LA SCUOLA DI MILANO DALLA SUA FONDAZIONE NEL ‘700 AD OGGI

Luigi Mussio
Politecnico di Milano – DIIAR – Piazza Leonardo da Vinci, 32 – 20133 Milano
Tel. 02-2399-6501, Fax. 02-2399-6602 – e-mail luigi.mussio@polimi.it

RIASSUNTO

Ruggero Giuseppe Boscovich (o Boscovič, secondo la scrittura croata, data la sua origine dalmata, oppure ancora Boscowich, secondo la scrittura tedesca, in un periodo in cui sia la Dalmazia che la Lombardia occidentale ed il Mantovano appartengono all’Austria), gesuita, studioso di matematica, fisica, astronomia, geodesia e cartografia, è attivo e compie lunghi viaggi (durante i quali svolge anche importanti missioni diplomatiche) tra Roma, Pavia, Milano, Venezia, Vienna, Parigi, Londra, Varsavia, San Pietroburgo e Costantinopoli. La sua attività geodetica e cartografica si sviluppa comunque in Italia: a Roma, per la misura di un arco di meridiano terrestre, tra Roma e Rimini, e la “nuova” edizione della carta dello Stato Pontificio, ed a Milano, per la fondazione della Scuola di Milano, anche se purtroppo scarsa è la documentazione a riguardo, la cui illustre tradizione si tramanda a lungo e dura tuttora.

Discepoli diretti di Boscovich sono gli abati Angelo De Cesaris e Francesco Reggio (che succedono ai veri fondatori della Specola, cioè i padri gesuiti Giuseppe Bovio e Domenico Gerra, e poi Joseph-Louis La Grange), ed il primo gli succede nella direzione della Specola di Brera. Successivamente dapprima Barnaba Oriani (un padre barnabita) e poi Francesco Carlini (il primo laico), ciascuno ad una generazione di distanza, assumono la direzione dell’Osservatorio di Brera. Giovanni Virginio Schiaparelli succede a Francesco Carlini, nella direzione dell’Osservatorio Astronomico di Brera e diviene professore di geodesia, topografia e cartografia, presso l’allora nascente Regio Politecnico di Milano (dove, per un certo periodo, è affiancato dal professor Ignazio Porro, insigne strumentista). Allo Schiaparelli succede Giovanni Celoria (già suo allievo), nelle medesime cariche e funzioni; dopodiché le loro strade si separano.

Luigi Gabba, Emilio Bianchi, Luigi Volta e Francesco Zagar diventano, nell’ordine, direttore del suddetto osservatorio astronomico, mentre Giuseppe Ferrario (già assistente del Celoria) diviene professore di geodesia, topografia e cartografia al Regio Politecnico di Milano. Successore di Ferrario è direttamente Gino Cassinis [1] ed allievi di quest’ultimo sono, tra altri, nell’ordine: Luigi Solaini, Mariano Cunietti [2], Giuseppe Inghilleri e la signora Giovanna Togliatti [3] (successivamente tutti professori al Politecnico di Milano, ad eccezione di Inghilleri, divenuto poi professore al Politecnico di Torino). Nel contesto della sola presenza al Politecnico di Milano, le figure di Cassinis e Cunietti meritano una particolare sottolineatura, perché il primo deve essere considerato un vero e proprio rifondatore della Scuola di Milano ed il secondo (già allievo del primo) ha dato avvio e sostenuto, buona parte, della ricerca moderna, con una spinta che, nonostante tutto sia poi davvero cambiato, è certamente presente ancora oggi

[1] Gino Cassinis (Milano, 27 gennaio 1885 – Roma, 13 gennaio 1964), ingegnere, matematico e geodeta, è stato Rettore del Politecnico di Milano, Presidente dell'Accademia dei Lincei e della Commissione Geodetica Italiana, Vicepresidente dell'Associazione Geodetica Internazionale, Presidente della Società Internazionale di Fotogrammetria e rappresentante italiano nel Comitato Internazionale di Pesi e Misure. Lo stesso, in quanto uomo politico, è stato anche Sindaco di Milano.

[2] Mariano Cunietti (Varese, 8 maggio 1921 – Milano, 18 luglio 1997), fisico, metrologo, gravimetrista e fotogrammetra, è stato Direttore dell’Istituto di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria del Politecnico di Milano, Presidente della Società Italiana di Topografia e Fotogrammetria (SIFET), segretario della Commissione III della Società Internazionale di Fotogrammetria (essendo Presidente della stessa Commissione il sopraccitato Cassinis), delegato italiano nell’Organizzazione Europea per gli Studi di Fotogrammetria Sperimentale (OEEPE) e promotore della Giornata della Misurazione (una “vera” e propria istituzione che, giunta ormai alla sua trentesima edizione, prolunga la memoria dello stesso Cunietti). Notevole è il libro: Corso Teorico Pratico sulle Misure, di cui è autore lo stesso Cunietti.

[3] L’autore di questo lavoro ha conoscenza diretta di tutti e quattro gli ultimi sopraccitati professori e ne ha apprezzato competenze, meriti ed umanità.

PARTE I – RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH [4]

Una biografia importante di un insigne studioso

La biografia riportata di seguito è tratta integralmente dall'Enciclopedia Italiana Treccani ed è scritta da Luigi Gabba, un astronomo: direttore dell'Osservatorio di Brera, per poco tempo, tra gli anni '10 e gli anni '20 del '900. La figura dell'estensore è particolarmente importante, perché costituisce il passaggio della Scuola di Milano,tra un'epoca, ormai passata, fondata proprio dal Boscovich (Fig. I.1), ed un'epoca più recente che, si può ritenere, duri tuttora.

Fig. I.1 – Ruggero Giuseppe Boscovich

Infatti a testimonianza del percorso d'eccellenza, compiuto dagli astronomi, geodeti e cartografi della Specola di Brera, ed a sostegno di quanto ancora oggi si continua a studiare, nella Scuola di Milano, ad esempio, nell'ambito del trattamento delle osservazioni, sulla scorta di un così importante inizio, si possono annoverare proprio il Boscovich e la formalizzazione matematica del metodo della minima somma dei moduli, di sicura derivazione galileiana.

Una riprova di quanto affermato, proprio nell'ambito specifico del trattamento delle osservazioni, è dato dall'uso del metodo dei minimi quadrati da parte di Francesco Carlini che succede nella direzione della Specola di Milano a Barnaba Oriani (a sua volta succeduto ad Angelo De Cesaris che, con Francesco Reggio è un allievo diretto di Boscovich). L'originalità dell'applicazione è legata alla sua data, appena di quattro anni successiva alla pubblicazione del metodo, da parte di Gauss [5].

Successivamente all'inizio del '900, su indicazione di Angelo Celoria, successore di Giovanni Virginio Schiaparelli [6], nella direzione della Specola di Milano e come professore nel Regio Politecnico di Milano, è attivato il primo corso di Teoria degli Errori. Questo corso è proseguito da Gino Cassinis e, ad esso (immediato predecessore dell'odierno corso di Trattamento delle Osservazioni), fa poi seguito il corso di Teoria e Pratica delle Misure, tenuto da Mariano Cunietti e dalla signora Giovanna Togliatti.

L'attenzione, la cura e l'interesse che guidano questi corsi è ricercare il massimo rigore possibile, cercando di rimanere vicino alla pratica operativa corrente. Infatti essi non hanno solitamente teoremi a sostegno (pertanto rarissimi contro-esempi potrebbero, in teoria, affossare algoritmi e procedure proposti), ma danno risultati dignitosi. Altre proposte sono sempre benvenute, ma devono pagare il prezzo della loro effettiva praticabilità, altrimenti sono solo desiderata, privi del sostegno di qualsiasi sperimentazione concreta.

---

[4] Siti consultati: http://www.treccani.it/enciclopedia/ruggero-giuseppe-boscovich/
http://www.igmi.org/ancient/scheda.php?cod=13193
http://achillenobiloni.blogspot.com/2010/05/lo-stato-della-chiesa-nella-carta-dei.html

[5] Il metodo dei minimi quadrati, ipotizzato già da Eulero, ma non formalizzato da questi, ha una sua prima formulazione, ad opera di Legendre e Gauss, quasi contemporaneamente all'inizio dell'800, ed è pubblicato da Gauss nel 1821.

[6] Schiaparelli succede a Carlini nella direzione dell'osservatorio astronomico di Brera e diventa professore di Geodesia nell'allora nascente Politecnico di Milano, per un certo periodo, affiancato dal professor Ignazio Porro, sulla cattedra di Topografia.

BOSCOVICH, Ruggiero Giuseppe – Astronomo, fisico, geodeta, matematico, nato a Ragusa di Dalmazia il 18 maggio 1711, morto a Milano il 13 febbraio 1787. Entrò nel 1726 nella Compagnia di Gesù. Manifestò subito ingegno potente, e prima ancora d'essere ordinato sacerdote insegnò grammatica e matematica.
La vastità e la molteplicità delle sue cognizioni e l'autorevolezza di cui fu ben presto circondato, gli procurarono molti ed importanti incarichi che seppe sempre assolvere con giustizia e con soddisfazione. Fu interpellato, così, circa porti da riaprire, strade e canali da costruire, circa la stabilità della cupola di S. Pietro in Roma e quella della guglia del duomo di Milano, circa la bonifica delle Paludi Pontine. Ebbe missioni importanti: fu delegato nel 1757 a sostenere a Vienna i diritti della repubblica di Lucca contro il governo della Toscana in una controversia circa lo scolo delle acque del lago di Bientina.
Fra gl'incarichi avuti notevolissimo fu quello, affidategli da Benedetto XIV e compiuto in collaborazione col padre Cristoforo Maire fra il 1750 e il 1753, di misurare un arco di meridiano fra Roma e Rimini nell'intento di contribuire alla risoluzione del problema, in allora assai dibattuto, della figura della terra e di ottenere dati sicuri per la rettifica della carta dello stato pontifìcio. Egli ha pure il merito di avere con la sua autorità promosse le analoghe operazioni del Beccaria in Piemonte e del Liesganig in Ungheria.
In lunghi e ripetuti viaggi percorse la maggior parte di Europa; soggiornò, talora per molto tempo, a Vienna, a Parigi, a Londra, a Varsavia, a Costanlinopoli. A Vienna pubblicò nel 1758 l'opera *Theoria Philosophiae Naturalis redacta ad unicum legem virium in natura existentium*, in cui espose una sua concezione atomistica dell' universo che ancor; oggi gli assicura un posto cospicuo fra i precursori delle moderne veduti di fìsica atomica. A Londra nel 1760 pubblicò in eleganti versi latini il poema *De Solis ac Lunae Defectibus*.
Nel 1764 fu chiamato all'insegnamento superiore, che professò all'università di Pavia fino al 1768 e poi alle Scuole Palatine di Milano. In questi anni la sua attività si esplicò, oltre che nella scuola, anche nell'osservatorio astronomico di Brera a Milano, che, sorto per iniziativa di alcuni gesuiti, dovette al B. la sua sistemazione ed il suo completamento con gli strumenti meglio adatti ai programmi di ricerche, che in quel tempo si potevano proporre. Il B. vi iniziò una serie di osservazioni e di misure allo scopo di stabilire e correggere gli errori strumentali, eliminandone le conseguenze con combinazioni opportune delle osservazioni, ed espose i precetti a tale riguardo in varie memorie. Scrisse Io Schiaparelli: "In tutti i metodi da lui proposti si scorge la tendenza costante del B. (la quale è altresì passata nella pratica moderna) di sostituire dovunque è possibile le operazioni astronomiche alle meccaniche nella determinazione degli errori".
Il B. fu anche in ciò un precursore, e tale fu ancora nell'ideare, in ogni suo particolare costruttivo, un settore zenitale, munito di un cannocchiale ripieno d'acqua, che fu poi messo in opera, in forme moderne, soltanto nel 1871 da G. B. Airy a Greenwich, e che il B. fin da allora intendeva destinare ad osservazioni astronomiche di controllo della teoria emissiva della luce in confronto di quella ondulatoria. Venuto in disaccordo col padre Lagrange, direttore dell'osservatorio, e col rettore del collegio di Brera fu dispensato dall'occuparsi dell'osservatorio. Il B. rifiutò allora di rimanere a Brera in qualità di direttore onorario, e, in principio del 1773, rinunziò anche all'insegnamento nelle Scuole Palatine.
Ritiratosi a Venezia, passò poi, soppressa nel 1773 la Compagnia di Gesù, a Parigi in qualità di direttore d'ottica della marina francese.
Rimase a Parigi circa un decennio, durante il quale pubblicò fra l'altro un'elegante soluzione del problema di determinare con tre osservazioni un'orbita cometaria, varie memorie sul micrometro e sui cannocchiali acromatici.
Tornò in Italia nel 1783 a Bassano, ove curò una grandiosa edizione dei suoi lavori d'ottica e d'astronomia (Opera pertinentia ad Opticam et Astronomiam, cinque tomi in 4°) apparsa nel 1785; soggiornò per qualc he mese in Toscana durante il 1785, e nell'ottobre di tale anno riprese stanza a Milano attiratevi dai ricordi dell'opera ivi compiuta e dall'amicizia che lo legava agli astronomi suoi discepoli Reggio e Cesaris.

Più stringata, ma a suo modo complementare, è la stessa voce nell'Enciclopedia Italiana Treccani on-line. Infatti questa voce, oltre a dar conto delle sue attività e dei suoi molti spostamenti per l'Europa (non solo fuori dai paesi cattolici, con i viaggi a Londra e San Pietroburgo, ma anche fuori dall'Europa cristiana, con il viaggio scientifico a Costantinopoli), mette in luce i molteplici interessi scientifici e l'approccio a teorie ancora moderne, dopo oltre due secoli.

Ruggero Giuseppe Boscovich – Astronomo, geodeta, fisico, matematico (Ragusa di Dalmazia 1711 - Milano 1787), gesuita. Compiuti i primi studî al Collegium Ragusinum passò al Collegio Romano dove fu poi professore di matematica dal 1740 al 1759. Fu consulente di apprezzata competenza in varie questioni tecniche: stabilità della cupola di S. Pietro e della Biblioteca cesarea a Vienna, bonifica delle paludi pontine, misurazione (con Chr. Maire) dell'arco di meridiano tra Roma e Rimini (*De literaria expeditione per pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam*, 1755) per la risoluzione del problema newtoniano della figura della Terra e la rettifica della carta dello Stato Pontificio. Dopo viaggi a Vienna (1758), in Francia (1759) e Inghilterra (1760), a Costantinopoli (1761, per osservare il passaggio di Venere dinanzi al Sole) e Pietroburgo, fu professore di matematica all'università di Pavia dal 1764 al 1768 quando passò alle Scuole Palatine di Milano dove aveva intrapreso la costruzione della nuova specola di Brera della quale fu direttore. Soppressa la Compagnia di Gesù (1773), dopo un soggiorno a Venezia, si stabilì in Francia (fu direttore d'ottica della Marina francese) per tornare in Italia nel 1782 risiedendo per lo più a Bassano dove curò l'edizione completa delle sue opere: *Opera pertinentia ad opticam et astronomiam* (5 voll., 1784-85). Con l'opera *Philosophiae naturalis theoria* (1758), sintesi originale tra il dinamismo leibniziano e il meccanicismo newtoniano, enunciò una fortunata teoria sulla struttura della materia, secondo la quale, supposta la materia costituita da punti discreti inestesi e indivisibili ("primi elementi della materia") e la legge di continuità, tutte le proprietà meccaniche della materia possono essere spiegate con l'introduzione di forze che a grandi distanze seguono le legge di gravitazione di Newton mentre a distanze minori sono alternativamente attrattive e repulsive per divenire definitivamente repulsive, con una intensità che cresce illimitatamente al decrescere della distanza tra due "elementi", sì da renderne impossibile il contatto. Notevoli contributi portò anche all'ottica (eliminazione dell'aberrazione cromatica delle lenti, rilevazione della aberrazione sferica, costruzione del micrometro ottico), alla geodesia e all'astronomia (metodo per la determinazione delle orbite delle comete e dell'orbita di Urano, rilevazione delle perturbazioni nelle orbite di Giove e Saturno); mentre in matematica fornì un metodo grafico per la risoluzione dei triangoli sferici, quattro formule differenziali di geometria sferica, e indagò la possibilità di geometrie non euclidee.

La Fig. I.2 presenta il sestante mobile di Canivet [7]. Lo stesso Boscovich è particolarmente attento al progetto di strumenti ottici o parti di essi fondamentali. Infatti in questo campo, l'attività di Boscovich si collega direttamente all'allora recente ottica newtoniana e questa rilevanza è pari a quella matematico-statistica riferibile alle teorie euleriane. Infatti una moderna analisi critica dei suoi contributi scientifici affianca Boscovich proprio a Newton ed Eulero [8], per la grandezza dei suoi apporti.

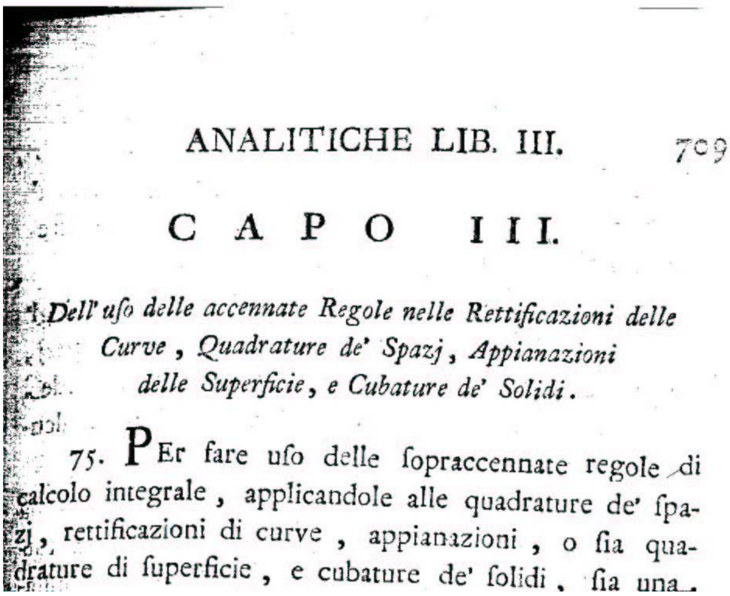
Fig. I.2 – Sestante mobile di Canivet

[7] Questo strumento, costruito a Parigi (od uno molto simile), è verosimilmente impiegato da Boscovich per la misura degli angoli azimutali della triangolazione. Inoltre di pochi anni più tardi, è il Quadrante portatile Megele, costruito a Milano da Giuseppe Megele, su indicazione degli astronomi Angelo De Cesaris, Francesco Reggio e Barnaba Oriani.

