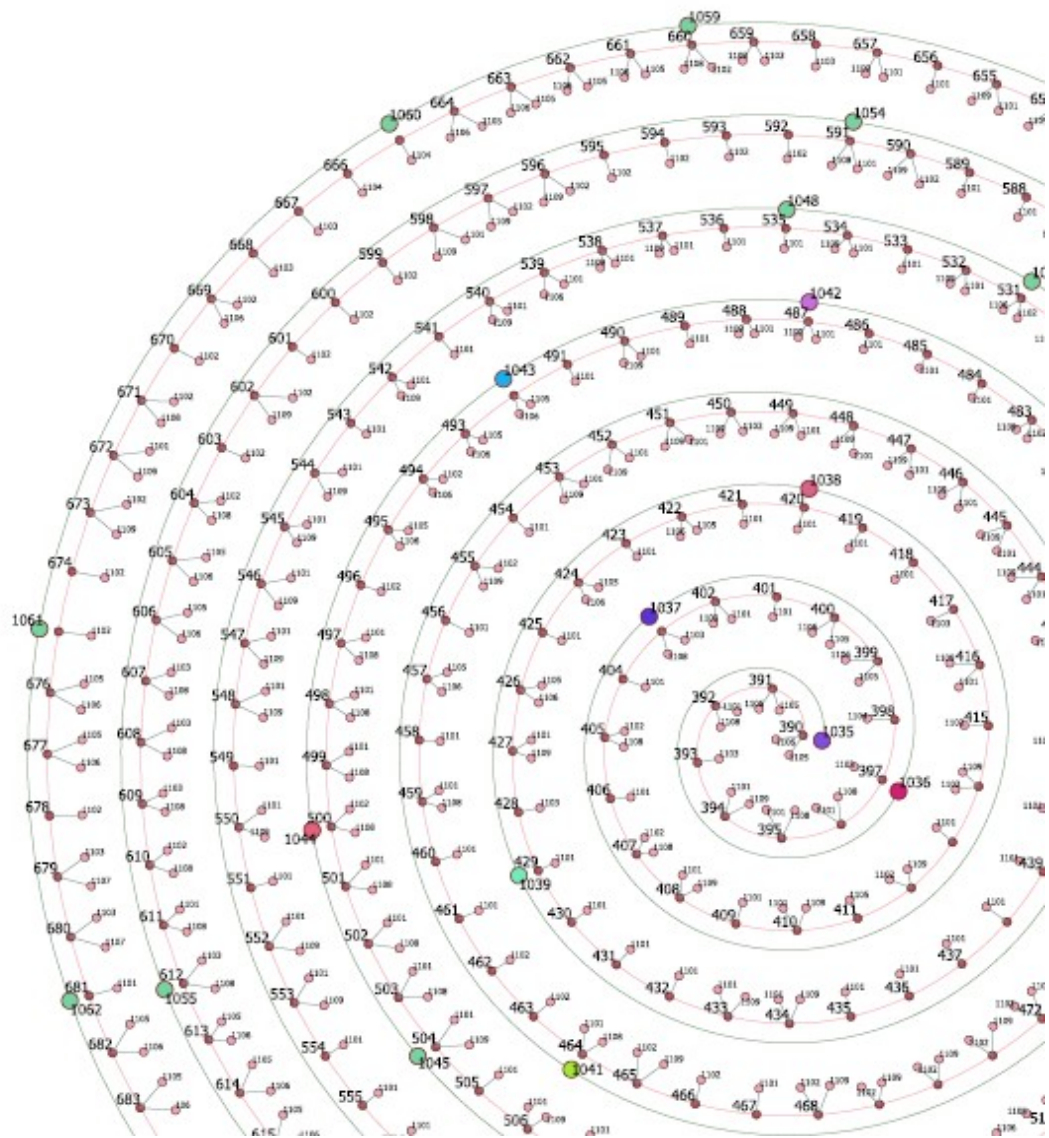


Fig. 10. Schema della rete speciale relativo al Purgatorio ⁶⁵.

Purgatorio: cornici (compreso l'Antipurgatorio) e canti

Antipurgatorio: 1-2-3-4-5-6-7-8-9

1^a cornice: 10-11-12

2^a cornice: 13-14-15

3^a cornice: 16

4^a cornice: 17-18-19

5^a cornice: 20-21-22

6^a cornice: 23-24-25

7^a cornice: 26-27

Paradiso terrestre: 28-29-30-31-32-33

⁶⁵ Nello stesso contesto, proprio il Purgatorio può essere inteso come una novità medioevale, vera propria, non già ripresa dal Mondo antico (di conseguenza, a fortiori, estranea alle Sacre Scritture, come le Storie di Maria, ecc.).