[8] Tra i contemporanei di Boscovich ed Eulero, è da segnalare Maria Gaetana Agnesi, capace di ben sei lingue straniere, studia filosofia, matematica, fisica e scienze naturali. Negli studi di matematica si occupa di algebra e di geometria sulle cui tematiche, nel 1748, scrive il libro le Istituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana (fig. I.3), divenuto subito famoso, molto apprezzato e tradotto in varie lingue (in particolare, un capitolo è dedicato a quei calcoli integrali, introduttivi alla geometria differenziale ed alla geodesia geometrica: fig. I.4). La sua competenza la porta ad essere chiamata sulla cattedra di Matematica elementare all'Università di Bologna da Papa Benedetto XIV (al secolo, Prospero Lorenzo Lambertini, già cardinale della stessa città di Bologna), ma rifiuta l'incarico, continuando tuttavia a studiare matematica. Nel contempo, partecipa alla fondazione del milanese Pio Albergo Trivulzio, dove ricopre la carica di Visitatrice e Direttrice delle Donne, specialmente inferme, su incarico anche dell'allora cardinale di Milano Giuseppe Pozzobonelli (ben più arcade che illuminista). Una curiosità, nata da un errore di traduzione, in inglese, permette di fare giustizia di tante fesserie, dette contro le donne, a sproposito. Infatti l'Agnesi studia la curva versiera (fig. I.5, già studiata da Fermat e Guido Grandi, e ripresa poi da Cauchy, per la sua nota distribuzione), ovvero dato un cerchio ed un suo diametro (ove è posta l'origine degli assi, dove un asse è il diametro stesso e l'altro la retta tangente), la curva dei punti, aventi la stessa ordinata della seconda intersezione (al cerchio stesso) di una corda, tracciata a partire dalla suddetta origine e prolungata fino alla retta tangente all'estremo opposto del diametro dato (cosa che permette d'individuarne anche l'ascissa). Orbene la suddetta traduzione, confondendo il nome di versiera con quello d'avversaria, chiama questa curva: la strega di Agnese, cosa che ricordando i roghi delle streghe (allora purtroppo non molto lontani) lascia davvero sbigottiti.


INSTITUZIONI
ANALITICHE
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D^{na} MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE
TOMO I.
IN MILANO, MDCCXLVIII.
NELLA REGIA-DUCAL CORTE.

Fig. I.3 – Frontispizio delle Istituzioni Analitiche di Maria Gaetana Agnesi


ANALITICHE LIB. III. 709

CAPO III.

Dell'uſo delle accennate Regole nelle Rettificazioni delle Curve, Quadrature de' Spazj, Appianazioni delle Superficie, e Cubature de' Solidi.

75. PEr fare uſo delle ſopraccennate regole di calcolo integrale, applicandole alle quadrature de' ſpazj, rettificazioni di curve, appianazioni, o ſia quadrature di ſuperficie, e cubature de' ſolidi, ſia una

Fig. I.4 – Un interessante capitolo dalle suddette Istituzioni

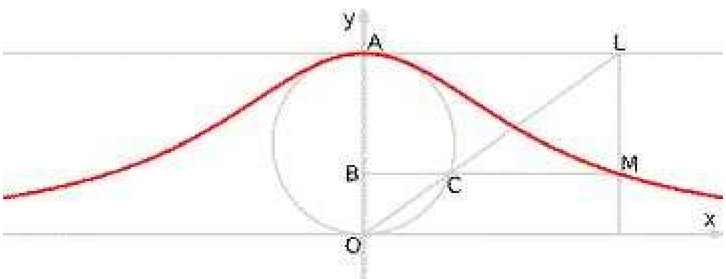


Fig. I.5 – Costruzione della curva versiera di Maria Gaetana Agnesi

La “nuova” carta geografica dello Stato Pontificio

Il sopraccitato sito dell’I.G.M. contiene un’elegante presentazione, chiara ed esaustiva, della “nuova” carta geografica dello Stato Pontificio, redatta dai padri Cristoforo Maire e Ruggero Giuseppe Boscovich, proprio per questo motivo riportata, per intero, nell’immediato prosieguo. Lo stesso sito contiene anche la riproduzione digitale del primo foglio della suddetta carta, riferito al Lazio, a sua volta, riportato di traverso nella pagina seguente (Fig. I.6).

NUOVA CARTA GEOGRAFICA DELLO STATO ECCLESIASTICO DELINEATA DAL P. CRISTOFORO MAIRE D.A C.A DI GESU' SULLE COMUNI OSSERVAZIONI SUE E DEL P. RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH. D.A MED.A C.A – Foglio 1

Descrizione: Carta costruita sulla base delle operazioni intraprese dal P.P. Ruggero Boscovich e Cristoforo Maire sotto il pontificato di Papa Benedetto XIV per la misura dell'arco di meridiano di circa 2° da R oma a Rimini per contribuire alla soluzione della allora dibattuta questione della irregolarità della forma della terra. In tale occasione si vollero estendere le osservazioni astronomiche e geodetiche a fine di rettificare la carta dello Stato Pontificio, la quale perciò risultò la prima carta parziale d'Italia fondata su operazioni scientifiche. Essa venne incisa su rame e pubblicata in 3 fogli nel 1755 alla Calcografia Pontificia. La copia della Collez. Bianconi n. 233 (File B0012901-3) è montata su tela a stacchi in foglio unico; quella dell'inv. gen. è in tre fogli con orografia a colori. La carta si estende dalle foci del Po al Tronto sull'Adriatico; ad ovest si limita al confine dello Stato Pontificio; sul Tirreno comprende il tratto costiero Porto Ercole –T. d.a Cerva. L'orografia è rappresentata con tratteggio. Gli abitati principali sono rappresentati in pianta con distinzione degli arcivescovadi, vescovadi, città, terre, ecc. E' tracciata la rete stradale. In alto a destra trovasi una notizia in cui gli A.A. spiegano la formazione della carta. A sinistra una tavola dei nomi in latino di alcune città, castelli e fiumi. Sotto il titolo la dedica a Papa Benedetto XIV. Dieci scale grafiche in varie antiche misure di città italiane, in leghe di Francia e in miglia d'Inghilterra. Cfr. MORI A. La cartografia ufficiale in Italia e l'I.G.M., pagg. 74-78. Il n. 4253 d'inventario (File B0002446-B0002447-B0002448-B0002449), consta di quattro tavole, finemente scolpite nella Calcografia Camerale, riferentisi ai lavori di triangolazioni eseguiti dal 1750 al 1753 dal Padre Boscovich ed agli strumenti da lui usati.

Come si evince anche dalla descrizione del primo foglio di questa carta, a fondamento della stessa, si ha la misura di un arco di meridiano tra Roma e Rimini, e conseguentemente l’istituzione e la misura di una rete di triangolazione, dimensionata dalla misura di una base geodetica, sita lungo la via Appia da Capo di Bove (cui si riferisce l’immagine di Fig. I.7) alle Frattocchie, misurata e rimisurata rispettivamente dai P.P. Ruggero Giuseppe Boscovich (nel 1751) ed Angelo Secchi.

Le successive figure I.8 e I.9 completano le informazioni date, riportando rispettivamente:

- un particolare della carta stessa, dove gli autori dedicano la carta al sommo pontefice d’allora, Papa Benedetto XIV (al secolo, Prospero Lorenzo Lambertini, di famiglia senatoria bolognese e già cardinale a Bologna, illuminista e capace di un compromesso con il giansenismo);
- la copertina di un libro coevo, pubblicato a Venezia (con Ferrara ed Amsterdam, una della principali piazze editoriali dell’epoca) ed inerente la geografia storico – politica dello Stato della Chiesa, arricchita di notizie sull’origine dei vari stati dell’agricoltura, commercio, arti, stabilimenti scientifici, finanze, forza militare, adorna di carte geografiche, ecc.

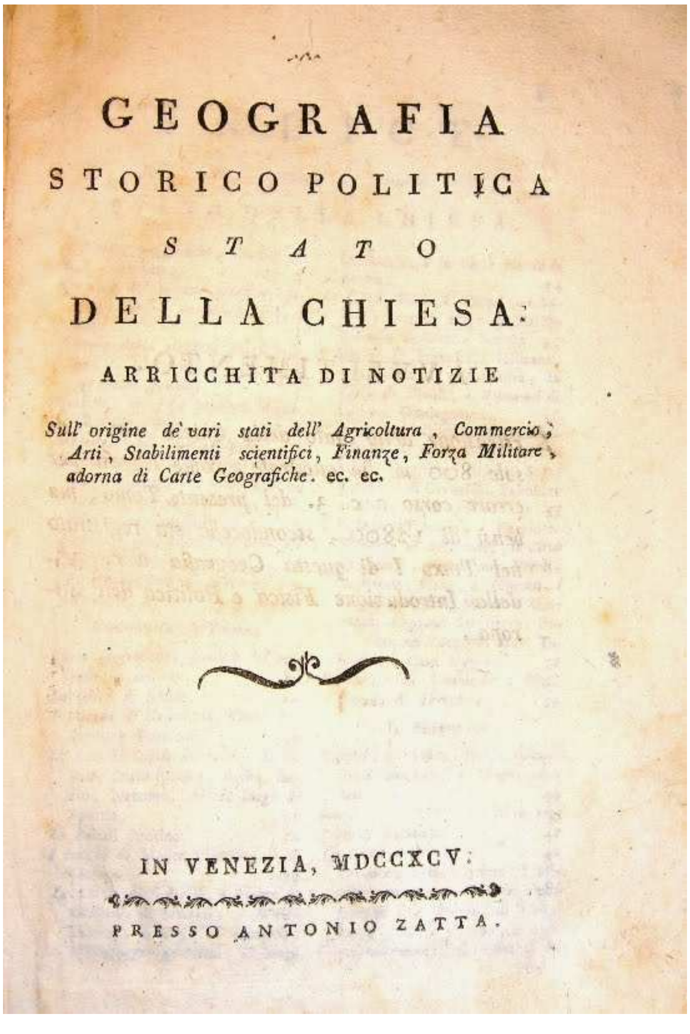
La citazione di un libro coevo (Geografia storico politica Stato della Chiesa*,* edito nel 1795 a Venezia, presso Antonio Zatta, di cui si riporta qualche estratto) non è casuale, perché dà l’occasione di riportare quanto in esso è descritto circa la geografia dello Stato Pontificio, così come si può dedurre proprio dalla nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico che, pubblicata nel 1755, è importante, oltre per i suoi meriti scientifici e tecnici, anche per il miglioramento delle conoscenze dei luoghi.


NUOVA
CARTA GEOGRAFICA DELLO
STATO ECCLESIASTICO
Alla Santità di N.S.
PAPA BENEDETTO XIV
MARE
MEDITERRANEO
PATRIMONIO
DI S. PIETRO
SABINA
CAMPAGNA DI ROMA
DI
NAPOLI

Fig. I.6 – Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico delineata dal P. Cristoforo Maire D.A C.A di Gesù sulle comuni osservazioni sue e del P. Ruggero Giuseppe Boscovich. D.A Med.A C.A. – Foglio 1 (riportato di traverso nella pagina precedente)

Fig. I.7 – Estremo della base geodetica sita lungo la via Appia da Capo di Bove (cui si riferisce l'immagine) alle Frattocchie misurata e rimisurata rispettivamente dai P.P. Ruggero Giuseppe Boscovich ed Angelo Secchi nell'ambito della misura dell'arco di meridiano terrestre tra Roma e Rimini [9]

[9] Le prime misure di archi di meridiano sono proprie di quella epoca; così nel nord Italia, in Piemonte, P. Giovanni Battista Beccarla misura un arco di meridiano tra Mondovì ed Andrate, su proposta dello stesso Boscovich, mentre poco più tardi, in Francia, Pierre François André Méchain e Jean-Baptiste Delambre misurano un arco di meridiano tra Dunkerque e Barcellona. Misure di archi di meridiano sono parte anche di due spedizioni di astronomi e geodeti francesi, in Lapponia e Perù, per determinare i parametri dell'ellissoide di rotazione terrestre. Circa cinquanta anni più tarda, è invece la prima misura di un arco del parallelo di grado 45°, da Bordeaux a Cernauti (sul Mar Nero). Nel tratto italiano, tra il Moncenisio ed il Monte Maggiore (sopra Trieste), tra gli altri, operano Giovanni Antonio Amedeo Plana e Francesco Carlini.



GEOGRAFIA
STORICO POLITICA
STATO
DELLA CHIESA:
ARRICCHITA DI NOTIZIE

Sull' origine de' vari stati dell' Agricoltura, Commercio, Arti, Stabilimenti scientifici, Finanze, Forza Militare, adorna di Carte Geografiche. ec. ec.

IN VENEZIA, MDCCXCV.

PRESSO ANTONIO ZATTA.

Fig. I.8 – Particolare / Fig. I.9 – Libro coevo

Lo Stato della Chiesa, o sia il Dominio Secolare del Pontefice Romano è stato disegnato in varie Carte. Quella che Tobia Maier per mezzo degli Eredi di Homann diede alla luce nel 1748, è molto utile. La migliore però è quella, che fu disegnata dal Gesuita Cristoforo Maire, e corretta da Ruggiero Giuseppe Boscovich parimente Gesuita, il quale si regolò secondo le più esatte misure, e Astronomiche osservazioni. Essa e composta di 3 fogli, e costa 45 baiocchi a Roma. … Questa carta è stata delineata dal P. Cristoforo Maire della Comp. di Gesù, e ricavata dalle osservazioni fatte da esso insieme col P. Ruggiero Gius. Boscovich della medesima Compagnia. L'occasione è stata quella di misurare un grado di Meridiano per confrontarlo cogli altri misurati altrove dagli Accademici dell'Accademia reale di Francia, e ricavarne ulteriori notizie sulla figura della Terra. Dovendosi prendere molte misure esattissime con istrumenti grandi di qua e di là dal Meridiano di Roma, che va verso Rimini, ebbero l'ordine i suddetti due PP.dalla Santità di Benedetto XIV, che per consiglio del Card. Valenti Segretario di Stato e Camerlengo ordinò tutta questa impresa, e l'appoggiò a' medesimi, di scorrere di qua e di là per lo Stato, e rettificare la Carta Geografica del medesimo, eseguendo essi sotto i di lui auspici, e coll'aiuto della sua Sovrana Autorità e Munificienza, e colla protezione e vigilanza del medesimo Cardinale. Quindi non è stata loro incombenza di formare un'esatta Carta topografica delle parti minute dello Stato Pontificio, cosa che avrebbe richiesto gran quantità di gente e molti anni, ma di rettificare le Geografia generale di esso. Questo fine si è ottenuto e si sono corretti infiniti sbagli di tutte le carte fin'ora uscite. Si ritrovano in questa Carta poste al luogo loro tutte le Città, quasi tutte le Terre, e la maggior parte de' Castelli [10], ad altri luoghi compresi nello Stato medesimo senza pericolo dello sbaglio di un minuto nella loro positura, essendo stati trigonometricamente determinati colla maggiore diligenza possibile [11]. In tutto il Lazio appena vi sono sei, o sette luoghetti, i quali non sieno stati colla Trigonometria immediatamente determinati. Pochi più ve ne saranno nel Patrimonia di San Pietro, alcuni nella Sabina, e nella Marca quasi que' soli, che confinano colle montagne. Tra le montagne molti hanno sfuggita anche la vista, o pel loro sito, o per le continue nebbie e caligini. Per non lasciare priva la Carta di questi, non trovandosi sicurezza alcuna nelle carte fin qui ora pubblicate, si sono fatte fare delle osservazioni da persone capaci sulli luoghi ben determinati nel loro giro, per determinarli. Oltre a' luoghi così determinati con tutta sicurezza, se ne sono posti nella Carta molti altri meno sicuri, benché anche questi non presi comunque dalle carte, ma da' documenti, che pareva potessero assicurare, non discostarsi essi molto dal sito loro assegnato. Questi luoghi sono stati nella Carta contrassegnati generalmente con una lunetta messa loro accanto. Nella parte alpestre delle Legazioni di Bologna, e della Romagna, cioè dal fiume Savio fino al Modenese, le circostanze non permisero l'osservare in persona quel tratto di paese, in cui per altro non vi è alcuna Città, né fu possibile il ritrovare in que' contorni il supplemento delle altrui osservazioni. Questo tratto di paese si è preso da quelle carte, che si stimarono meno difettose. In questo tratto per non replicare tante volte il segno dovuto a' luoghi non determinati con certezza, si avvisa qui una volta, che esso si deve sottintendere quasi in tutti. Nella Legazione di Ferrara de' luoghi più piccoli pochi sono stati immediatamente veduti da due luoghi per ben determinarli. Gli altri si sono pure presi dalle carte migliori, fra le quali ha servito anche una carta manoscritta presentata ultimamente a N.S. dal P. Ippolito Sivieri della medesima Compagnia, Professore di Matematica in Ferrara. Una carta particolare del Peruginonon ancora pubblicata, un'altra di Camerino, ed una terza pubblicata colla stampa alcuni anni addietro, che contiene la pianura del Bolognese, e fatta dallo stesso Autore, che ha fatta quella del Perugino, hanno dato campo d'inserire in questa parecchi luoghi non osservati immediatamente, ma ben sicuri nella loro posizione. In tutte queste però la posizione della Meridiana determinata dagli Autori loro colla Calamita ha avuto bisogno di correzione. E convenuto pure stirare alquanto la Carta del Perugino, tanto perché si conformasse coll'esatta delineazione del Corso del Tevere cavata dagli autentici pubblici documenti, quanto perché combinasse bene col sito di Perugia, e di Todi ora esattissimamente determinati co' quali non combinava con esattezza bastante, dovunque abbia avuto origine questo suo sbaglio. Questo si appartiene alla Geografia dello Stato. In ordine alle cose più minute, e che più appartengono alla Topografia, gli Autori non si impegnano punto. La forma delle città è puramente arbitraria, non essendosi presa alcuna misura sul contorno delle loro mura. I confini tanto di tutto lo Stato quanto de' Territori sono stati messi per lo più puramente a occhio, essendovene molti anche litigiosi e incerti. In pochi paesi si sono trovati delineati autentici, e ben distinti. Le strade si son lasciate, toltene quelle delle poste, e in queste i siti delle poste medesime sono stati ben determinati quasi tutti, la curvatura delle strade di mezzo si è messa arbitraria. Il corso de' Fiumi si è preso per lo più dalle carte, che si sono giudicate le meno cattive, toltone il Tevere dalla Fratta di Perugia in giù, il Teverone, quelli che attraversano la pianura del Bolognese, e alcuni altri pochi, de' quali si è avuto il corso esattamente delineato. Della Legazione di Urbino si forma ora una carta più particolare e più esatta anche in varie sue minuzie, che si darà pure alle stampe. La longitudine è computata giù dall'Isola di Ferro [12] al solito, e la direzione de' Meridiani si è determinata coll'ultima esattezza. Un grado di meridiano di mezzo tra Roma

[10] A riguardo, curiosa è la doppia indicazione di Frascati e Tusculum.

[11] La carta è corredata da una Tavola de' Nomi antichi di alcune Città e di alcuni Castelli e Fiumi (a riguardo, si vedano le figure I.10 e I.11).

[12] L'Isola del Ferro è una dell'arcipelago delle Canarie, approssimativamente 20° ad ovest di Parigi. Fissare l'origine della longitudine a Greenwich è una decisione presa solo nel corso dell''800.

e Rimini si è trovato di miglia Romane moderne 74, e passi 566 contenendo ogni miglio passi 1000, ogni passo piedi 5 e ogni piede once 16 di passetto di palmo Romano da Architetto che ne contiene 12 [13].

La Fig. I.12 riporta una Tavola grafica di conversione tra unità di misura lineari, contenuta nella stessa “nuova” carta geografica dello Stato Pontificio e dà l’occasione per parlare del problema della conversione delle unità di misura che, complesso nel ‘700, a fronte di varie e differenti unità di misura in uso, diventa importante nella prima metà dell’‘800, quando occorre convertire questi sistemi nel nuovo sistema metrico decimale. Infatti fino all’inizio del ‘900, non sono ancora disponibili mezzi meccanici per l’esecuzione di moltiplicazioni e divisioni. Pertanto lasciati da parte abachi e regoli, data la scarsa precisione ottenibile, per l’esecuzione di moltiplicazioni (o divisioni), si procede passando ai logaritmi dei fattori (o del dividendo e del divisore), facendo poi la loro somma (o la loro differenza) ed infine ricavando, a rovescio, dal logaritmo ottenuto il prodotto (od il quoziente). Quanto laboriosa sia un’operazione del genere è del tutto evidente, soprattutto quando è necessario procedere all’esecuzione di lunghe sequenza, come usuale nei calcoli astronomici, geodetici e cartografici. Tutto ciò accresce i meriti di Boscovich e della Scuola di Milano che da lui origina, perché capaci, con il calcolo, di fondere teorie matematico-statistiche e pratica delle misure.

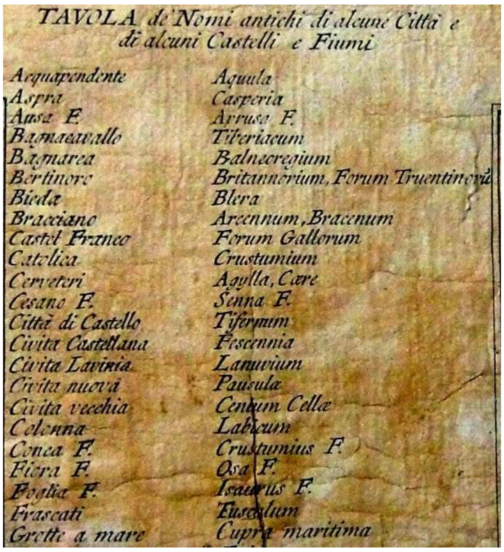
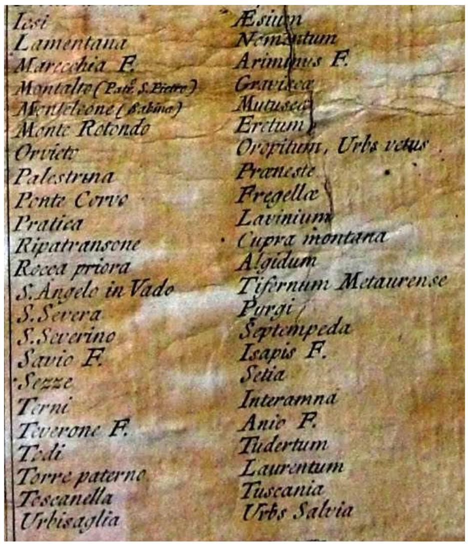


TAVOLA de' Nomi antichi di alcune Città e di alcuni Castelli e Fiumi

Acquapendente	Aquula
Aspra	Casperia
Ausa F.	Arrusa F.
Bagnacavallo	Tiberiacum
Bagnarea	Balneoregium
Bertinoro	Britannorium, Forum Truentinorum
Bieda	Blera
Bracciano	Arcennum, Braccenum
Castel Franco	Forum Gallorum
Catolica	Crustumium
Cerveteri	Agylla, Care
Cesano F.	Senna F.
Città di Castello	Tifernum
Civita Castellana	Fescennia
Civita Lavinia	Lanuvium
Civita nuova	Pausula
Civita vecchia	Centum Cellæ
Colonna	Labicum
Conca F.	Crustumius F.
Fiora F.	Osa F.
Foglia F.	Isaurus F.
Frascati	Tusculum
Grotte a mare	Cupra maritima

Fig. I.10 – Tavola dei nomi



Iesi	Æsium
Lamentana	Nomentum
Marecchia F.	Ariminus F.
Montalto (Patr. S. Pietro)	Gravisca
Monteleone (Sabina)	Mutusca
Monte Rotondo	Eretum
Orvieto	Oropitum, Urbs vetus
Palestrina	Præneste
Ponte Corvo	Fregellæ
Pratica	Lavinium
Ripatransone	Cupra montana
Rocca priora	Algidum
S. Angelo in Vado	Tifernum Metaurense
S. Severa	Pyrgi
S. Severino	Septempeda
Savio F.	Isapis F.
Sezze	Setia
Terni	Interamna
Teverone F.	Anio F.
Todi	Tudertum
Torre paterno	Laurentum
Toscanella	Tuscania
Urbisaglia	Urbs Salvia

Fig. I.11 – Tavola dei nomi (seguito)

[13] Nella innegabile babele delle unità di misura, in uso prima dell’adozione del sistema metrico decimale, lo stesso testo precisa: Questo passo Romano sta alla tesa di Francia come 29710 a 38880, onde questo grado contiene tese di Francia 56979.

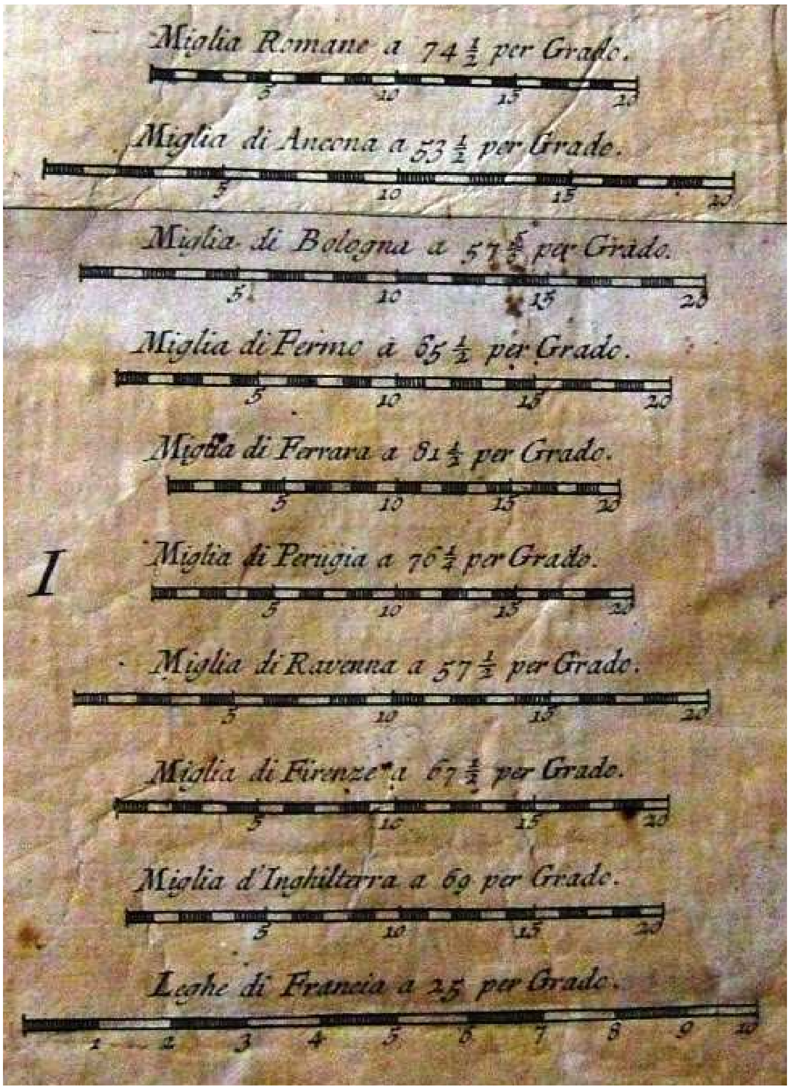


Fig. I.12 – Tavola grafica di conversione tra unità di misura lineari

PARTE II – LA SCUOLA DI MILANO

Alcuni contributi dei successori di Boscovich

La storia della scienza e della tecnica, come quella del pensiero, delle lettere e delle arti, non è la storia di grandi uomini isolati, ma quella di desideri, ricerca ed attese, dove grandi scoperte ed invenzioni nascono, a volte, dopo tanti ostinati tentativi ed altre volte anche per caso, comunque in un clima loro propizio. In questa ottica, anche la Scuola di Milano origina da Boscovich [14], continua e si consolida, per le attese della comunità scientifica e le necessità tecniche della società sua contemporanea.

Alcuni importanti contributi dei successori di Boscovich sono datati a partire dai suoi anni fino agli anni '20 dell''800. A riguardo, buona parte delle notizie sono ricavate dagli *Acta excerpta*, compilati dall'astronomo Roberto Stambucchi, su incarico di Francesco Carlini (allora direttore dell'Osservatorio Astronomico di Brera), e tuttora conservati nell'Archivio (storico) dell'Osservatorio Astronomico. A complemento degli *Acta*, un indice cronologico, per fondi, dà precise informazioni su tutto il materiale dell'archivio.

[14] Tra i successori di Boscovich, sono qui citati solo gli allievi diretti Angelo De Cesaris e Francesco Reggio, ed i loro diretti successori Barnaba Oriani e Francesco Carlini, ben sapendo che la struttura della Specola di Brera vede altre presenze e collaborazioni.

Una delle opere monumentali, iniziata dal De Cesaris e dal Reggio, e continuata poi dall'Oriani, fino all'interruzione delle operazioni di rilevamento, imposta dall'autorità militare francese, durante il periodo napoleonico, è la formazione della carta topografica del Milanese e Mantovano, estesa poi alla Lombardia orientale, non più appartenente alla Repubblica Serenissima di Venezia, a seguito del successo della prima campagna napoleonica.

La formazione di questa carta, di certo non a volo d'uccello, come quella coeva della Repubblica di Venezia, rilevata dal geografo Giovanni Antonio Rizzi Zannoni, necessita di una triangolazione, estesa a tutto il territorio, interessato dal rilevamento, dimensionata su una base misurata (lungo il Ticino, presso l'attuale aeroporto della Malpensa) e sviluppata sul primo triangolo. Alcuni calcoli ritrovati dimostrano, in modo inequivocabile, il raggiungimento di una determinata precisione del rilevamento.

Infatti la suddetta precisione, espressa in termini di chiusura di triangoli e compresa fra ¼ ed ⅓ di secondo sessagesimale, è eccellente (e comparabile con le precisioni odierne). Resta da osservare come la sola misura della base (lunga circa dieci chilometri) comporti un lavoro di oltre sei mesi. Comunque il risultato finale è una carta topografica accurata [15], confrontabile con l'estratto dalla carta ufficiale dell'I.G.M., alla scala 1:100.000.

Un'altra opera monumentale, simile a quella condotta da Boscovich, con la misura di un arco di meridiano, è la misura di un arco del parallelo di grado 45°, da l Moncenisio al Monte Maggiore (sopra Trieste), ad opera di Carlini, negli anni '20 dell''800. Dato che l'ellissoide terrestre è di rotazione, la misura della longitudine coincide con una misura di tempo, fatta di notte con gli orologi a pendolo, a seguito di luminarie sui monti circostanti la pianura padana (allora completamente buia).

Per completare questa opera sono necessarie misure di gravità (che correggono deviazioni della verticale, dovute al campo anomalo del potenziale gravitazionale terrestre), a loro volta, fatte con apparati pendolari di cui si conosce, con esattezza, la lunghezza dell'asta. Per questo motivo, il Carlini effettua la taratura di un pendolo semplice con il metodo dei minimi quadrati [16], nel 1825, cioè solo quattro anni dopo la pubblicazione del metodo, da parte di Gauss.

Un'opera complementare è invece il rilevamento di paesaggi e panorami [17], nonché la misura della quota di monti, torri e campanili, per via trigonometrica [18]. Infatti la carta topografica del Milanese e Mantovano ha

[15] Fa eccezione la parte svizzera del lago Maggiore, forse solo rilevata ad occhio, da monti italiani sopra Luino. Del resto, è depositato presso il sopraccitato Archivio (storico) dell'Osservatorio Astronomico un permesso di solo transito, concesso dal Consiglio ristretto del Canton Ticino all'abate Oriani. Una seconda nota d'interesse evidenzia il confine settentrionale della Lombardia d'allora al Forte di Fuentes, presso Colico, essendo la Valtellina e la Valchiavenna possesso legale del Canton Grigioni, dalla caduta del Ducato di Milano fino alla prima campagna napoleonica (successivamente queste valli, entrate a far parte della Repubblica Cisalpina e del Regno d'Italia, sono confermate nel Lombardo-veneto austriaco, nonostante legittime pretese svizzere al Congresso di Vienna).

[16] Notevole è anche l'ordine con cui il calcolo è presentato, quasi fosse un moderno foglio elettronico, così come Gino Cassinis, professore di geodesia e topografia al Politecnico di Milano, circa cento anni dopo e comunque prima dell'avvento dei calcolatori elettronici, illustra sul suo libro (Cassinis G.: Calcoli numerici grafici e meccanici. Mariotti Pacini, Pisa, 1928) la soluzione numerica di un'equazione di terzo grado.

[17] Tra questi, il panorama antico delle montagne di Lecco, rilevato verosimilmente da Giuseppe Bovara, nei primi anni dell''800, e conservato nelle carte del Carlini, nel fondo omonimo dell'Archivio (storico) dell'Osservatorio Astronomico di Brera, è il più grande (e forse il più bello) dei panorami conservati. Rilevato direttamente su un foglio da disegno, con una camera lucida (un'antesignana della macchina fotografica), proprio per questo motivo, ha precise proprietà metriche che un disegno, a mano libera, non potrebbe avere. Per poter verificare/confermare questa affermazione/ipotesi è presentato anche il panorama fotografico delle montagne di Lecco (rilevato di recente) che, elaborato e confrontato con il panorama antico, evidenzia differenze comprese tra uno e due millimetri, in entrambe le direzioni del foglio. Questi numeri confermano benissimo l'affermazione/ipotesi precedente, tenuto anche conto che oltre duecento anni sono ormai passati ed il foglio da disegno, per quanto ottimamente conservato, non è certo un supporto indeformabile.

[18] Schizzi di panorami mostrano rilevamenti effettuati durante le campagne d'infittimento della rete di triangolazione, sempre corredati da monografie della cima di monti e di torri (e campanili), allo scopo di individuarne rispettivamente l'esatta posizione planimetrica ed il

solo un disegno dell'altimetria a sfumo, mentre con i suddetti rilevamenti e misure, l'altimetria diventa una componente metrica della cartografia, completandola bene non solo quantitativamente, ma anche, da un punto di vista tematico, qualitativamente.
Una seconda opera complementare, eseguita antecedentemente dal De Cesaris, è la costruzione della linea meridiana, nel Duomo di Milano (disposta lungo tutta la prima campata, perpendicolarmente alla cinque navate della cattedrale), al fine di determinare il momento del mezzogiorno, con l'esattezza di qualche secondo. Essa è presentata nell'Appendice alle Effemeridi di Milano, contenenti l'articolo del De Cesaris, e spiegata nel Registro giornale dell'orologio alla francese ed all'italiana [19].

Un pensiero conclusivo sottolinea come gli uomini, fin dalla preistoria, abbiano desiderato redigere mappe dei territori popolati, come dimostra la seppure controversa Pietra Dashka (Fig. II.1), di recente, ritrovata nella regione dei Monti Urali meridionali, e misurare il tempo, dal mondo antico anche con mezzi tecnologici, come sembra testimoniare la macchina di Antikythera (figure II.2 e II.3), un reperto archeologico d'epoca ellenistica, ritrovato all'inizio del '900, in mare, a sud del Peloponneso.
Tutto ciò indice a guardare, con grande stima e rispetto, il contributo dato da Ruggero Giuseppe Boscovich e dalla Scuola di Milano allo sviluppo delle conoscenze geodetiche e cartografiche, della loro epoca ed oltre, ben sapendo che queste discipline, insieme all'astronomia, hanno fortemente contribuito al progresso delle scienze, nel loro complesso, a partire dai progressi della matematica, della matematica applicata (compresa la statistica), della fisica matematica e della fisica sperimentale.

Fig. II.1 – Pietra Dashka

piano di paragone. A riguardo, le Appendici alle Effemeridi di Milano contengono due articoli dell'Oriani sulle determinazioni trigonometriche.
[19] La meridiana solare del Duomo di Milano ha lo gnomone nella copertura sul lato sud della stessa, con il piede sottostante nella prima navata – prima campata, e risale sulla parete nord, oltre la quinta navata – prima campata, per qualche metro. Questa meridiana, tuttora funzionante, è ripristinata da Luigi Gabba (astronomo e direttore dell'Osservatorio Astronomico di Brera), nel 1921, ed ulteriormente verificata, nel 1976.

Fig. II.2 – Macchina di Antikythera – Frammento del meccanismo
(Museo archeologico nazionale, Atene)

Fig. II.3 – Ricostruzione del sofisticato meccanismo [20] (Museo archeologico nazionale, Atene)

[20] Il sofisticato meccanismo planetario, mosso da ruote dentate, serve per calcolare il sorgere del sole, le fasi lunari, i movimenti dei cinque pianeti allora conosciuti, gli equinozi, i mesi dell'anno ed i giorni della settimana.

Collaborazione o competizione

La storia della Scuola di Milano non è esente da contraddizioni e contrasti, anche profondi. Tuttavia la stessa è sempre capace di mostrare punte d'eccellenza, vere e proprie, testimoniate maggiormente dalla feconda collaborazione esistente che da un'accanita competizione, dentro e fuori la stessa. In questo contesto, la collaborazione contribuisce al consolidarsi dei paradigmi del fare scienza, sia nei lunghi periodi di scienza normale, che nei momenti di una rivoluzione scientifica innovativa [21].

Una scienza deve descrivere il proprio oggetto quale esso effettivamente è non prescrivere come esso dovrebbe o non dovrebbe essere, in base ad alcuni giudizi specifici di valore (Hans Kelsen, giuspositivista austriaco: ebreo ed esule, dalla Germania, in Svizzera, poi in Cecoslovacchia ed infine negli USA).

In questo contesto, un pensiero importante va al valore della collaborazione [22], capace di far superare dubbi, incertezze ed errori, personali e/o di gruppo, laddove invece la competizione lascia ciascuno del tutto solo a combattere battaglie, spesso inutili ed inconcludenti. Infatti dubbi, incertezze ed errori sono casi tipici e caratteristici della ricerca e, in particolare, della ricerca scientifica e tecnologica, così come di ogni attività umana, in generale.

Un pensiero aggiuntivo riguarda non solo la stima che ciascuno deve sapersi meritare, ma il rispetto che deve essere accordato a tutti. E' compito precipuo di chi è più avanti e/o sta più in alto costruire gli spazi, i tempi ed i modi, affinché chi è più indietro e/o chi sta più in basso possa avere a disposizione e fruire, con profitto, delle opportunità e dei mezzi necessari per affrontare la propria crescita (e tutto ciò è maggiormente esigibile da chi ha avuto e fruito delle migliori occasioni).

Se non avessimo imparato dal marxismo a vedere la storia dal punto di vista degli oppressi, guadagnando una nuova, immensa prospettiva sul mondo umano, non ci saremmo salvati. O avremmo cercato riparo nell'isola dell'interiorità o ci saremmo messi al servizio dei vecchi padroni (Norberto Bobbio).