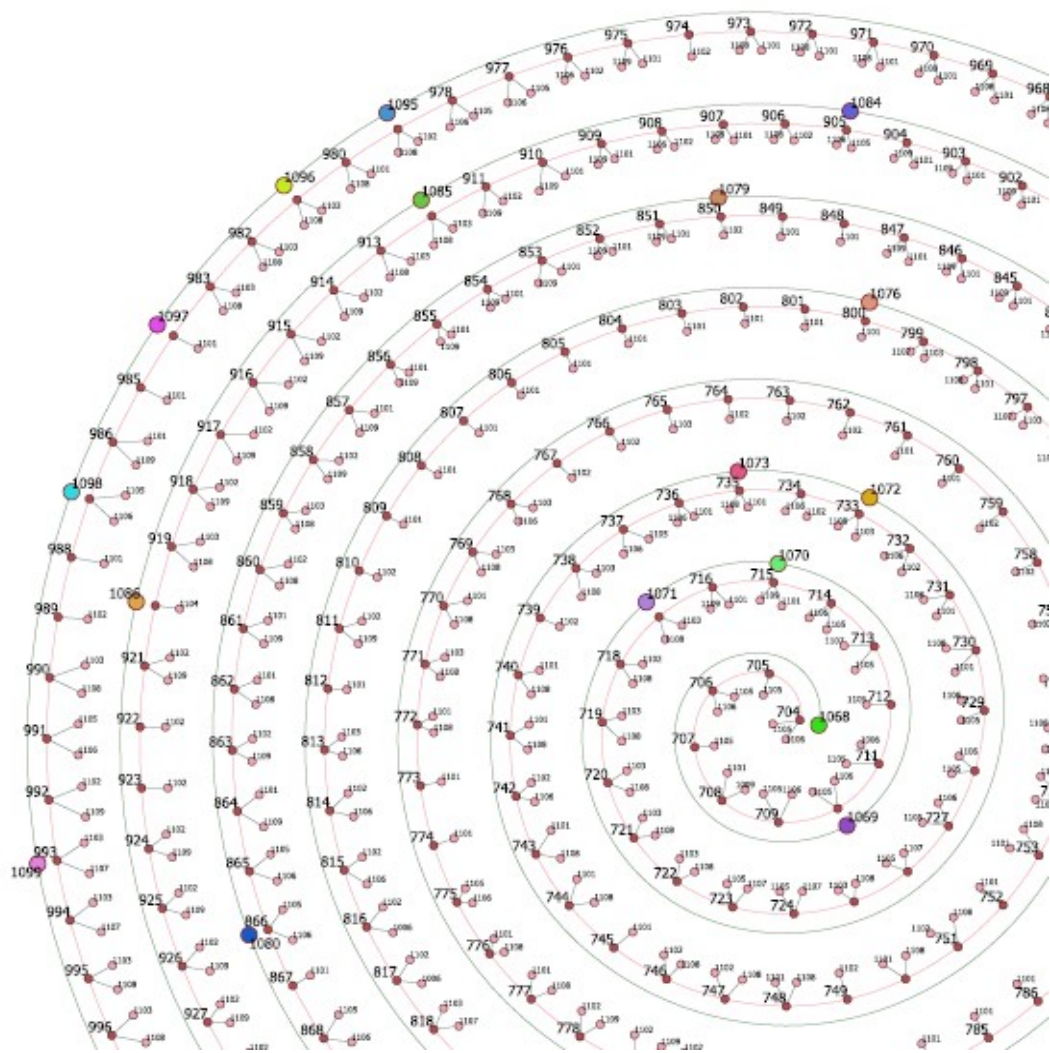


Fig. 11. Schema della rete speciale relativo al Paradiso ⁶⁶.

Paradiso: cieli e canti

- 1° cielo: 1-2-3-4-5
- 2° cielo: 6-7
- 3° cielo: 8-9
- 4° cielo: 10-11-12-13-14
- 5° cielo: 15-16-17-18
- 6° cielo: 19-20
- 7° cielo: 21-22
- 8° cielo: 23-24-25-26-27
- 9° cielo: 28-29-30-31-32-33

⁶⁶ La corrispondenza cieli – canti è specificata nell'elenco soprastante, come già per i cerchi dell'Inferno e le cornici del Purgatorio (a riguardo, la Fig. 12 mostra la Topografia della Commedia); qui poi la cosmologia del Paradiso va oltre la costruzione celeste di Aristotele e Tolomeo, mentre per completezza, si dà notizia che moderni studi di topologia hanno descritto il Paradiso in uno spazio 4D (curiosità geometrica di sicuro interesse, ma assolutamente estranea ai fini di questa postfazione).