Il discorso s'allarga e chiede cosa ben significhi una competizione esasperata, incapace di confronto, tranne subire revisioni cieche, avulse dal contesto intimo della ricerca. Quando un qualsiasi trucco, ben nascosto e sorvolato, fa guadagnare tempo prezioso, contro tanto tempo e fatica, come sarà possibile sconsigliare chi deve crescere e farsi strada dal rischiare, giocando d'azzardo. Tutto ciò risponde alla logica della finanza d'assalto del turbo capitalismo, ma è certamente la fine della ricerca.

Può sembrare paradossale, ma tutto ciò nasce proprio dal aver posto il valore della competizione che, a piccole dosi, è certamente benvenuta, al posto di quello della collaborazione che è strutturalmente debole e viene subito meno, quando non è ben protetta. Allora non essendo possibile controllare tutto, quasi come un'inquisizione moderna, occorre inventare strumenti "meccanici", sempre più sofisticati, per costruire giudizi di valore che la collaborazione farebbe scaturire da sé, anche con una serena auto-valutazione.

Stanno cercando in tutti i modi di distruggere la cultura. Ma il vero massacro non è il tenere in disparte persone … che comunque hanno avuto la loro storia, ma condannare i giovani al silenzio, mortificandone la creatività. C'è chi … è rimasto alle barzellette e non ha capito che il mondo è … avanti (Dario Fo).

[21] Il consolidarsi dei paradigmi del fare scienza avviene solitamente nei lunghi momenti di scienza normale, spesso oscuri, ma veramente importantissimi proprio per il consolidarsi della scienza stessa, e talvolta nei periodi, improvvisi ed imprevisti, di una rivoluzione scientifica innovativa che, modificando alcuni paradigmi, dà l'avvio ad un nuovo periodo di scienza normale.

[22] Chi scrive non ha ovviamente memoria di collaborazioni troppo lontane, ma conosce bene tanto la storia, raccontatagli dal compianto Prof. Cunietti, circa la collaborazione intercorrente nei progetti europei dell'OEPEE, quanto l'esperienza, direttamente sperimentata, nelle attività dei Gruppi di lavoro e di studio della SIFET e dei WG's delle Commissioni Tecniche dell'ISPRS.

Due quadri (figure II.4 e II.5) commentano bene il clima che permette la crescita della cultura, dalla scienza alla tecnica e dalle lettere alle arti, con il gioco dei bambini ed il mondo delle donne. Infatti il primo origina nel disordine e giunge, per la sua riuscita, ad un proprio ordine, non dato a priori, né definito una volta per tutte. Invece il mondo delle seconde deve poter essere presente affianco a quello degli uomini, non separato, né confuso, sullo stesso piano di parità e con tutto il riguardo dovuto a possibili e concrete minorità [23].

Fig. II.4 – Pieter Bruegel il Vecchio, Giochi di fanciulli (Kunsthistorisches Museum, Vienna)

Fig. II.5 – Michelangelo Merisi da Caravaggio, Madonna dei Pellegrini
(Basilica di Sant'Agostino in Campo Marzio, Roma)

[23] In particolare, una donna ha il pieno diritto di essere giovane e bella, e di presentarsi tale, senza che le si manchi mai di rispetto e senza chiederle (od addirittura pretendere da lei) condizioni di minorità e/o mortificazione. Allora una madonna, con un bambino piccolo in braccio, è lontanissima da un sua falsa immagine, più tarda, velata ed angelica, che la estranea dal vero mondo delle donne.

Pertanto pur non nascondendo alcune difficoltà, intercorse negli ultimi anni, quanto segue vuole presentare un elenco sintetico delle varie attività in corso, sottolineandone la piena aderenza ai principali dettami delle più importanti associazioni scientifiche internazionali. Inoltre spinte, originali ed innovative, in alcuni settori di nicchia, come pure in ambiti interdisciplinari di confine tra varie aree di ricerca, diverse e lontane tra loro, completano positivamente l'elenco proposto [24].
L'area Rilevamento del Politecnico di Milano si occupa dell'insieme delle discipline inerenti:

- il rilevamento;
- il controllo;
- l'elaborazione;
- la restituzione,

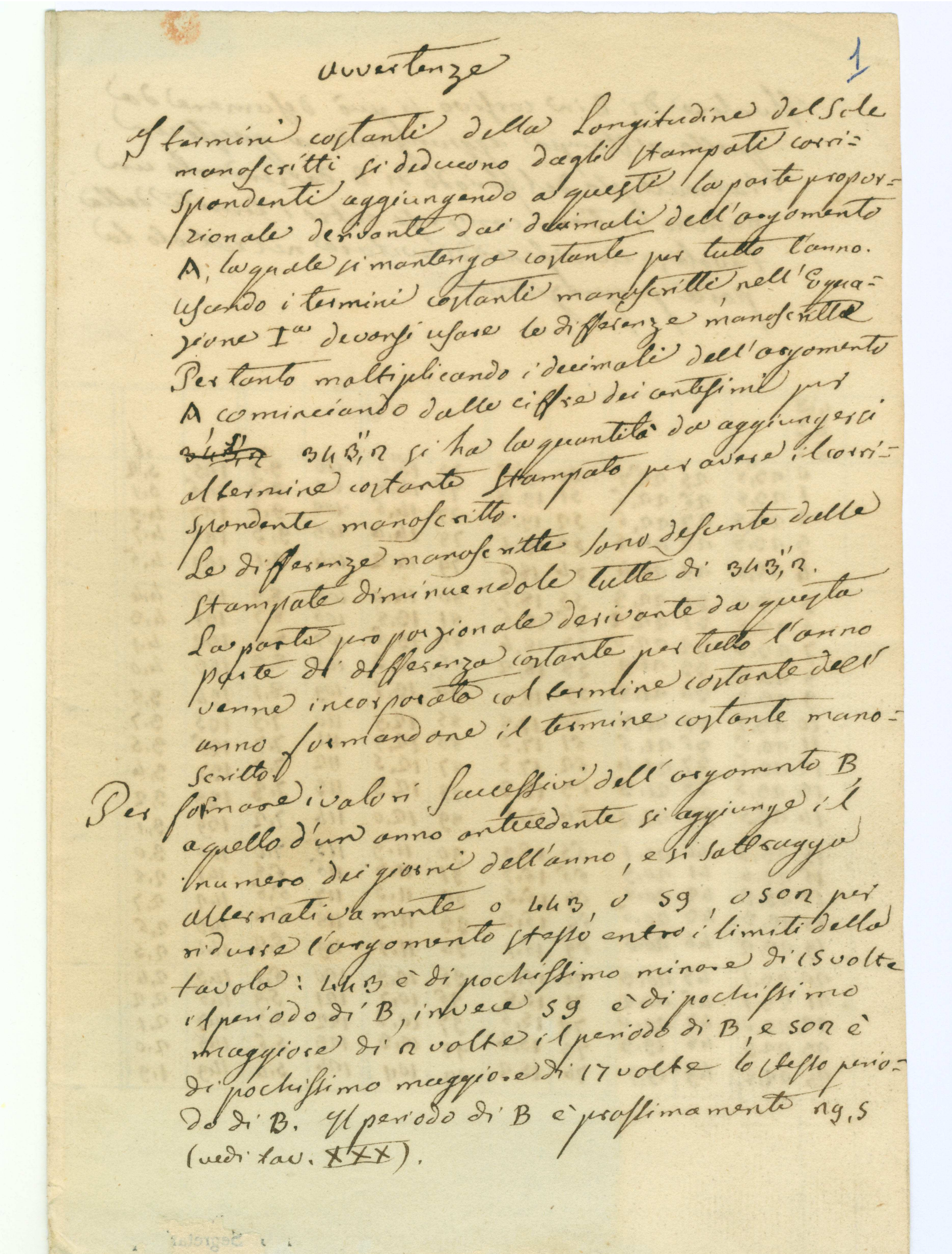
di dati metrici e/o tematici, a referenza spaziale, variabili nel tempo e non. Queste discipline comprendono:

- l'ingegneria geodetica (inclusa la geodesia spaziale);
- le misure geodetiche e la navigazione (spaziale, aerea, marittima e terrestre);
- la topografia (per il rilevamento);
- la topografia di precisione (per il controllo);
- la fotogrammetria (dallo spazio, aerea e terrestre);
- la fotointerpretazione (d'immagini, sequenze e mappe);
- il telerilevamento (incluso il cosiddetto *proximal sensing*);
- la cartografia numerica (tecnica e tematica);
- i Sistemi Informativi Territoriali;
- il trattamento delle osservazioni;
- la geomatica.

Per loro natura, queste discipline sono a servizio e supporto di altre; pertanto applicazioni in tutti i campi dell'Ingegneria e dell'Architettura, delle Scienze e dell'Agraria, ma anche in molte altre aree scientifico – disciplinari, sono oggetto d'interesse e di studio.
Spinte multidisciplinari sono da segnalare nell'interazione attiva tra la geodesia e la geofisica / geochimica, nei contatti della fotogrammetria terrestre e la topografia di precisione con il restauro e la storia dell'arte, come pure del telerilevamento con le scienze naturali ed ambientali. A tutto ciò, va aggiunto l'incontro recente tra la geomatica e le scienze umane, a partire dalla sociologia della comunicazione e dalla linguistica, per giungere alla storia della scienza e della tecnica, ed alla filosofia della scienza.
Al termine di questo pregevole elenco, non è possibile augurare altro, alla Scuola di Milano, tranne sapere e poter continuare, almeno per un periodo altrettanto lungo, con la stessa qualità ed eccellenza. Non è bene coprire profonde/i contraddizioni e contrasti, tuttora esistenti, ma la forza della Scuola di Milano è proprio la capacità di esservi superiore. Chi scrive è sicurissimo che la suddetta scuola saprà trovare in se stessa, le forze necessarie, per proseguire al meglio.

[24] Documenti ufficiali del Politecnico di Milano testimoniano quanto qui affermato, relativamente alle attività tipiche dell'intero settore scientifico-disciplinare, mentre le aggiunte, originali ed innovative, sono storia nuovissima e certamente un nuovo "fiore all'occhiello".

A supporto, si allegano due immagini provenienti dall'Archivio Capitolare Paolo Angelo Ballerini di Seregno, dove è depositato il testamento di Francesco Carlini e quattro suoi fogli autografi (figure II.6 e II.7), contenenti indicazioni sul trattamento di dati astro-metrici, relativi al sole, ed alcune misure effettuate con loro elaborazioni. L'importanza di questi documenti va oltre il loro contenuto, perché scritti da un Carlini, ormai anziano, posto di fronte al passaggio dal Lombardo – Veneto austriaco al nuovo Regno d'Italia.

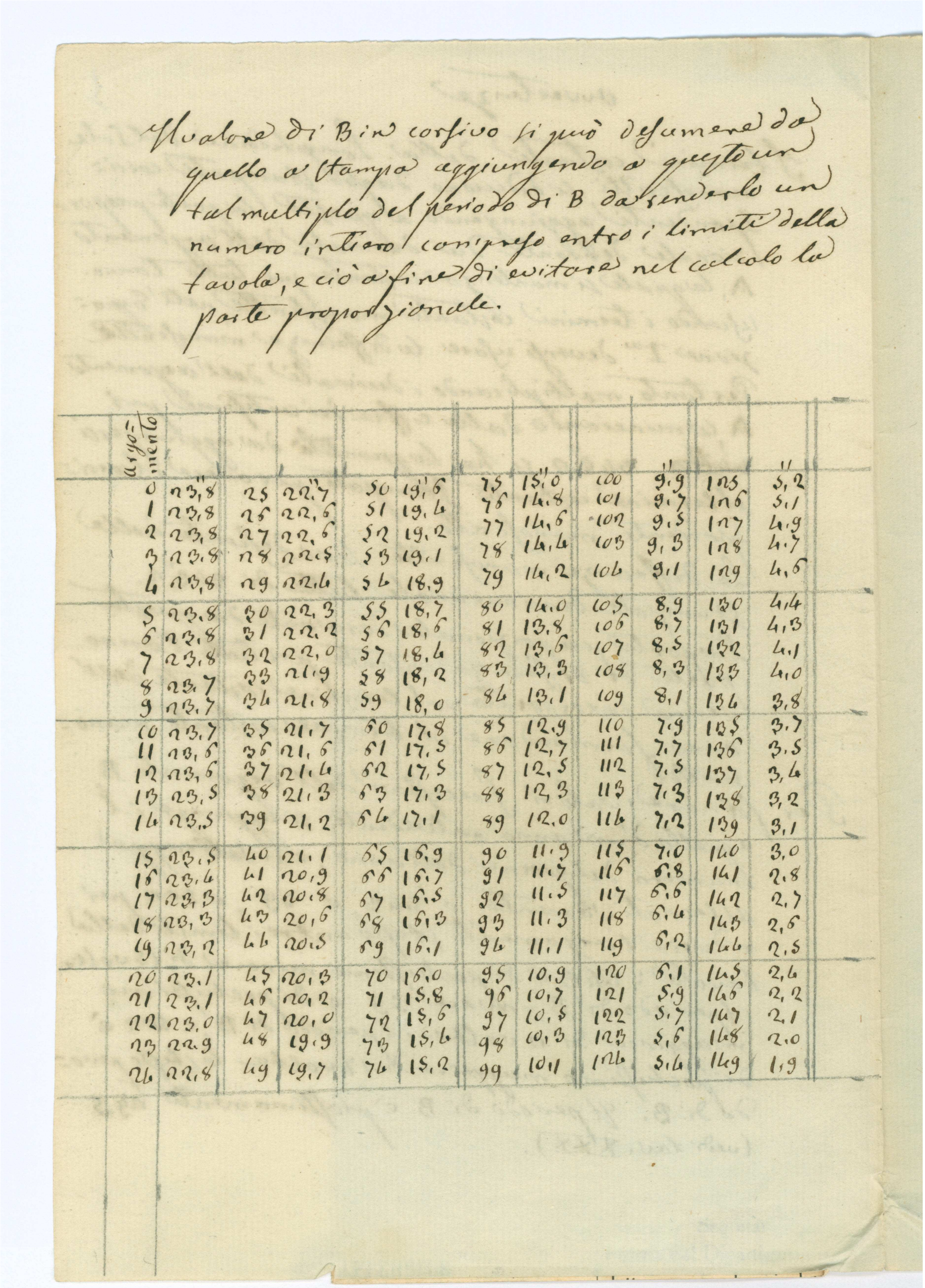


1

avvertenze

I termini costanti della Longitudine del Sole
manoscritti si deducono dagli stampati corri=
spondenti aggiungendo a questi la parte propor=
zionale derivante dai decimali dell'argomento
A, la quale si mantenga costante per tutto l'anno.
Usando i termini costanti manoscritti nell'Equa=
zione Ia devonsi usare le differenze manoscritte
Per tanto moltiplicando i decimali dell'argomento
A cominciando dalle cifre dei centesimi per
343,"2 si ha la quantità da aggiungersi
al termine costante stampato per avere il corri=
spondente manoscritto.
Le differenze manoscritte sono differenti dalle
stampate diminuendole tutte di 343,"2.
La parte proporzionale derivante da questa
parte di differenza costante per tutto l'anno
venne incorporata col termine costante dell'
anno formandone il termine costante mano=
scritto.
Per formare i valori successivi dell'argomento B
a quello d'un anno antecedente si aggiunge il
numero dei giorni dell'anno, e si sottraggono
alternativamente o 443, o 59, o 502 per
ridurre l'argomento stesso entro i limiti della
tavola: 443 è di pochissimo minore di 15 volte
il periodo di B, invece 59 è di pochissimo
maggiore di 2 volte il periodo di B, e 502 è
di pochissimo maggiore di 17 volte lo stesso perio=
do di B. Il periodo di B è prossimamente 29,5
(vedi tav. XXX).

Fig. II.6 – Francesco Carlini, scritti autografi sulla longitudine del sole
(Biblioteca Capitolare Paolo Angelo Ballerini di Seregno – Fondo Autografi, fasc. n. 22)



Il valore di B in corsivo si può desumere da quello a stampa aggiungendo a questo un tal multiplo del periodo di B da rendersi un numero intero compreso entro i limiti della tavola, e ciò a fine di evitare nel calcolo la parte proporzionale.

Argomento	"		"		"		"		"		"
0	23,8	25	22,7	50	19,6	75	15,0	100	9,9	125	5,2
1	23,8	26	22,6	51	19,4	76	14,8	101	9,7	126	5,1
2	23,8	27	22,6	52	19,2	77	14,6	102	9,5	127	4,9
3	23,8	28	22,5	53	19,1	78	14,4	103	9,3	128	4,7
4	23,8	29	22,4	54	18,9	79	14,2	104	9,1	129	4,6
5	23,8	30	22,3	55	18,7	80	14,0	105	8,9	130	4,4
6	23,8	31	22,2	56	18,6	81	13,8	106	8,7	131	4,3
7	23,8	32	22,0	57	18,4	82	13,6	107	8,5	132	4,1
8	23,7	33	21,9	58	18,2	83	13,3	108	8,3	133	4,0
9	23,7	34	21,8	59	18,0	84	13,1	109	8,1	134	3,8
10	23,7	35	21,7	60	17,8	85	12,9	110	7,9	135	3,7
11	23,6	36	21,6	61	17,5	86	12,7	111	7,7	136	3,5
12	23,6	37	21,4	62	17,5	87	12,5	112	7,5	137	3,4
13	23,5	38	21,3	63	17,3	88	12,3	113	7,3	138	3,2
14	23,5	39	21,2	64	17,1	89	12,0	114	7,2	139	3,1
15	23,5	40	21,1	65	16,9	90	11,9	115	7,0	140	3,0
16	23,4	41	20,9	66	16,7	91	11,7	116	6,8	141	2,8
17	23,3	42	20,8	67	16,5	92	11,5	117	6,6	142	2,7
18	23,3	43	20,6	68	16,3	93	11,3	118	6,4	143	2,6
19	23,2	44	20,5	69	16,1	94	11,1	119	6,2	144	2,5
20	23,1	45	20,3	70	16,0	95	10,9	120	6,1	145	2,4
21	23,1	46	20,2	71	15,8	96	10,7	121	5,9	146	2,2
22	23,0	47	20,0	72	15,6	97	10,5	122	5,7	147	2,1
23	22,9	48	19,9	73	15,4	98	10,3	123	5,6	148	2,0
24	22,8	49	19,7	74	15,2	99	10,1	124	5,4	149	1,9

Fig. II.7 – Francesco Carlini, misure ed elaborazioni relative alla determinazione della longitudine del sole (Biblioteca Capitolare Paolo Angelo Ballerini di Seregno – Fondo Autografi, fasc. n. 22) [25])

[25] Qualche parola serve per spiegare Seregno e l'Archivio Capitolare. Infatti il Carlini, amico di Carlo Cattaneo e già collaboratore del giornale Il Conciliatore di Silvio Pellico, assume poi una posizione equidistante e, con l'avvento del Regno d'Italia, ormai anziano, si ritira nella sua abitazione, a Sereno, la cosiddetta Casa Bianca, dove continua comunque a lavorare, fino alla fine.