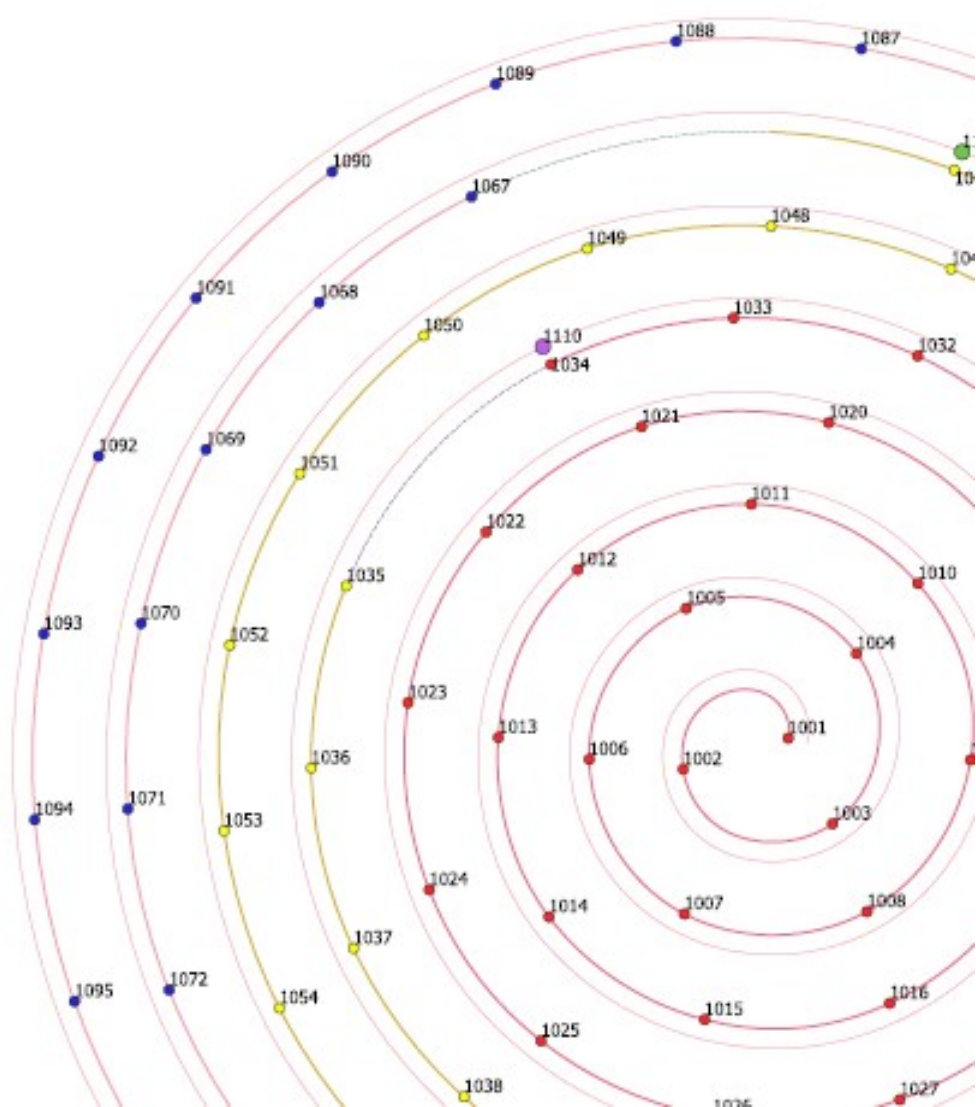


Fig. 12. Schema "apicale" della rete (canti e cantiche) ⁶⁷,
da collegare a "regioni" ed epoche,
e poi alle Idee di Mondo e Storia,
nonché al Mondo di Dante ed a Dio.

Ad ulteriore commento su "quel" mondo, si segnala che un compendio della scienza antica è opera di Isidoro di Siviglia, come attestato da Beda il Venerabile, e solo in età carolingia, si ha una ripresa in Europa, con la fondazione dell'Accademia Palatina; suo direttore è Giovanni Scoto Eriugena: il primo dei grandi scolastici.

⁶⁷ La lettura di questa figura è immediata, se presa a sé stante, mentre richiede un po' d'immaginazione, se sovrapposta alle Figure 9, 10 e 11. Infatti le figure mostrano l'insieme dei personaggi e dei luoghi, come Dante li incontra nel suo viaggio (attraverso l'Inferno, il Purgatorio ed il Paradiso), mettendoli in relazione con i canti di ciascuna delle cantiche (di cui si compone la Commedia dantesca); allora i 100 canti (34 per l'Inferno e 33 per il Purgatorio ed il Paradiso) sono ripetuti (ancora sole esigenze grafiche: una costruzione 3D, avrebbe certamente evitato questa ripetizione, ma è evidente come non si possa allegare una costruzione 3D ad un testo scritto) e, a loro volta, collegati alle tre cantiche. La forma a spirale (della figura), qui come nelle precedenti Figure 9, 10 e 11, serve ad economizzare spazio, rispetto ad un'unica linea retta.

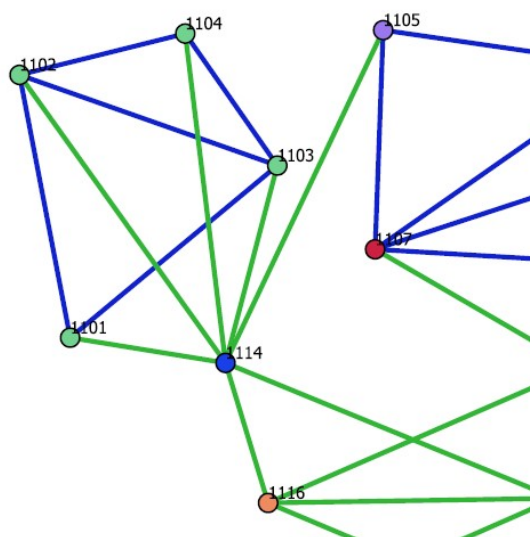


Fig. 13. Schema "apicale" della rete ("regioni", epoche, Idee di Mondo e Storia, Mondo di Dante e Dio)⁶⁸.

Dall'anno mille, le repubbliche marinare, con i viaggi e le crociate, ed i liberi comuni, con le corporazioni ed i commerci, avviano la circolazione del sapere; dalle abbazie benedettine, il misticismo neoplatonico diventa cristiano: base per tornare a studiare gli antichi, e fare filosofia e scienza, come insegnato da Bernardo di Chartres. La questione degli universali riapre il dibattito filosofico tra realisti platonici, dove reale è il mondo delle idee, e nominalisti aristotelici, dove questo è puramente convenzionale ed un contributo molto importante, è dato dalla conquista araba della Spagna moresca, dove a Cordova ha sede un importante centro culturale, cresciuto sulla scorta di quelli di Alessandria, Damasco e Baghdad.

Infatti con la diffusione dell'islam, si ha la traduzione dal siriano all'arabo di testi classici, già tradotti dal greco al siriano ed in persiano, dopo la chiusura dell'accademia ateniese: i massimi filosofi dell'epoca sono il persiano Avicenna e l'egiziano Maimonide, ed un contesto culturale libero permette di spaziare dal misticismo allo scetticismo, con un razionalismo capace valutare anche Democrito (dove la forma non deriva da un Dio, creatore e motore, bensì è intrinseca alla materia esistente di per sé), Averroé propone una comprensione dei testi aristotelici e li fa riscoprire in occidente (già da Toledo, nella Spagna cattolica della riconquista).

Così la divinità non è più esterna al mondo, ma è connessa al tutto esistente e la religione diventa filosofia panteista. Questa idea filosofica si ritrova anche nella cabala ebraica, con il neoplatonico Maimonide; dopo gli approcci spagnoli, qualche francese ed alcune scomuniche papali, la metafisica di Aristotele è adottata dal tomismo, con Alberto Magno, Tommaso d'Aquino e Ruggero Bacone (che apre poi all'empirismo).

⁶⁸ La lettura di questa figura è immediata, se presa a sé stante, mentre richiede un po' d'immaginazione, se sovrapposta alla precedenti Fig. 12 ed alle precedenti Figure 9, 10 e 11. Infatti rimandando alla nota precedente, per la spiegazione delle quattro figure, tanto le cantiche (di cui ai numeri 1111, 1112 e 1113), quanto le "regioni" (Italia, Europa, Nord Africa e Medio Oriente, resto del mondo e luoghi immaginari: di cui ai numeri 1101 – 1105) e le epoche (mitologia greco-romana mitologia ebraico-cristiana, mondo antico e medioevo: di cui ai numeri 1106 – 1109) sono ripetute (ancora per esigenze grafiche) e collegate alla Commedia dantesca (1113), alle idee di Mondo (1114) e di Storia (1115), al mondo di Dante (1116) ed a "Dio" (1117), dove le virgolette precisano che questo Dio è quello di Dante. Pertanto le cinque figure. sono un'unica costruzione 3D, quale è la rete speciale di tipo geodetico (di cui si presenta la "compensazione", mettendo in evidenza le propagazioni di varianza-covarianza, quali uniche operazioni possibili, in mancanza di dati e comunque di interesse specifico).

Questi filosofi sono due domenicani ed un francescano: due ordini mendicanti, spesso in contrasto tra loro, che intendono superare l'isolamento abbaziale benedettino, per immergersi nella rinascente società civile (Alberto Magno rende compatibile la fisica di Aristotele con le scritture, mentre Tommaso d'Aquino inserisce la metafisica nel pensiero teologico-ecclesiastico).

La reazione al tomismo, in nome del pensiero platonico-agostiniano, con Gioacchino da Fiore (cistercense) e Giovanni Fidanza da Bagnoregio (cioè fra Bonaventura, francescano), è notevole; dopodiché un punto d'equilibrio, tra razionalismo tomista ed empirismo, è cercato da Giovanni Duns Scoto, Guglielmo di Occam e Jean Buridan (cioè Giovanni Buridano).

ANALISI DEL FLUSSO DI INFORMAZIONI NELLA COMMEDIA

Legenda:

- A** numero progressivo
- B** scarto quadratico medio (sqm)
- C** scarto quadratico medio standardizzato
- D** numero antecedente nel flusso di informazioni
- E** numero conseguente nel flusso di informazioni
- F** ridondanza locale

A	B	C	D	E	F	A	D	E	F	A	D	E	F
1	0.795	0.031	1	2	0.626	1285	1027	286	0.730	2569	1101	570	0.758
2	0.767	0.030	2	3	0.653	1286	1027	287	0.687	2570	1101	571	0.693
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1116	0.632	0.024	1012	117	0.755	2400	1101	401	0.693	3684	1064	1065	0.552
1117	0.000	0.000	1012	118	0.700	2401	1101	402	0.763	3685	1065	1066	0.562
1118			1012	119	0.697	2402	1103	403	0.764	3686	1066	1067	0.705
...			...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1284			1026	285	0.676	2568	1104	569	0.718	3852	1115	1117	0.620
										3853	1116	1117	0.600

ISTOGRAMMA DEGLI SQM STANDARDIZZATI

Mediana e mav	0.030	0.002			
Estremi di quartili	0.023	0.028	0.030	0.031	0.034
Media e (loro) sqm	0.030	0.001			

ISTOGRAMMA DELLE RIDONDANZE LOCALI

Mediana e mav	0.710	0.067			
Estremi dei quartili	0.991	0.778	0.710	0.643	0.516
Media e (loro) sqm	0.714	0.052			

Tabella 12. Analisi del flusso di informazioni e loro statistiche riassuntive nella Commedia.

Appendice D – Le mappe anamorfiche ⁶⁹

Regioni italiane

INFERNO

MASS (ovvero frequenze assolute o presenze)

CARTOGRAM COMPUTATION REPORT

CARTOGRAM PARAMETERS:

Cartogram layer: Reg01012019_g_WGS84

Cartogram attribute: INFERNO

Attribute type: Population value

Transformation quality: 50 of 100

Cartogram grid size: 466 x 600

Diffusion grid size: 256

Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:

Number of features: 20

Attribute mean value: 10.75

Attribute minimum value: 0.0

Attribute maximum value: 78.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:

None

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:

None

CARTOGRAM ERROR

The cartogram error is a measure for the quality of the result.

Mean cartogram error: 60.56473354658666

Standard deviation: 42.21233928195585

25th percentile: 77.03401874227472

50th percentile: 91.399415448985

75th percentile: 102.46459794122708

Features with mean error +/- 1 standard deviation: 11 of 20 (55%)

Computation time: 199 seconds

DENSITY (frequenze relative, mediate con le superfici delle regioni)

CARTOGRAM COMPUTATION REPORT

CARTOGRAM PARAMETERS:

Cartogram layer: Reg01012019_g_WGS84

Cartogram attribute: INFERNO

Attribute type: Density value

Transformation quality: 50 of 100

Cartogram grid size: 466 x 600

Diffusion grid size: 256

Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:

Number of features: 20

Attribute mean value: 10.75

Attribute minimum value: 0.0

Attribute maximum value: 78.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:

None

⁶⁹ Il disegno delle mappe anamorfiche è eseguito con il software commerciale "ScapeToad"; tutte le altre elaborazioni sono eseguite con software proprietario.

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:

None

CARTOGRAM ERROR

The cartogram error is a measure for the quality of the result.

Mean cartogram error: 68.6466113577948

Standard deviation: 52.1058850904129

25th percentile: 74.55474500875309

50th percentile: 93.0196742858743

75th percentile: 110.40406281518366

Features with mean error +/- 1 standard deviation: 12 of 20 (60%)

Computation time: 198 seconds

PURGATORIO

MASS

CARTOGRAM COMPUTATION REPORT

CARTOGRAM PARAMETERS:

Cartogram layer: Reg01012019_g_WGS84

Cartogram attribute: PURGATORIO

Attribute type: Population value

Transformation quality: 50 of 100

Cartogram grid size: 466 x 600

Diffusion grid size: 256

Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:

Number of features: 20

Attribute mean value: 7.35

Attribute minimum value: 0.0

Attribute maximum value: 46.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:

None

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:

None

CARTOGRAM ERROR

The cartogram error is a measure for the quality of the result.