Per contro, saper evitare banali contraddizioni è sempre altamente raccomandabile; in altre occasioni, si è detto della banalità del male, ma anche le omissioni sono deplorevoli e disdicevoli (un esempio nel seguito).

Come dimostrano gli eventi estremi del XX secolo, quando si tratta di frenare l'impulso degli esseri umani ad usare la violenza per imporre un sistema ideologico, l'etica è una barriera insufficiente. Il proprio retaggio spirituale non fornisce uno schermo e le concezioni etiche non offrono una protezione … si può torturare ed uccidere … e continuare a considerarsi una persona di cultura e religione (liberamente tratto da Elie Wiesel). Perché dove purtroppo sono coinvolte questioni religiose (od ideologiche), gli uomini si rendono colpevoli di ogni sorta di disonestà e d'illecito intellettuale (Sigmund Freud, L'avvenire d'un illusione).

J' accuse è l'avvio famoso di una lettera, scritta da Émile Zola al Presidente della 3ª Repubblica Francese, nell'occasione dell'Affaire Dreifus. L'autorevolezza dello scrittore e la drammaticità dell'argomento (insieme alle teorie errate e razziste di Gobineau ed ai falsi protocolli dei Savi di Sion, uno dei più importanti punti di svolta nella nascita dell'intolleranza moderna) ha reso celebre il passo. Proprio per questo, con evidenti prove documentali, si fa uso di questo avvio per una condanna senza appello del bestiario universitario. In esso asini, pecore e conigli fanno buona compagnia a leoni, lupi e volpi, perché l'insipienza, la pusillanimità e la codardia sono i migliori alleati della ferocia, della rapacità e dalla malvagità. A prova documentale di quanto detto, ecco un fatto abbastanza recente e ben significativo. Il 26 dicembre 2004, una catastrofe di immani proporzioni si è abbattuta sulle coste dell'Oceano Indiano dall'Asia meridionale ed insulare al Corno d'Africa. Un primo scandalo, di fronte alle enormi distruzioni ed al numero ingentissimo di vittime, sta ovviamente nel mancato allarme (particolarmente grave dove la tragedia è avvenuta con ore di ritardo, per il tempo naturale della sua trasmissione). Tuttavia un secondo scandalo è da denunciare in merito alla qualità degli aiuti da parte italiana (e non è neppure la prima volta, come ad esempio dopo i terremoti nel Belice ed in Irpinia, oppure in Albania). Chi scrive ha presentato alle proprie autorità accademiche, dopo un loro invito aperto a tutti, una proposta per rilevare e rappresentare la zona inondata, dalla linea di costa fino alle zone più interne poste a una quota di sicurezza. Infatti la disponibilità di adeguate carte tecniche e tematiche è condizione essenziale per sviluppare qualsiasi progetto [26]. Alcuni mesi più tardi, l'autore ha saputo da un collega di un'altra università italiana di una proposta analoga e di qualche suo timido sviluppo. Chi scrive sa invece che, già negli ultimi giorni di dicembre 2004, il CNESS francese ha prodotto cartografia a piccola scala usando immagini telerilevate. Proprio a partire da questo prodotto, con l'utilizzo di altre immagini ad una più alta risoluzione , sarebbe stato possibile produrre cartografia tecnica e tematica a grande scala.

«Je n'ai qu'une passion, celle de la lumière, au nom de l'humanité qui a tant souffert et qui a droit au bonheur.»
J'accuse!

Fig. II.8 – J'accuse di Émile Zola

Che cosa posso sperare? La domanda, quasi angosciosa, pur nella sua pacata e ferrea logica dell'argomentazione, rileva tutta la difficoltà, l'incertezza e la problematicità della speranza. Essa non è una rassicurante fiducia nella bontà delle cose, una sentimentale convinzione che, alla fine, andranno bene, ma è un'ardua e coraggiosa sfida a tutto ciò che sembra negarla e spesso effettivamente la nega, al male, al fallimento, al dolore sempre in agguato, alle tragedie ed alle ingiustizie che dovunque si abbattono sugli uomini. La speranza nasce proprio dalla lacerazione dell'esistenza vissuta e patita senza veli che crea un'insopprimibile esigenza di riscatto. Essa non è un filtro che pretenda di colorare di rosa il nero abisso della realtà (liberamente ripreso da Immanuel Kant, Critica della ragion pratica).

[26] Purtroppo l'elenco delle nobili azioni proposte a compendio e riportate di seguito: prevenzione delle catastrofi naturali (monitoraggio ambientale e sicurezza delle coste); gestione delle crisi umanitarie; agro – zootecnia; riattivazione delle attività economiche nelle aree rurali e costiere (pesca, acquicoltura, piccola impresa); progettazione delle opere (abitazioni a basso costo, scuole, ospedali, telecomunicazione, ambiente ed energia); bonifica ambientale (desalinizzazione dei terreni e delle falde, gestione e smaltimento dei rifiuti); riabilitazione dei servizi sanitari (igienizzazione, sorveglianza epidemiologica, potabilizzazione); assistenza educativa al superamento del trauma, ignora del tutto il problema preliminare di una nuova cartografia.

APPENDICE A – UN TENTATIVO DI RICOSTRUZIONE DELLA TRIANGOLAZIONE

Fra il 1750 ed il 1753, Ruggero Giuseppe Boscovich misura un arco di meridiano fra Roma e Rimini, con Cristoforo Maire (un confratello gesuita dell'omonimo Collegio Romano), formando una rete di triangolazione, composta da undici triangoli concatenati e dimensionata su una base misurata, lungo la via Appia antica (da Capo di Bove, vicino al mausoleo di Cecilia Metella, alle Frattocchie). Le notizie sono riportate in una loro relazione, intitolata: De Litteraria Expeditione per Pontificiam Ditionem ad Dimetiendos Duos Meridiani Gradus et Corrigendam Mappam Geographicam – Iussu, et Auspiciis Pont. Max. Benedicti XIV – Suscepta a Patribus Societ. Jesu Christophoro Maire et Rogerio Josepho Boscovich - Roma MDCCLV (ovvero 1755). Un controllo odierno non può che confermare l'eccellenza del rilevamento con un errore medio di $1''.2$ ed valore quadratico medio di $8''.9$ (le chiusure non tengono conto degli eccessi sferici, per altro, prevalendo chiusure in difetto, rispetto all'angolo piatto dei triangoli piani). La Fig. A.1 riporta l'elenco degli undici triangoli, i loro vertici, gli angoli misurati e quelli corretti, in base alle chiusure, nonché la lunghezza di uno dei tre lati di ciascun triangolo, così come essa può propagarsi a partire dalla suddetta base misurata. Resta da osservare come la moderna reiterazione con 24 strati indipendenti (verosimilmente non effettuata) porti il valore quadratico medio a solo $1''.8$ (confermando definitivamente che il guadagno attuale è essenzialmente di tempo e invece non di qualità).

140 OPUSCULUM

Triang.		Anguli observati reducti ad cent. °	'	"	Anguli iidem correcti. °	'	"	Hinc latus
Aprusa	L	78	48	22	78	48	18	LH 23862.3
Alt.extr.	a	82	3	10	82	3	6	
Carpegna	H	19	8	36	19	8	36	
		180	0	8	180	0	0	
Aprusa	L	77	19	44	77	19	56	IH 25367.7
Lurus	I	66	35	52	66	36	2	
Carpegna	H	36	3	56	36	4	2	
		179	59	32	180	0	0	
Lurus	I	64	58	37	64	58	31	HG 32465.2
Carpegna	H	69	57	6	69	56	59	
Catria	G	45	4	34	45	4	30	
		180	0	17	180	0	0	
Carpegna	H	37	12	15	37	12	11	GF 27429.8
Catria	G	97	6	12	97	6	1	
Tesius	F	45	41	53	45	41	48	
		180	0	20	180	0	0	
Catria	G	64	51	52	64	51	54	FE 30104.3
Tesius	F	59	33	25	59	33	30	
Penninus	E	55	34	34	55	34	36	
		179	54	54	180	0	0	

SECUNDUM. 141

Triang.		Ang. observati reducti ad cen. °	'	"	Anguli iidem correcti °	'	"	Hinc latus
Tesius	F	45	46	33	45	46	33	FD 45316.4
Penninus	E	92	38	54	92	38	56	
Fionchus	D	41	34	31	41	34	31	
		179	59	58	180	0	0	
Tesius	F	30	36	2	38	35	57	DC 37200.7
Fionchus	D	91	56	32	91	56	21	
Sorianus	C	49	27	48	49	27	42	
		180	0	22	180	0	0	
Fionchus	D	60	5	30	60	5	30	CB 42258.3
Sorianus	C	70	10	21	70	10	19	
Januarius	B	44	44	12	44	44	11	
		180	0	3	180	0	0	
Sorianus	C	32	13	6	32	13	10	BA 22954.3
Januarius	B	68	48	20	68	48	30	
Th.D.Petri	A	78	58	18	78	58	20	
		179	59	44	180	0	0	
Januarius	B	32	38	10	32	38	7	Bc 24244.8
Th.D.Petri	A	79	1	10	79	1	3	
Ext.ul.Bas.	C	68	20	56	68	20	50	
		180	0	16	180	0	0	
Januarius	B	19	17	27	19	17	27	bc 8[illegible]23.4
Extre. cit.	b	94	24	33	94	24	30	
Extre. ult.	c	66	18	6	66	18	3	
		180	0	6	180	0	0	

Fig. A.1 – Le misure e le loro correzioni della triangolazione da Roma e Rimini

Più complesso è l'individuazione dei vertici trigonometrici, non tanto per la loro vecchia dizione in latino, ma per i possibili cambi di denominazione. Nel Riminese, forse un estremo è a Misano Adriatico, trovando citato nel testo genericamente il mare ed in base alle misure riportate. A Roma, un triangolo può avere il vertice a San Pietro, di certo ben visibile, ma qui citato come "Th. D. Petri", senza particolare enfasi, mentre l'estremo esterno della base misurata è alle Frattocchie, ma manca la monumentazione dello stesso. Inoltre il vertice di un triangolo, denominato Soriano, più verosimilmente, è sul Monte Cimino (a quota 1053 metri), anziché a Soriano nel Cimino (a quota 509 metri), per comprensibili problemi di visibilità (essendo comunque vicini i due siti). Del resto, anche i vertici sui monti Carpegna, Catria, Pennino, Fionchi e Gennaro (a punta Zappi) sono tutti a quote piuttosto elevate, rispettivamente: 1418, 1701, 1571, 1337 e 1271 metri.

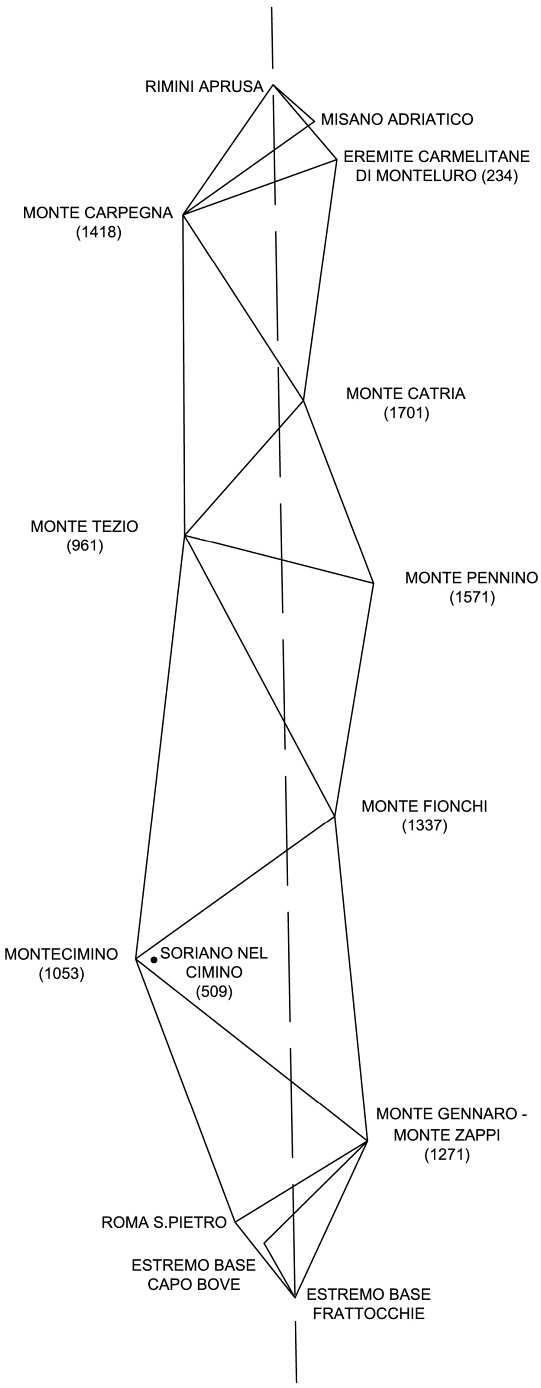
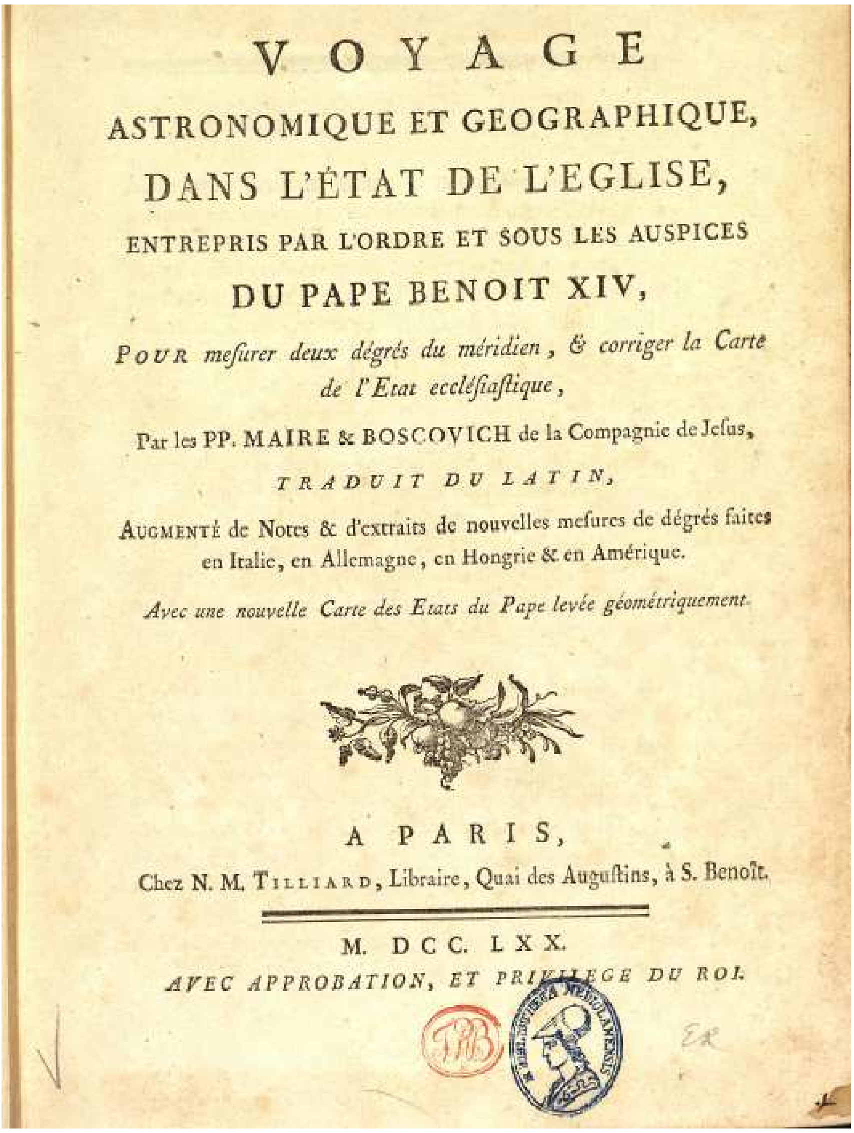


Fig. A.2 – Lo schema presunto della rete di triangolazione da Roma a Rimini

Per completezza, si riporta nella Fig. A.4, la nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico, così come essa è contenuta (per intero, ma ovviamente in forma ridotta, su un foglio doppio), nel libro: Voyage Astronomique et Géographique, dans l'Ėtat de l'Eglise, Entrepris par l'Ordre et Sous les Auspices du Pape Benoit XIV, pour mesurer deux degrés du méridien, & corriger la Carte de l'Ėtat ecclésiastique, par les PP. Maire & Boscovich de la Compagnie de Jesus, Traduit du Latin, Augmenté de Notes & d'extraits de nouvelles mesures de degrés faites én Italie, en Allemagne, en Hongrie & en Amérique – Avec une nouvelle Cartes des Ėtats du Pape levée géométriquement. A Paris MDCCLXX (ovvero 1770), di cui si riporta il frontespizio nella Fig. A.3. Questo libro, edito quindici anni dopo la prima edizione romana, attesta la presenza autorevole di Boscovich a Parigi, proprio negli anni in cui Urano, più volte osservato dalla fine del '600 e confuso con una stella fissa, è dapprima ritenuto una nuova cometa e poi finalmente riconosciuto come un nuovo pianeta, esterno rispetto a Saturno (Boscovich partecipa a questo fecondo dibattito scientifico europeo che contribuisce a confermare la teoria copernicana ed a sostenere la meccanica galileiana e newtoniana).



VOYAGE

ASTRONOMIQUE ET GEOGRAPHIQUE,

DANS L'ÉTAT DE L'EGLISE,

ENTREPRIS PAR L'ORDRE ET SOUS LES AUSPICES

DU PAPE BENOIT XIV,

Pour mesurer deux dégrés du méridien, & corriger la Carte de l'Etat ecclésiastique,

Par les PP. MAIRE & BOSCOVICH de la Compagnie de Jesus,

TRADUIT DU LATIN,

Augmenté de Notes & d'extraits de nouvelles mesures de dégrés faites en Italie, en Allemagne, en Hongrie & en Amérique.

Avec une nouvelle Carte des Etats du Pape levée géométriquement.

A PARIS,

Chez N. M. Tilliard, Libraire, Quai des Augustins, à S. Benoît.

M. DCC. LXX.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

Fig. A.3 – Frontespizio del libro Voyage Astronomique et Geographique

Fig. A.4 – Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico (riportata nella pagina seguente)


Carte
de l'État de l'Eglise
Avertissement
État de Venise
Golfe de Venise
Toscane
Royaume de Naples
Mer Mediterranée
Echelles

APPENDICE B – PICCOLA GALLERIA D'IMMAGINI CARTOGRAFICHE

Una piccola galleria d'immagini cartografiche intende completare quanto già detto in precedenza, circa il desiderio degli uomini di redigere mappe dei territori popolati e non solo. Pertanto la prima immagine è l'ecumene di Erodoto (Fig. B.1), storico greco del V secolo a.C., che rappresenta tutta la terra conosciuta nel mondo occidentale d'allora, compreso tra il Bacino del Mediterraneo, il Nord Africa ed il Medio Oriente. Più completa ed aggiornata è invece, in epoca ellenistica, l'ecumene di Tolomeo [27] (Fig. B.2).