Mean cartogram error: 66.68686129732347

Standard deviation: 44.35431870279179

25th percentile: 89.81964772430348

50th percentile: 94.58629219164246

75th percentile: 103.86588677071711

Features with mean error +/- 1 standard deviation: 14 of 20 (70%)

Computation time: 202 seconds

DENSITY

CARTOGRAM COMPUTATION REPORT

CARTOGRAM PARAMETERS:

Cartogram layer: Reg01012019_g_WGS84

Cartogram attribute: PURGATORIO

Attribute type: Density value

Transformation quality: 50 of 100

Cartogram grid size: 466 x 600

Diffusion grid size: 256

Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:

Number of features: 20

Attribute mean value: 7.35
Attribute minimum value: 0.0
Attribute maximum value: 46.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:
None

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:
None

CARTOGRAM ERROR
The cartogram error is a measure for the quality of the result.
Mean cartogram error: 86.0101720471282
Standard deviation: 75.56846906535044
25th percentile: 80.33070953212426
50th percentile: 95.00601110090199
75th percentile: 160.65875180265158
Features with mean error +/- 1 standard deviation: 11 of 20 (55%)

Computation time: 202 seconds

PARADISO

MASS

CARTOGRAM COMPUTATION REPORT
CARTOGRAM PARAMETERS:

Cartogram layer: Reg01012019_g_WGS84
Cartogram attribute: PARADISO
Attribute type: Population value
Transformation quality: 50 of 100
Cartogram grid size: 466 x 600
Diffusion grid size: 256
Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:
Number of features: 20
Attribute mean value: 6.55
Attribute minimum value: 0.0
Attribute maximum value: 51.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:
None

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:
None

CARTOGRAM ERROR
The cartogram error is a measure for the quality of the result.
Mean cartogram error: 64.36736225971015
Standard deviation: 43.388690962722734
25th percentile: 84.55273418263481
50th percentile: 95.48022091840318
75th percentile: 101.80292871155243
Features with mean error +/- 1 standard deviation: 13 of 20 (65%)
Computation time: 192 seconds

DENSITY

CARTOGRAM COMPUTATION REPORT
CARTOGRAM PARAMETERS:

Cartogram layer: Reg01012019_g_WGS84
Cartogram attribute: PARADISO

Attribute type: Density value
Transformation quality: 50 of 100
Cartogram grid size: 466 x 600
Diffusion grid size: 256
Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:

Number of features: 20
Attribute mean value: 6.55
Attribute minimum value: 0.0
Attribute maximum value: 51.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:

None

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:

None

CARTOGRAM ERROR

The cartogram error is a measure for the quality of the result.
Mean cartogram error: 87.35107639558865
Standard deviation: 86.582585625332
25th percentile: 66.63899085407508
50th percentile: 102.54124369141635
75th percentile: 169.15681437276726
Features with mean error +/- 1 standard deviation: 12 of 20 (60%)

Computation time: 202 seconds

Altre nazioni

ITALIA : 20
INFERNO = 215 (10.75) = 11
PURGATORIO = 147 (7.5 = (7))
PARADISO = 129 (6.45) = 6

GRECIA : 10
INFERNO = 93 (9.3) = 9
PURGATORIO = 76 (7.6) = 8
PARADISO = 47 (4.7) = 5

INFERNO

MASS

CARTOGRAM COMPUTATION REPORT

CARTOGRAM PARAMETERS:

Cartogram layer: TM_WORLD_BORDERS-0.3_ITALIA_GRECIA_PESATI
Cartogram attribute: INFERNO
Attribute type: Population value
Transformation quality: 50 of 100
Cartogram grid size: 600 x 289
Diffusion grid size: 256
Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:

Number of features: 246
Attribute mean value: 0.3617886178861789
Attribute minimum value: 0.0
Attribute maximum value: 15.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:

None

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:

None

CARTOGRAM ERROR

The cartogram error is a measure for the quality of the result.

Mean cartogram error: 17.414365168715534

Standard deviation: 77.24605040401212

25th percentile: 80.02078408034232

50th percentile: 107.9303570195889

75th percentile: 148.3706937640917

Features with mean error +/- 1 standard deviation: 227 of 246 (92%)

Computation time: 1533 seconds

DENSITY

CARTOGRAM COMPUTATION REPORT

CARTOGRAM PARAMETERS:

Cartogram layer: TM_WORLD_BORDERS-0.3_ITALIA_GRECIA_PESATI

Cartogram attribute: INFERNO

Attribute type: Density value

Transformation quality: 50 of 100

Cartogram grid size: 600 x 289

Diffusion grid size: 256

Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:

Number of features: 246

Attribute mean value: 0.3617886178861789

Attribute minimum value: 0.0

Attribute maximum value: 15.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:

None

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:

None

CARTOGRAM ERROR

The cartogram error is a measure for the quality of the result.

Mean cartogram error: 640.5848013094859

Standard deviation: 7204.044505598815

25th percentile: 97.4662433051166

50th percentile: 213.48832104842876

75th percentile: 1767.6685562276725

Features with mean error +/- 1 standard deviation: 244 of 246 (99%)

Computation time: 1524 seconds

PURGATORIO

MASS

CARTOGRAM COMPUTATION REPORT

CARTOGRAM PARAMETERS:

Cartogram layer: TM_WORLD_BORDERS-0.3_ITALIA_GRECIA_PESATI

Cartogram attribute: PURGATORIO

Attribute type: Population value

Transformation quality: 50 of 100

Cartogram grid size: 600 x 289

Diffusion grid size: 256

Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:

Number of features: 246
Attribute mean value: 0.4105691056910569
Attribute minimum value: 0.0
Attribute maximum value: 22.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:
None

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:
None

CARTOGRAM ERROR
The cartogram error is a measure for the quality of the result.
Mean cartogram error: 129.30359283799186
Standard deviation: 1831.1257550017478
25th percentile: 100.01939242666175
50th percentile: 114.00998989405954
75th percentile: 171.24836048345054
Features with mean error +/- 1 standard deviation: 245 of 246 (100%)

Computation time: 1523 seconds

DENSITY

CARTOGRAM COMPUTATION REPORT

CARTOGRAM PARAMETERS:
Cartogram layer: TM_WORLD_BORDERS-0.3_ITALIA_GRECIA_PESATI
Cartogram attribute: PURGATORIO
Attribute type: Density value
Transformation quality: 50 of 100
Cartogram grid size: 600 x 289
Diffusion grid size: 256
Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:
Number of features: 246
Attribute mean value: 0.4105691056910569
Attribute minimum value: 0.0
Attribute maximum value: 22.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:
None

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:
None

CARTOGRAM ERROR
The cartogram error is a measure for the quality of the result.
Mean cartogram error: 959.2854958445657
Standard deviation: 11121.49081063065
25th percentile: 71.11596043492895
50th percentile: 162.60893580068324
75th percentile: 1090.007445956246
Features with mean error +/- 1 standard deviation: 244 of 246 (99%)

Computation time: 1487 seconds

PARADISO

MASS
CARTOGRAM COMPUTATION REPORT

CARTOGRAM PARAMETERS:
Cartogram layer: TM_WORLD_BORDERS-0.3_ITALIA_GRECIA_PESATI

Cartogram attribute: PARADISO
Attribute type: Population value
Transformation quality: 50 of 100
Cartogram grid size: 600 x 289
Diffusion grid size: 256
Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:

Number of features: 246
Attribute mean value: 0.516260162601626
Attribute minimum value: 0.0
Attribute maximum value: 29.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:

None

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:

None

CARTOGRAM ERROR

The cartogram error is a measure for the quality of the result.

Mean cartogram error: 20.502862627103845

Standard deviation: 94.06420745009565

25th percentile: 98.37713448156356

50th percentile: 119.90746054445096

75th percentile: 153.3879227765784

Features with mean error +/- 1 standard deviation: 233 of 246 (95%)

Computation time: 1525 seconds

DENSITY

CARTOGRAM COMPUTATION REPORT

CARTOGRAM PARAMETERS:

Cartogram layer: TM_WORLD_BORDERS-0.3_ITALIA_GRECIA_PESATI

Cartogram attribute: PARADISO

Attribute type: Density value

Transformation quality: 50 of 100

Cartogram grid size: 600 x 289

Diffusion grid size: 256

Diffusion iterations: 3

CARTOGRAM LAYER & ATTRIBUTE STATISTICS:

Number of features: 246
Attribute mean value: 0.516260162601626
Attribute minimum value: 0.0
Attribute maximum value: 29.0

SIMULTANEOUSLY TRANSFORMED LAYERS:

None

CONSTRAINED DEFORMATION LAYERS:

None

CARTOGRAM ERROR

The cartogram error is a measure for the quality of the result.

Mean cartogram error: 528.6441199976163

Standard deviation: 5772.929610262005

25th percentile: 105.56551331533296

50th percentile: 287.3061271135146

75th percentile: 1118.6725701642945

Features with mean error +/- 1 standard deviation: 244 of 246 (99%)

Computation time: 1493 seconds

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Limiti, errori e prospettive nelle due culture scientifica ed umanistica

Durante una visita a Castel del Monte di Puglia, a fronte dell'affermazione che questa struttura sia allineata con le piramidi egizie ed i monumenti megalitici di Chartes (in Francia), un insigne geodeta straniero si è chiesto a quale ellissoide fossero riferite le misure. Una risposta severa chiederebbe allo stesso di studiare meglio la storia della scienza (compresa quella della geografia e della cartografia). Infatti l'adozione e l'uso dell'ellissoide, come superficie di riferimento, sono una determinazione del '600/'700 e risalgono alla disputa tra Cassini (astronomo a Parigi) e Newton, su un ellissoide allungato a poli, oppure schiacciato negli stessi luoghi. Due spedizioni francesi, in Lapponia ed in Perù, hanno dato ragione a Newton, determinando i primi parametri dell'ellissoide (ovvero il suo semiasse equatoriale e lo schiacciamento).

Allora il suddetto allineamento medioevale (all'epoca di Federico II di Svevia) potrebbe essere su una carta di Tolomeo, con una Terra sferica, e supponendo una carta 1:10.000.000 (con un 1 cm pari a 100 km), l'errore dell'allineamento, ridotto ad un errore di graficismo, risulta pari a 2 km (ovvero 0.2 mm sulla carta). Pertanto mentre nulla può essere imputato ai progettisti/costruttori che hanno operato sulla base delle molto limitate conoscenze della loro epoca, un'osservazione bonaria può essere rivolta all'insigne collega. Non basta conoscere la matematica superiore, nelle sue vastissime branche, ed operare lì egregiamente, una figura di studioso, davvero completa, deve conoscere, altrettanto bene, il contesto storico e culturale, dove queste nozioni sono sorte e si situano.

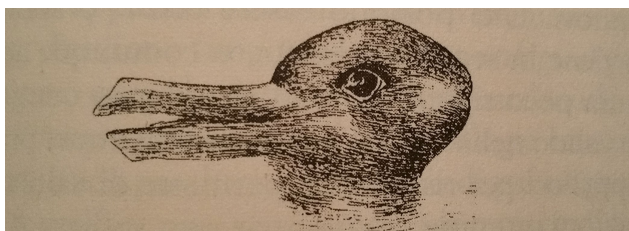


Castel del Monte di Puglia

Il filosofo, logico e matematico, Ludwig Wittgenstein, nel suo primo libro (unico pubblicato, in vita), ovvero nel *Tractatus*, tra molte altre cose, di occupa di “vedere come”, ovvero sulla possibilità di prendere qualcosa per qualcos’altro, mostrando una figura ambigua che, osservata in un certo modo, mostra un’anatra, con un forte becco, ed invece un coniglio, con grandi orecchie, se osservata in un altro modo. Fin qui assolutamente nulla da dire e l’eloquente conferma della validità delle tesi di Wittgenstein, forse già in un passaggio, fra la logica stringente del *Tractatus* e le tesi pluraliste delle successive Ricerche filosofiche (pubblicate postume)

e successive anche ad un periodo, trascorso nella regione austriaca della Stiria, come insegnante in una scuola elementare.