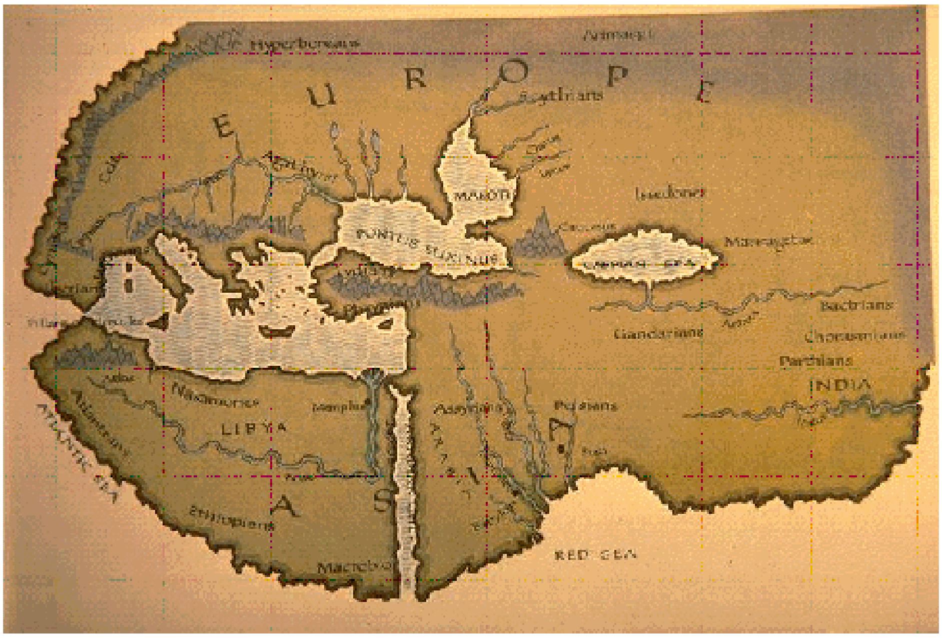


Fig. B.1 – Ecumene di Erodoto

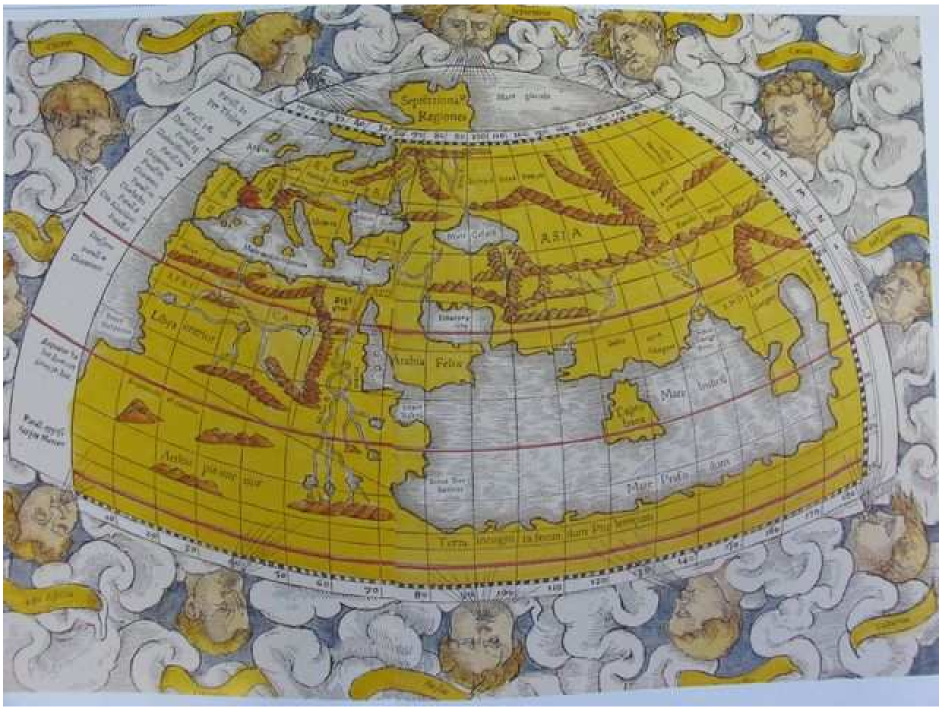


Fig. B.2 – Ecumene di Tolomeo

[27] In una raccolta di 27 carte (di Tolomeo) è contenuta anche una carta generale (od ecumene).

Il medioevo ed il rinascimento arricchiscono la collezione delle mappe con raccolte d'illustrazioni, derivate dalla tradizione religiosa e/o dal pensiero utopico. Così dopo la stesura della Commedia dantesca, l'itinerario del poeta è variamente rappresentato (un esempio rinascimentale è mostrato dalla Fig. B.3 di Giovanni Stradano), mentre l'isola d'Utopia descritta nel libro omonimo di Tomas More (italianizzato in Moro) è illustrata da un'incisione di Ambrosius Holbein (Fig. B.4), per una delle prime edizioni del libro stesso.

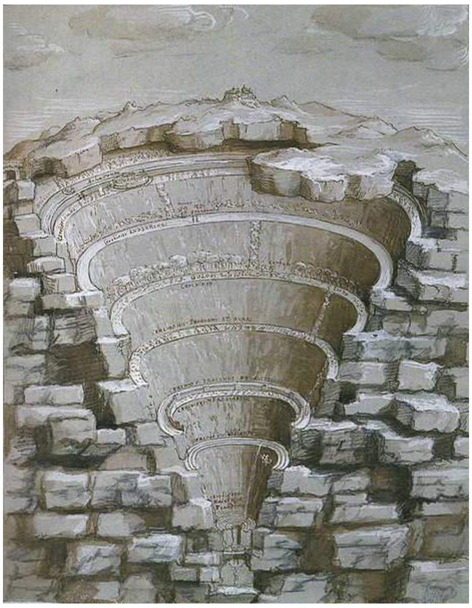


Fig. B.3 – Jan Van der Straet [28] (italianizzato in Giovanni Stradano), disegno dell'Inferno dantesco

Fig. B.4 – Ambrosius Holbein, incisione per l'edizione del 1518 dell'Utopia di Tommaso Moro

[28] Pittore fiammingo rinascimentale, attivo anche a Firenze.

Le figure B5 e B.6 riportano due planisferi, rispettivamente di epoca medioevale e rinascimentale. Un confronto immediato mostra inequivocabilmente le differenze tra i due. Il primo, tratto da un manoscritto del Geographia, del XII secolo, è quasi più arretrato rispetto al planisfero di Tolomeo [29]. Il secondo, redatto da Alberto Cantino, nel 1502, è un planisfero realizzato, tenendo conto delle più recenti scoperte geografiche che, proprio a quell'epoca, aumentano di numero e vanno raccogliendosi.

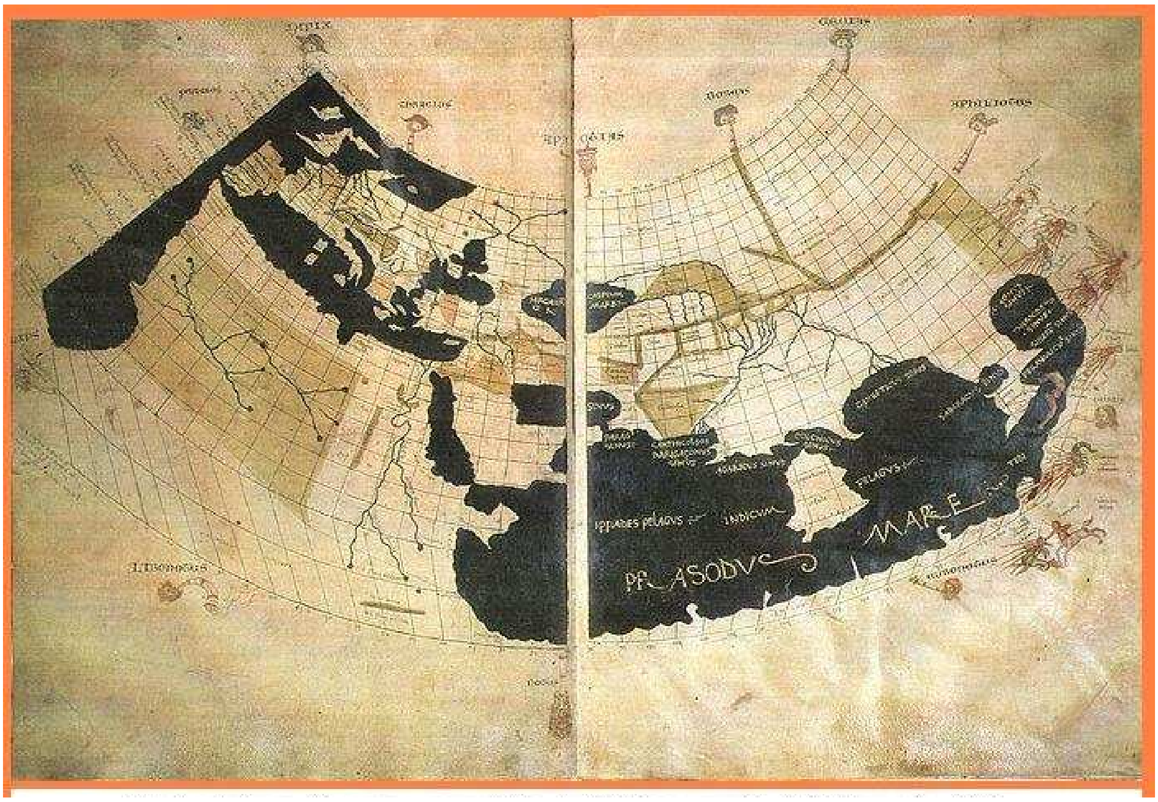


Fig. B.5 – Un planisfero medioevale

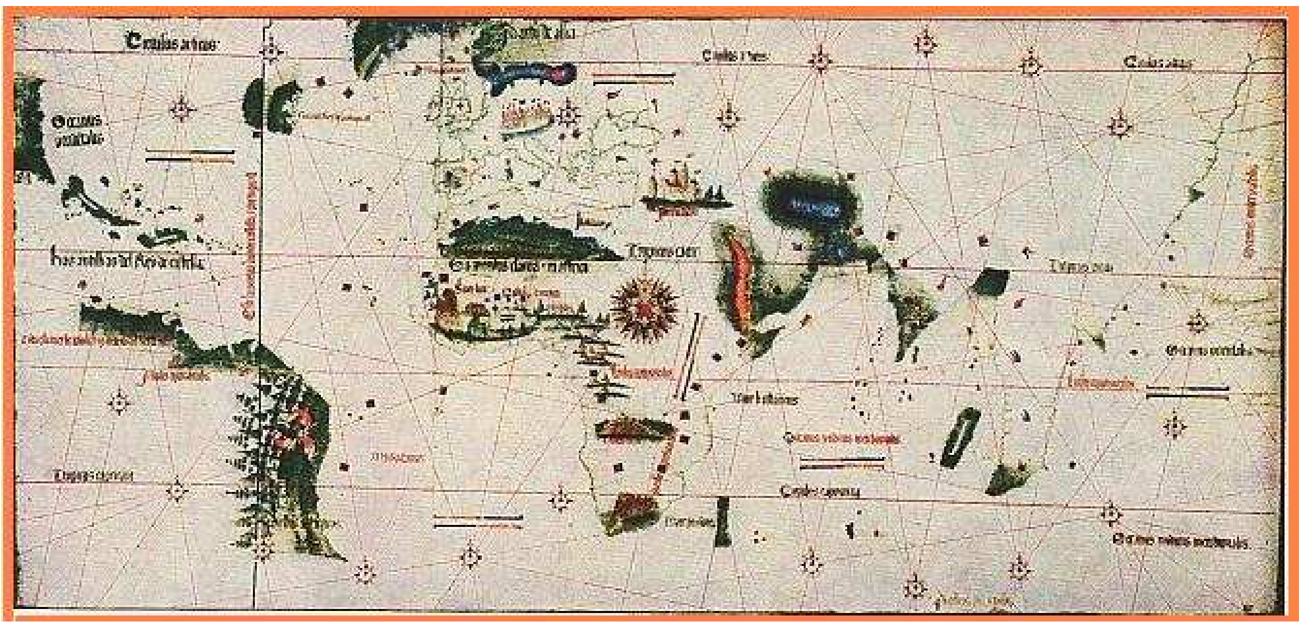


Fig. B.6 – Un planisfero rinascimentale

[29] Può stupire, ma manca, del tutto, addirittura la Scandinavia.

Per completezza, si riporta uno schizzo autografo di Cristoforo Colombo della costa nord-ovest dell'isola di Hispaniola (Haiti), eseguito nel dicembre 1492 (Fig. B.7), ed uno schizzo successivo, eseguito dal geografo Alessandro Zorzi, nel 1506 (Fig. B.8), probabilmente su informazioni ricevute da Bartolomeo Colombo (fratello dell'ammiraglio Colombo), a riprova dell'accrescimento notevole e della raccolta sistematica di tutte le informazioni derivate dalle recenti scoperte geografiche.

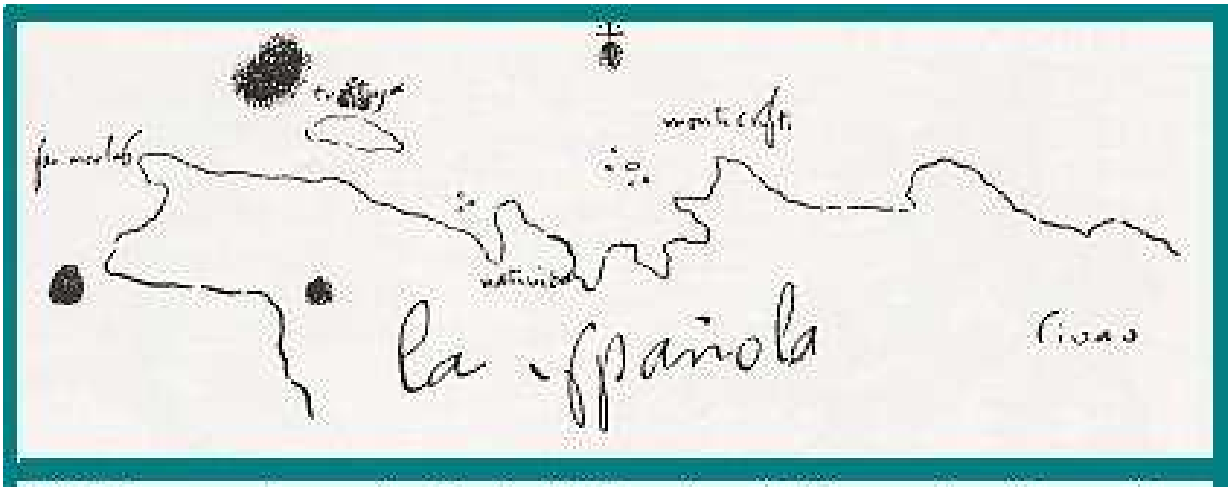


Fig. B.7 – Schizzo della costa nord-ovest dell'isola di Hispaniola (Haiti)

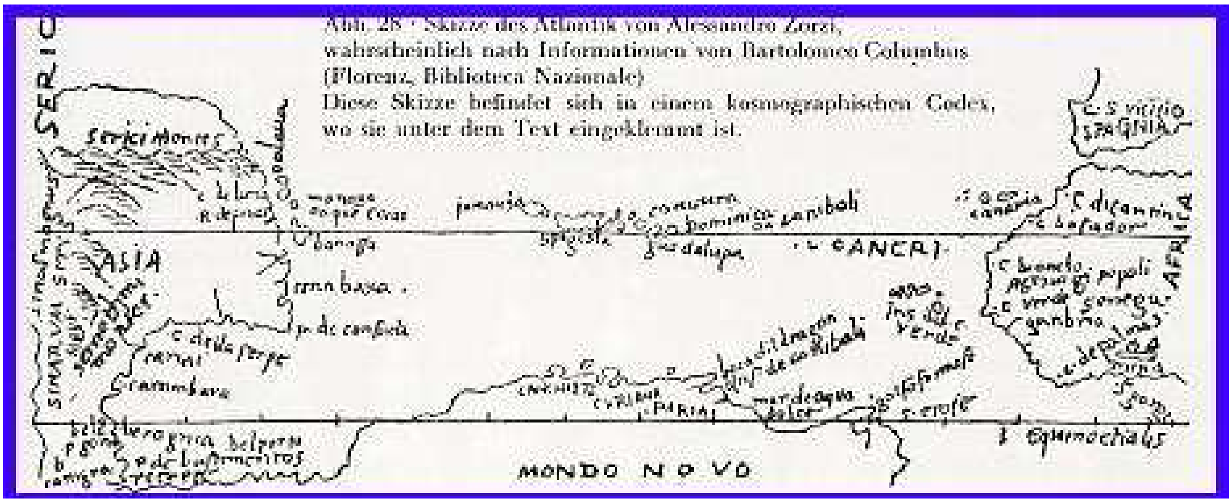


Fig. B.8 – Schizzo della scoperte geografiche nelle Indie Occidentali

Infatti il rinascimento è anche l'epoca delle grandi scoperte geografiche e, in particolare dalla conquista dell'America, mentre continuano i contatti con le Indie, spingendosi fino alla Cina ed al Giappone, sulle orme dei viaggi medioevali dei Polo. Pertanto la figura B.9 presenta la carta di Piri Re'is, appena successiva ai viaggi di Amerigo Vespucci ed al riconoscimento delle Indie Occidentali, come un nuovo continente, e la figura B.10 riporta una carta delle Indie, incentrata sugli oceani Pacifico ed Indiano.
Scienza e tecnica sono due realtà complementari, dove talvolta la prima promuove la seconda, oppure altre volte, la seconda è da stimolo alla prima. Allora proprio le recenti scoperte geografiche creano l'esigenza di una più adeguata rappresentazione del planisfero terrestre e la carta conforme di Mercatore (Fig. B.11), su una proiezione cilindrica diritta, è la prima risposta (pur essendo la stessa molto lontana dall'equivalenza di superfici e, di conseguenza, molto distorta nelle regioni non equatoriali).