Quello che sorprende è che un libro autorevole che presenta criticamente l'intera opera di Wittgenstein, per commentare l'ambiguità attribuisca, ad entrambi gli animali, l'appartenenza alla classe dei mammiferi, dove è arcinoto che il coniglio appartiene alla classe dei mammiferi, mentre l'anatra appartiene a quella degli uccelli. Pertanto una domanda sensata si chiede quali siano le conoscenze scientifiche di questo scrittore-filosofo, in particolare, quali siano le sue vere conoscenze matematiche di base (in aritmetica: tabelline rovesce, frazioni, potenze e radicali, ed in geometria: assiomi di Euclide e teoremi di Pitagora e Talete, solo per incominciare). Infatti anche una grande erudizione umanistica è cosa largamente incompleta, se priva già delle più semplici conoscenze scientifiche e, in particolare, matematiche.



Anatra – coniglio (Wittgenstein, *Tractatus*)

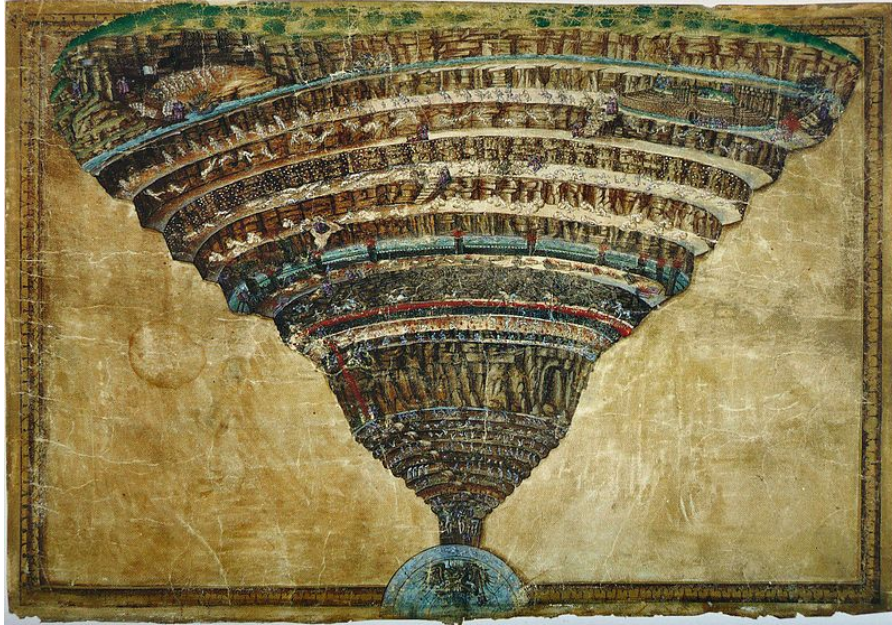
Questa infausta frattura ha gravi conseguenze. Non è infatti infrequente imbattersi in scienziati, per lo più matematici e fisici, incapaci di tradurre in parole quello che scrivono in formule, dimenticando quasi che, a partire dai numeri per arrivare ai simboli, tutti hanno origine da parole e possono essere letti e compresi come moderni ideogrammi e, in quanto tali, parti di un discorso (e nulla di strano, a sé stante). Per contro, la mancanza di cultura matematica e scientifica, da parte di umanisti ed artisti, li porta spesso a scrivere frasi oscure, in generale, troppo lunghe e talvolta con giochi di parole, inutili e dannosi. Di certo, un buon dialogo, una maggiore collaborazione ed il pieno rispetto possono far sì che tutti questi spiacevoli inconvenienti siano benissimo superati, da entrambe le parti.

Da ultimo, le antinomie kantiane presentano punti di discussione, anche per la modellazione matematica:

- | | |
|--------------------------------|---|
| <u>1^a antinomia</u> | Tesi: il mondo ha un inizio nel tempo e nello spazio, ed è chiuso dentro limiti.
Antitesi: Il mondo è infinito sia nel tempo che nello spazio. |
| <u>2^a antinomia</u> | Tesi: ciascuna cosa è composta da parti semplici che costituiscono altre cose composte da parti semplici.
Antitesi: non esiste nulla di semplice, ogni cosa è complessa. |
| <u>3^a antinomia</u> | Tesi: La causalità secondo le leggi della natura non è la sola da cui possono essere derivati tutti i fenomeni del mondo ed è necessario ammettere, per la spiegazione di essi, anche una causalità per la libertà.
Antitesi: Nel mondo non esiste alcuna libertà, ma tutto accade unicamente secondo le leggi della natura. |
| <u>4^a antinomia</u> | Tesi: esiste un essere necessario che è causa del mondo.
Antitesi: non esiste alcun essere necessario, né nel mondo né fuori dal mondo che sia causa di esso. |

Un'interessante ibridazione fra cultura umanistica e cultura scientifica è invece mostrata da:

- ❑ lo studio geometrico e topografico dello inferno dantesco, ad opera di Antonio Tucci Manetti, architetto e matematico, che dà avvio agli studi rinascimentali (e poi seicenteschi) sulla struttura di questo inferno;
- ❑ la Mappa dell'inferno, di Sandro Botticelli, pittore e studioso della geometria prospettica, allievo di Filippo Lippi ed influenzato anche dalla pittura matematica di Piero della Francesca;
- ❑ la lezione sullo studio del Manetti, tenuta da Galileo Galilei, sicuramente massimo scienziato (astronomo e fisico), ma anche grandissimo prosatore (addirittura uno dei massimi italiani, a detta di Italo Calvino).



Sandro Botticelli, Mappa dell'inferno

Infatti la modellazione matematica, mentre combatte benissimo il pressappochismo parolaio, spinto talvolta fino alla scrittura di frasi oscure, con giochi di parole, lascia aperti problemi di scelta, al suo stesso interno. In questo modo, la modellazione matematica offre diverse modalità operative: con un approccio deterministico, contrapposto ad uno probabilistico e statistico, come pure con una rappresentazione analitica e continua, contrapposta ad una algebrica e discreta. Nessuna modalità operativa è da privilegiare: nessun algoritmo o procedura è elettivo/a, solo la convenienza operativa e, perché no, la storia collettiva ed anche personale, in un dato settore, possono essere una traccia, per operare con una maggiore o minore facilità, una migliore o peggiore convenienza.

Non a caso, un lavoro che si apre con le categorie kantiane ed una loro possibile classificazione matematica, si chiude con le antinomie kantiane, con riferimento anche alla modellazione matematica. Infatti Kant è, nel mondo moderno, centrale come Aristotele, nel mondo antico, costruendo entrambi sintesi critiche, di certo, da rivedere e correggere (e molte altre tesi contrapposte possono essere presentate, ad esempio: Platone precede Aristotele ed Hegel – pur con tutte le perplessità del caso – segue Kant), ma fondamentali, per ben mettere in evidenza i tratti sostanziali delle loro due epoche, a loro volta, già molto estese, rispetto alla loro esistenza. Circa poi una nuova sintesi critica, per il mondo contemporaneo, forse occorre saper riconoscere l'enorme lasso di tempo, fra Aristotele e Kant, e dover attendere, ancora molto a lungo.

Quanto segue si estende sicuramente oltre i limiti consentiti alle considerazioni filosofiche, fatte da ingegneri, interessati alla matematica ed alla fisica, nonché alla cultura umanistica che fa loro da contorno, ma di certo non studiosi eccelsi di filosofia della scienza. Di conseguenza, coloro che scrivono si scusano subito con i loro lettori, per questo allargamento, ma hanno scelto/deciso di svilupparlo ugualmente, per poter avviare un interessante dibattito. Infatti la disputa Platone/Aristotele e Kant/Hegel attraversa tutta la filosofia passata e moderna, ed anche tutta la storia della cultura, in generale, cosicché non è facile e forse nemmeno corretto istituire primazie. Invece è certamente lecito esprimere opinioni, come la posizione di Martin Lutero e Galileo Galilei, rispetto alla modernità, oppure quella di Karl Marx, con il criticismo e l'idealismo.

Innanzitutto Platone risulta più moderno, perché mediato dal neoplatonismo rinascimentale che lo avvicina ad altre filosofie, come l'epicureismo e lo scetticismo. Al contrario, l'aristotelismo, con il dogmatismo della tarda Scolastica, non è disgiunto dall'inquisizione controriformista e dalla censura protestante. A riguardo, Lutero (monaco agostiniano neo-platonico), con la condanna della teoria eliocentrica copernicana e la difesa della teoria geocentrica tolemaica, di fatto, è "aristotelico". Analogamente Galileo, sperimentatore nel Duomo di Pisa per il pendolo, all'Arsenale di Venezia per l'accelerazione, con il cannocchiale per le montagne della Luna ed i satelliti di Giove (detti stelle medicee), è "aristotelico critico", contro l'ultimissima Scolastica (quale quella degli accademici di Padova e del Cardinale Bellarmino).

In più, volendo enfatizzare le scelte teoriche di Galileo, rispetto a certe evidenze nelle misure astronomiche (laddove Galileo accetta orbite circolari, simboli di perfezione, e non le orbite ellittiche kepleriane), si può dire che Galileo è "platonico sui generis". Un discorso analogo può essere fatto riguardo Karl Marx che hegeliano di sinistra, secondo la mediazione di Ludwig Feuerbach, considera Kant: il traduttore tedesco (e borghese) dell'Illuminismo francese (aristocratico). Invece la scienza marxiana, dalla Critica dell'economia politica alla Dialettica della natura (di Friedrich Engels), è scienza vera, come le Critiche kantiane, lontana dall'idealismo hegeliano (dal suo solipsismo e da una "scienza" astratta, non fondata su basi scientifiche e sperimentali ⁷⁰), mentre dal kantismo si arriva al neokantismo, al neopositivismo (critico) ed allo strutturalismo.

Ringraziamenti

Gli autori ⁷¹ ringraziano vivamente le allieve dei due corsi: La Geomatica incontra le Scienze umane e Critica dialettica del Trattamento delle Osservazioni (dei Dottorati di Ricerca, entrambi del Politecnico di Milano, in Ingegneria Ambientale e delle Infrastrutture del DICA: Branka Cuca, Micol Pillon e Federica Sparacino ed in Architettura, Ingegneria delle Costruzioni e Ambiente Costruito del Dipartimento ABC: Sara Ganassali, Marta Gehelin e Serena Giorgi)) che, con la loro partecipazione, attiva e propositiva, hanno contribuito a costruire positivamente e/o migliorare entrambi i corsi. Corre altresì il dovere di ringraziare vivamente tutti gli allievi delle classi della Scuola Superiore che hanno letto interamente le tre Cantiche e raccolto tutti/e i dati e le informazioni, relative ai personaggi ed ai luoghi della Commedia, ed il Prof. Marco Gnemmi che li ha diretti magistralmente, nonché l'Arch. Francesco Fiermonte che ha prodotto egregiamente tutte le rappresentazioni, per illustrare benissimo i contenuti delle elaborazioni svolte, a partire dalle più complesse.

Bibliografia minima

Alighieri D. (1993): La Divina Commedia (a cura di Tommaso Di Salvo). Zanichelli, Bologna.
Ricci F. (1975): Statistica ed elaborazione statistica delle informazioni. Zanichelli, Bologna.
Stewart I. (2017): Le 17 equazioni che hanno cambiato il mondo. Einaudi, Torino.
Tonti E. (1976): La struttura formale delle teorie fisiche. Clup, Milano.
Treccani – il portale del sapere (enciclopedia: Treccani online).

⁷⁰ Alle degenerazioni dell'idealismo hegeliano possono essere imputati anche i totalitarismi novecenteschi di destra e di sinistra.

⁷¹ Gli autori avvertono che questo lavoro è spesso composto da citazioni e riporti da/di testi (tutti documentati sulle loro fonti), ma fanno altresì notare come, non abbisognando di accrescere i loro titoli, abbiano evitato di parafrasare lavori altrui, come accade di osservare, a volte, in lavori, redatti in gruppo, prodotti in serie e di contenuto insulso, seguendo filoni alla moda, talvolta addirittura di corto respiro.