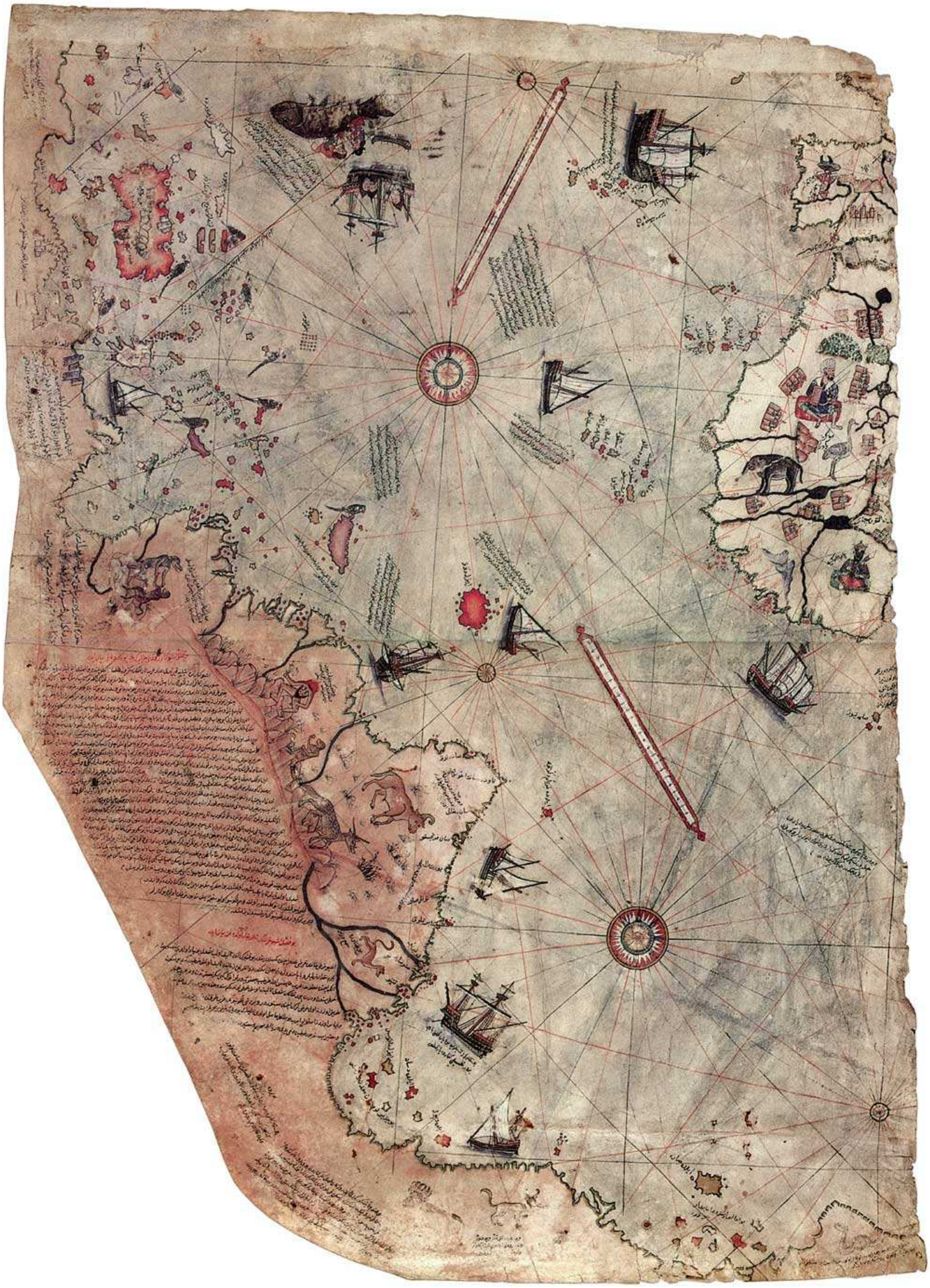


Fig. B.9 – Carta delle Indie Occidentali di Piri Re'is [30]

[30] La carta di Piri Re'is, redatta nel 1513 (cioè nell'anno islamico 919) e presentata al sultano di Costantinopoli nel 1517, presenta una delle prime rappresentazioni delle Americhe (ovvero delle cosiddette Indie Occidentali) ed incredibilmente un tratto accurato di costa, allora sconosciuta dell'Antartide che sarà visto, da lontano, solo nel '700 e raggiunto nel corso dell''800. L'esplorazione dell'Antartide (come quella dell'Artide) continua per tutto il corso dell''800, giungendo alla conquista del Polo Sud (ed anche del Polo Nord) solo agli inizi del '900.

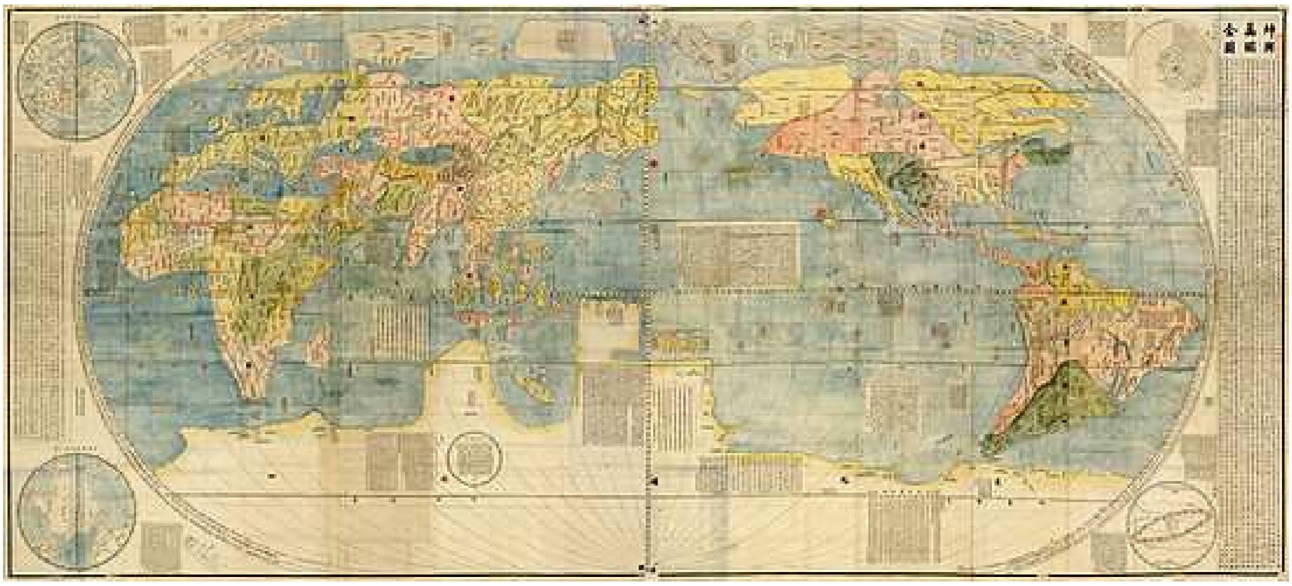


Fig. B.10 – Carta Geografica completa di tutti i Regni del Mondo di Matteo Ricci [31]

Fig. B.11 – Carta del mondo di Mercatore [32]

[31] La Carta Geografica completa di tutti i Regni del Mondo, compilata da Matteo Ricci, gesuita, matematico e cartografo, è stampata in Cina, per la prima volta, nel 1602, su richiesta dell'imperatore della Cina. A riguardo, occorre notare la foggia non occidentale della carta e, per contro, l'incentrare la carta stessa sugli oceani Pacifico ed Indiano, dove si affacciano e/o sono comprese le Indie. Infatti Matteo Ricci è un esempio preclare di tolleranza ed apertura al nuovo; giunto in Cina, come missionario, non inizia un'opera di conversioni forzate, ma studia tutta la cultura cinese e, in particolare, il confucianesimo, il taoismo ed il buddismo, con l'intento di comprenderla alla luce del cristianesimo. Nel contempo, traduce testi cristiani ed altri testi occidentali, anche scientifici, in cinese, adattandoli a quella specifica cultura. Un'opinione diversa descrive invece la stessa carta come un'estensione delle carte tolemaiche, ponendo ad est non solo l'Estreno Oriente, ma anche le Americhe (laddove l'origine rimane all'estremità ovest delle isole Canarie).

[32] La carta di Mercatore, del 1569, è detta Nova et accurata orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendata et accomodata. Forse per questo è redatta in forma di carta conforme ed isogonica, utile per la navigazione, seppure con le sopraccitate distorsioni areali. Del resto, il problema di redigere carte conformi, con poche distorsioni areali, non è un problema da poco, ed è risolto solo per aree limitate, come le sezioni coniche di Lambert od i fusi cilindrici trasversi di Gauss. D'altra parte, tutte le carte equivalenti, in grande, non sono affatto conformi (né isogoniche).

La carta di figura B.12 illustra i viaggi del capitano James Cook, per conto dell'ammiragliato di Londra. A differenza di quelli quatto/cinquecenteschi, questi viaggi d'esplorazione settecenteschi sono programmati a scopo di studio (ed innegabilmente anche di dominio politico) e, da essi, deriva una notevole aumento della conoscenza, in particolare, dell'Oceano Pacifico, dell'Oceania e dei mari del Sud, e l'indicazione di tutte quelle aree continentali interne (extra-europee) non ancora esplorate.

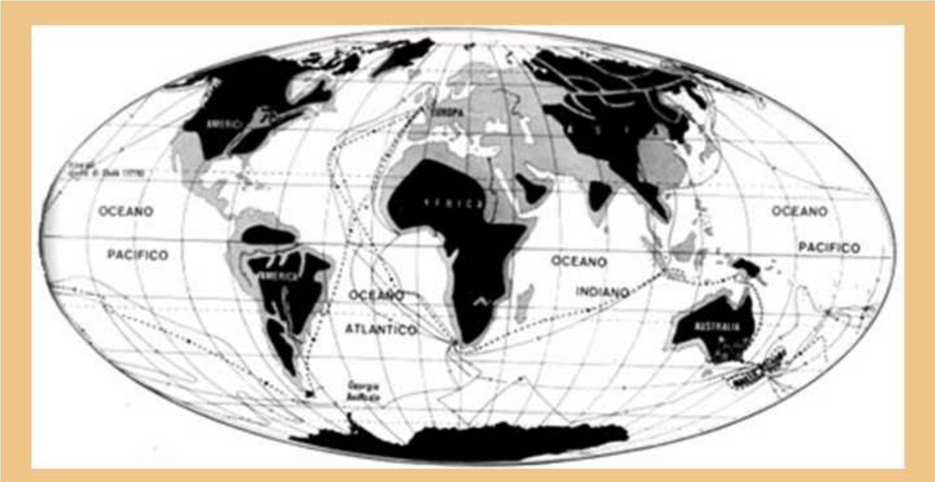


Fig. B.12 – Carta geografica dei viaggi di Cook

Questa piccola galleria d'immagini cartografiche (terrestri) è integrata dall'immagine della faccia nascosta della luna (Fig. B.13), come noto, invisibile dalla terra, essendo il periodo della sua rotazione coincidente con il periodo della sua rivoluzione attorno alla terra, così come essa è stata, per la prima volta, acquisita dal satellite sovietico Sputnik, il 7 dicembre 1959, durante una missione d'esplorazione del satellite della terra (circa dieci anni prima dell'allunaggio, compiuto degli americani).

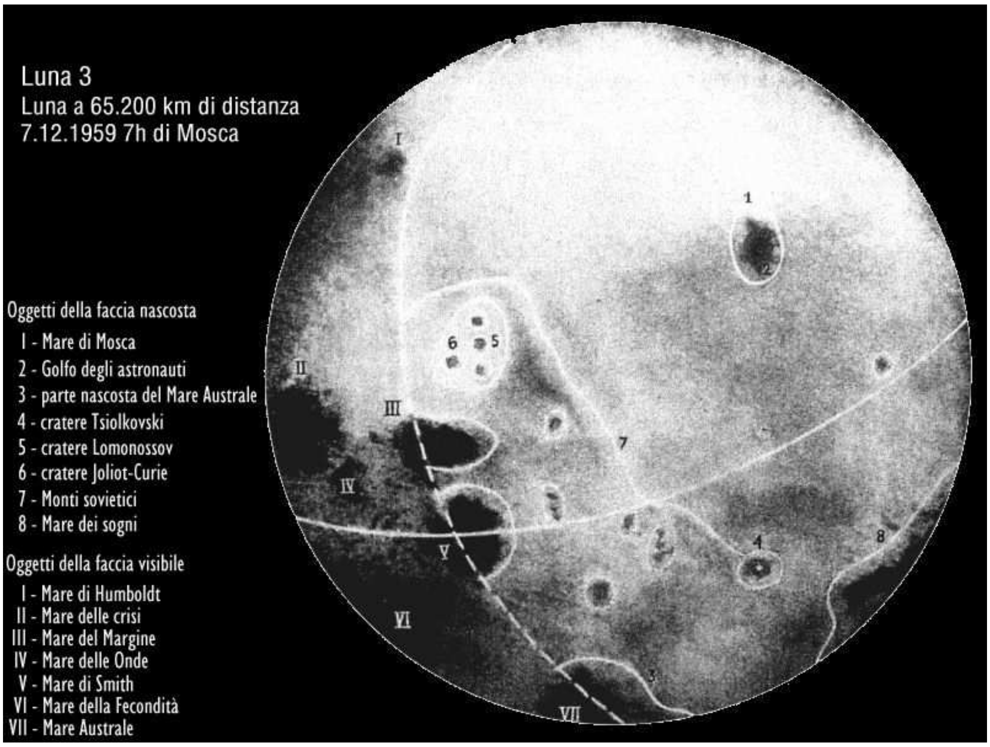


Fig. B.13 – La faccia nascosta della luna

Il mondo contemporaneo è sommerso d'immagini e, da queste, sono ricavate mappe di quasi tutti i tipi. Due direzioni sono particolarmente interessanti, per il loro andare verso l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, rispettivamente come per la mappa dell'universo conosciuto (Fig. B.14) e la mappa di parte del genoma umano (Fig. B.15). Un ultimo commento rileva come oggigiorno sia difficile fissare limiti precisi alla frontiera della conoscenza, certamente esistente, ma sicuramente ancora molto lontana.

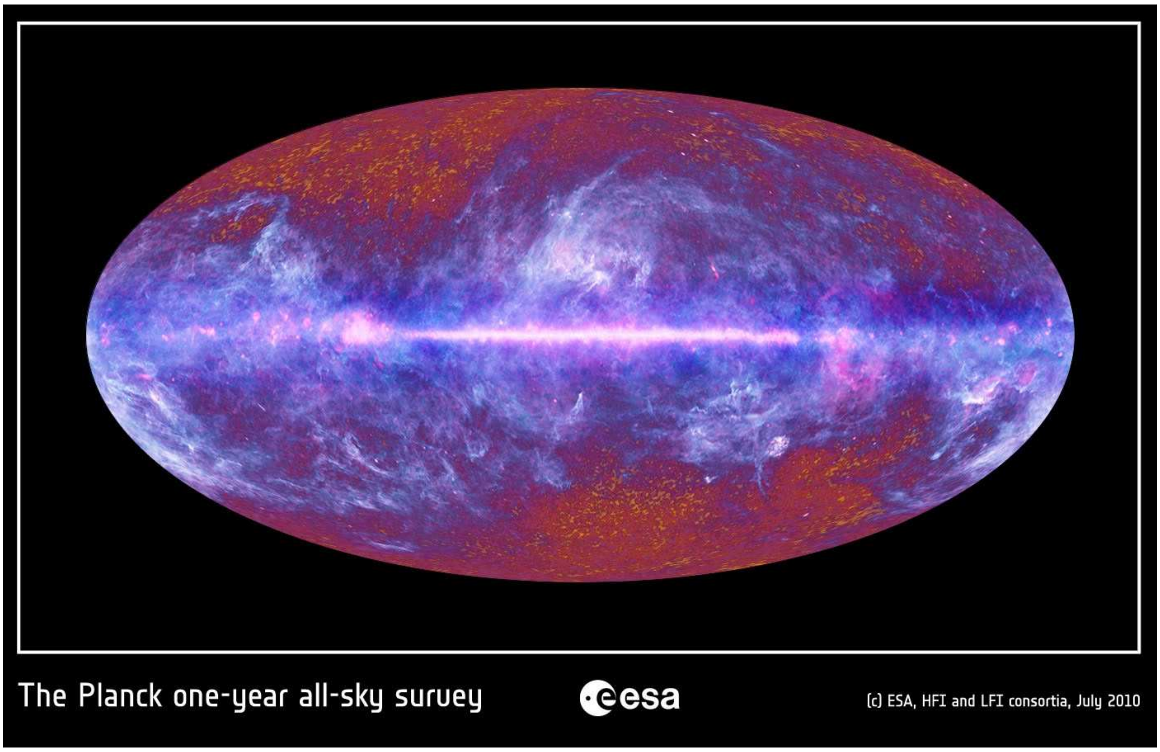


Fig. B.14 – Mappa dell'universo conosciuto

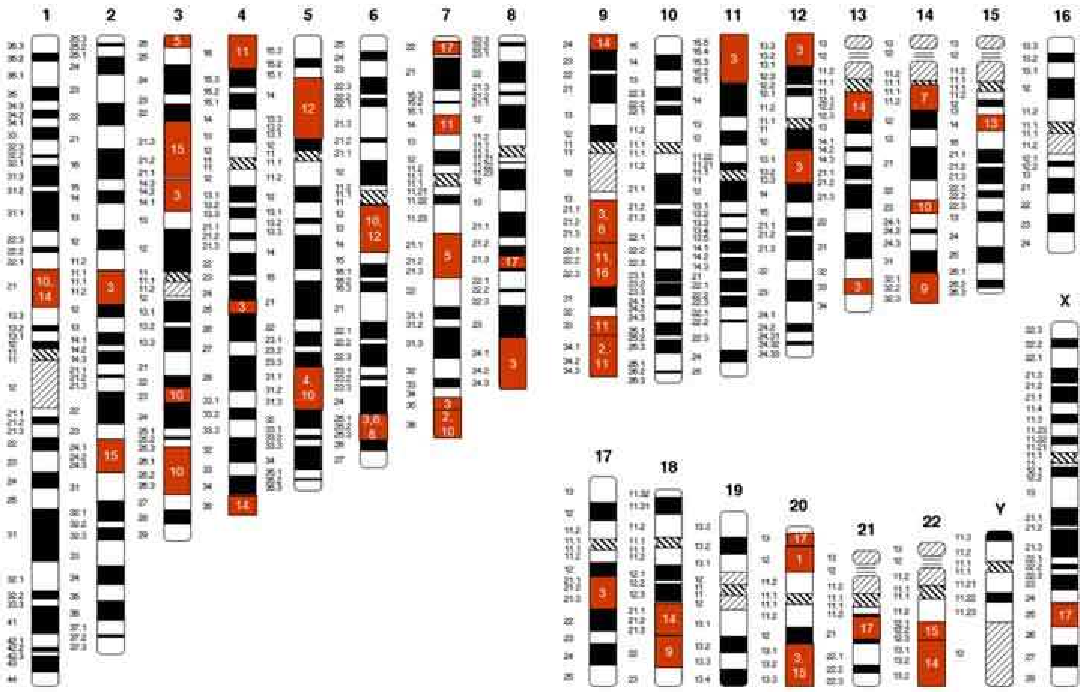


Fig. B.15 – Mappa di parte del genoma umano

APPENDICE C – Una delle prime applicazioni del metodo dei minimi quadrati (Milano, 1825)

Il settecento italiano ed europeo è un secolo di profonde innovazioni; tuttavia in Italia è caratterizzato proprio dall'età delle riforme, dopo l'epoca della controriforma ed il lungo predominio spagnolo. Con questo spirito, si innovano le città e le campagne, e si dà avvio alle prime forme di manifattura. Proprio per questo, sono necessarie basi cartografiche adeguate, da qui i catasti metrici e le piante geometriche delle città. L'agrimensura ed il disegno cartografico esistono da tempo, ma investire del problema gli astronomi, come già accaduto altrove in Europa, fa sì che il rigore e la precisione, tipiche dell'astronomia, passino per mezzo della geodesia alla cartografia stessa. Dopodichè l'influenza positiva fa scuola ed una nuova branca del rilevamento si apre, grazie alla camera lucida (antesignana della fotogrammetria), con l'acquisizione di panorami e vedute di monumenti e manufatti.

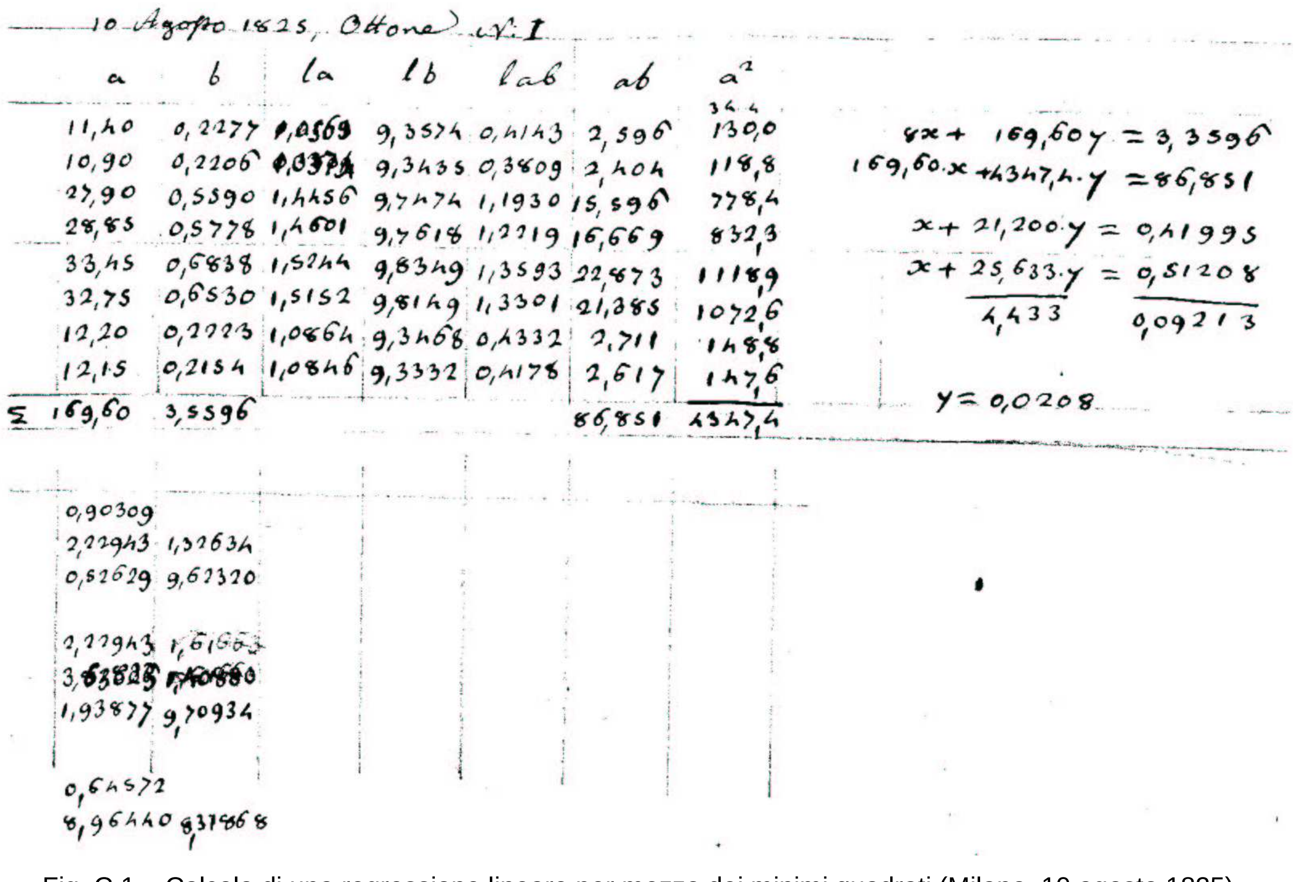
Fondamento di questi rilievi sono le reti geodetiche, rilevate tramite triangolazioni, dove il dimensionamento è ottenuto con lo sviluppo di una base misurata. Un'osservazione, qui marginale, ma importante, constata la pressoché identica precisione con i rilevamenti attuali, al prezzo di lunghe operazioni di misura (ad esempio, addirittura sei mesi, per la misura di una base della lunghezza di circa dieci chilometri). Un'osservazione centrale, nell'ambito del presente lavoro, e comunque fondamentale, per l'accuratezza delle osservazioni e per gli avanzamenti scientifici delle conoscenze, nell'ambito della geodesia, è il riconoscimento dell'influenza del campo della gravità terreste sulla maggior parte delle misure effettuate. A riguardo, fanno eccezione le misure di distanza e, all'epoca, le singole misure con le aste graduate, in quanto già la loro successione segue l'orizzontale, variabile punto a punto, così come variano le superfici equipotenziali.

La misura della gravità è, da sempre, un problema complesso, perché coinvolge insieme misure assolute e misure relative, dove oggigiorno le seconde sono di più semplice esecuzione delle prime. Tuttavia all'epoca cui si fa riferimento, l'unico modo per avere misure attendibili sull'accelerazione di gravità e, di conseguenza, sui suoi funzionali che intervengono nella correzione delle misure geodetiche, è il pendolo semplice. Infatti questo, noto il suo periodo d'oscillazione, collega l'accelerazione di gravità del sito, in modo direttamente proporzionale, alla lunghezza della sua asta. Dopodichè la determinazione della lunghezza dell'asta diventa un problema di confronto con differenti regoli di taratura, per poter tener conto anche della dilatazione termica. Per contro, un'informazione derivata, d'eminente valore scientifico, è relativa alla determinazione della densità media della Terra [33].

Le suddette operazioni di taratura richiedono l'esecuzione di calcoli, per ricavare i parametri attesi delle costanti lineari della dilatazione termica, in funzione degli allungamenti misurati e delle temperature di riferimento. Ovviamente tutte le operazioni possono svolgersi per via empirica o semiempirica, ad esempio, facendo medie di dati originari, per poi passare ad altre medie dei quozienti tra coppie di dati corrispondenti. Tuttavia è noto che, in assenza di dati anomali (che solitamente nascondono errori grossolani), il metodo dei minimi quadrati fornisce stime corrette e di minima varianza dei parametri attesi. Questo metodo, noto e di uso comune oggigiorno, è invece una novità del momento, all'epoca cui si fa riferimento. Pertanto il suo uso, nel contesto delle operazioni di taratura, dà al lavoro eseguito spiccate caratteristiche di innovazione ed originalità, come si addice ai lavori scientifici migliori.

[33] Nel primo '800, a Milano all'Osservatorio di Brera (con Vienna e Praga, una delle tre istituzioni astronomiche dell'Impero austriaco,) è preparato un esperimento per misurare le perturbazioni gravitazionali sul moto di un pendolo semplice, valutando così la densità della Terra. Fino ad allora, le ricerche in questo campo, condotte principalmente in Inghilterra, sono poche. Invece negli anni seguenti, un insieme di fattori, dipendenti in primis dalle mutate condizioni politiche, fa venir meno, su scala europea, la collaborazione scientifica nel cui ambito è effettuato l'esperimento gravimetrico. In Italia, i rilievi gravimetrici riprendono verso la fine dell''800 e proseguono nel '900, fino agli anni '60.

Il metodo dei minimi quadrati è presentato da Adrien-Marie Legendre, nel 1805 (che chiama il metodo: *moindres carrés*, da cui il nome attuale: minimi quadrati), e da Gauss, nel 1809, sulla base di un suo manoscritto, del 1795, e sulla scorta di alcuni tentativi infruttuosi di Leonhard Eulero. Nel 1821, Gauss presenta alcune estensioni del metodo dei minimi quadrati che lo formalizzano, così come è attualmente conosciuto. Nel 1825, ad appena quattro anni dalla definitiva formulazione del metodo dei minimi quadrati, ad opera di Gauss, Carlini fa uso del metodo dei minimi quadrati, per il calcolo di una regressione lineare, allo scopo di eseguire la taratura dell'asta di un pendolo, confrontando tra loro i metalli o le leghe: ottone, ferro ed acciaio, con un metro campione.
La tabella di fig. C.1, riporta con la grafia autografa del Carlini, innanzitutto la data dello scritto, poi lo svolgimento completo (facente uso del passaggio ai logaritmi e viceversa per eseguire le moltiplicazioni e le divisioni) del calcolo di un sistema di due equazioni in due incognite. L'appunto, confrontato con le tabelle, presentate nell'immediato prosieguo, sembra quasi un esercizio preliminare, per impratichirsi del nuovo metodo, ma la data e l'autorevolezza del computante danno comunque altissimo rilievo alla sua presentazione.


10 Agosto 1825, Ottone N. I

	a	b	la	lb	lab	ab	a^2
	11,40	0,2277	1,0569	9,3574	0,4143	2,596	130,0
	10,90	0,2206	1,0374	9,3435	0,3809	2,404	118,8
	27,90	0,5590	1,4456	9,7474	1,1930	15,596	778,4
	28,85	0,5778	1,4601	9,7618	1,2219	16,669	832,3
	33,45	0,6838	1,5244	9,8349	1,3593	22,873	1118,9
	32,75	0,6530	1,5152	9,8149	1,3301	21,385	1072,6
	12,20	0,2223	1,0864	9,3468	0,4332	2,711	148,8
	12,15	0,2154	1,0846	9,3332	0,4178	2,617	147,6
Σ	169,60	3,5596				86,851	4347,4

$8x + 169{,}60y = 3{,}3596$

$169{,}60.x + 4347{,}4.y = 86{,}851$

$x + 21{,}200.y = 0{,}41995$

$x + 25{,}633.y = 0{,}51208$

4,433 0,09213

$y = 0{,}0208$

0,90309
2,22943 1,32634
0,52629 9,62320

2,22943 1,61663
3,63828 1,40880
1,93877 9,70934

0,64572
8,96440 8,31868

Fig. C.1 – Calcolo di una regressione lineare per mezzo dei minimi quadrati (Milano, 10 agosto 1825)

Non datato, ma verosimilmente coevo, in quanto trovato nello stesso faldone, nello stesso incartamento contenuto in esso, ed addirittura negli stessi cartigli, raccolti insieme, è il calcolo di tutta la regressione, eseguita per questa taratura, come mostrato nelle tabelle delle figure C.2, C.3 e C.4. Il primo passaggio esegue il calcolo delle medie, per gruppo d'osservazioni (temperature rilevate e dilatazioni termiche dell'ottone, del ferro e dell'acciaio, rispetto al metro campione), per poter poi scrivere, immediatamente sotto, le equazioni della regressione lineare sui valori medi, rispetto alla temperatura osservata.

Riunendo in tre serie le osservate dilatazioni relative, e prendendo i medii si ha per la differenza fra il metro mosari e il metro d'ottone.

T	O−M	T	O−M	T	O−M
+2,90	0,0000	7,10	0,0415	19,52	0,1383
2,80	0,0223	7,48	0,0321	23,50	0,1694
3,22	0,0174	8,12	0,0332	19,30	0,1103
5,41	0,0083	12,92	0,0647	19,60	0,1139
5,79	0,0267	13,03	0,0791		
med +4,02	0,0149	[illegible]	0,0541	20,48	0,1330

supposto $O-M = x + y \cdot T$ si hanno le tre equazioni

$$x + 4{,}02 \cdot y = 0{,}0149$$
$$x + 9{,}73 \cdot y = 0{,}0541$$
$$x + 20{,}48 \cdot y = 0{,}1330,$$

che risolte coi minimi quadrati danno.

Le osservazioni relative al metro di ferro danno

$$x + 4{,}02 \cdot y = -0{,}1460$$
$$x + 9{,}73 \cdot y = -0{,}1219$$
$$x + 20{,}48 \cdot y = -0{,}1354$$

$$3x + 34{,}23 \cdot y = -0{,}3813$$
$$34{,}23 \cdot x + 530{,}07 \cdot y = -4{,}5892$$

$$\cancel{F - M = -\ldots - 0{,}0017 \cdot T}$$
$$F - M = -0{,}1098 - 0{,}0013 \cdot T$$

Quelle relative al metro d'acciajo

$$x + 4{,}02 \cdot y = +0{,}1126$$
$$x + 9{,}73 \cdot y = +0{,}1015$$
$$x + 20{,}48 \cdot y = +0{,}0966$$

$$3x + 34{,}23 \cdot y = +0{,}3107$$
$$34{,}23 \cdot x + 530{,}07 \cdot y = +3{,}4186$$

$$A - M = +0{,}1138 - 0{,}0009 \cdot T$$

Fig. C.2 – Calcolo di una regressione lineare (delle dilatazioni termiche rilevate per i metalli e le leghe: ottone, ferro ed acciaio, in funzione della temperatura misurata) con il metodo dei minimi quadrati: stima dei coefficienti della regressione lineare

Dopodichè l'autore procede ad una seconda regressione lineare, per tener conto della dilatazione termica del metro campione, assunta da informazioni a priori, come espressamente scritto. Lo svolgimento è un po' meno facilmente leggibile, anche e forse soprattutto, per la mancanza di qualche tabella numerica, riassuntiva di alcuni passaggi, ma il significato matematico dell'operazione è comunque inequivocabile.

Abbiamo dunque

$O - M = -0{,}0144 + 0{,}0072 \cdot T^2$

$F - M = -0{,}1098 - 0{,}0013 \cdot T$

$A - M = +0{,}1138 - 0{,}0009 \cdot T$

Siano le dilatazioni rispettive di O F A M per un grado ... a m

le prime tre sono state determinate immediatamente e trovate una volta di 0,0226, 0,0150; 0,0134

un'altra volta di 0,0208; 0,0130; 0,0127

il valore di m secondo Borda sarebbe = 0,01445

avremo perciò le seguenti equazioni

o = 0,0226 da risolversi coi minimi quadrati.

o = 0,0208

f = 0,0150

f = 0,0130

a = 0,0134

a = 0,0127

m = 0,01445

o − m = 0,0072

f − m = −0,0013

a − m = −0,0009

226	150	134	m = 0,01445
208	130	127	m − o = −0,0072
72	180	261	m − f = +0,0013
506	−13	9	m − a = +0,0009
	167	152	+0,01445 =

3o − m = 0,0506 (0,0149)	0,0655	o = 0,0218
3f − m = 0,0267	0,0416	f = 0,0138
3a − m = 0,0252	0,0401	a = 0,0134

4m − s = 0,01045

−3m + 3s = 0,1025

12m − 3s = 0,03135

9m = 0,13385   m = 0,01487   3m = 0,04461

4m = 0,05948   0,1025

0,01045   3s = 0,1471

s = 0,04903   s = 0,04903

Fig. C.3 – Sviluppi del calcolo della regressione lineare, per tener conto della dilatazione termica del metro campione, assunta da informazioni a priori (secondo Borda, cfr. scritto riportato)

In ogni caso, è innegabile la correttezza del punto d'arrivo dei calcoli eseguiti, costituito da una tabella a quattro colonne, frutto dell'interpolazione, secondo le regressioni lineari stimate, delle dilatazioni termiche dei metalli e delle leghe: ottone, ferro ed acciaio, in funzione della temperatura ed indirettamente della dilatazione termica del metro campione, assunta da informazioni a priori [34].

$$M = 1000,0004 + 0,01487 \cdot T$$
$$O = 999,985 + 0,0218 \cdot T$$
$$F = 999,890 + 0,0139 \cdot T$$
$$A = 1000,114 + 0,0134 \cdot T$$

	O	A	T
16,0	0,334	0,328	0,112
16,1	0,336	0,330	0,114
16,2	0,338	0,331	0,115
16,3	0,340	0,332	0,117
16,4	0,343	0,334	0,118
16,5	0,345	0,335	0,119
16,6	0,347	0,336	0,121
16,7	0,349	0,338	0,122
16,8	0,351	0,339	0,124
16,9	0,353	0,340	0,125
17,0	0,356	0,342	0,126
17,1	0,358	0,343	0,128
17,2	0,360	0,344	0,129
17,3	0,362	0,346	0,130
17,4	0,364	0,347	0,132
17,5	0,366	0,348	0,133
17,6	0,369	0,350	0,135
17,7	0,371	0,351	0,136
17,8	0,373	0,353	0,137
17,9	0,375	0,354	0,139

	O	A	T
18,0	0,377	0,355	0,140
18,1	0,380	0,357	0,142
18,2	0,382	0,358	0,143
18,3	0,384	0,360	0,144
18,4	0,386	0,361	0,146
18,5	0,388	0,362	0,147
18,6	0,390	0,363	0,149
18,7	0,393	0,365	0,150
18,8	0,395	0,366	0,151
18,9	0,397	0,367	0,153
19,0	0,399	0,369	0,154
19,1	0,401	0,370	0,155
19,2	0,404	0,371	0,157
19,3	0,406	0,373	0,158
19,4	0,408	0,374	0,160
19,5	0,410	0,375	0,161
19,6	0,412	0,377	0,162
19,7	0,414	0,378	0,164
19,8	0,417	0,379	0,165
19,9	0,419	0,381	0,167
20,0	0,421	0,382	0,168

Fig. C.4 – Interpolazione, secondo le regressioni lineari stimate, delle dilatazioni termiche dei metalli e delle leghe: ottone, ferro ed acciaio, in funzione della temperatura e della dilatazione termica del metro campione, assunta da informazioni a priori

[34] Le tabelle, appena presentate, sono ad ulteriore testimonianza del percorso d'eccellenza, compiuto dagli astronomi, geodeti e cartografi della Specola di Brera, ed a sostegno di quanto ancora oggi si continua a studiare, nella Scuola di Milano, nell'ambito del trattamento delle osservazioni, sulla scorta anche di così importanti inizi che, fra l'altro, possono annoverare Ruggero Giuseppe Boscovic e la formalizzazione matematica del metodo della minima somma dei moduli, di derivazione galileiana.

- Dopo Carlini, come già detto in precedenza, per primo Giovanni Virginio Schiaparelli, suo immediato successore, nella direzione della Specola di Milano e professore di Geodesia nel neonato Politecnico di Milano, nelle sue opere ponderose, scrive del metodo dei minimi quadrati, passando dall'utilizzo a scopo di ricerca, alla divulgazione alta, anche a scopo didattico.
- Dopodichè all'inizio del '900, su indicazione di Giovanni Celoria, successore dello Schiaparelli, nella direzione della Specola di Milano e professore di Geodesia nel Politecnico di Milano, è attivato il primo corso di Teoria degli Errori.
- Questo corso è proseguito da Gino Cassinis e, ad esso (immediato predecessore dell'odierno corso di Trattamento delle Osservazioni), fa poi seguito il corso di Teoria e Pratica delle Misure, tenuto da Mariano Cunietti e dalla signora Giovanna Togliatti.

Non stupisca invece il non-uso dei minimi quadrati nella compensazione delle reti, da parte di Carlini e di Angelo De Cesaris (detto: Cesari) e Barnaba Oriani che lo hanno preceduto. Infatti:

- in date antecedenti il 1804 (a loro volta, precedenti le prime presentazioni del metodo, da parte di Legendre e Gauss), quando il governo napoleonico intima, agli astronomi di Brera, l'interruzione di tutte le operazioni geodetiche in Lombardia,
- l'enorme volume di calcoli, necessari per eseguire le compensazioni delle reti geodetiche, ed un mondo ancora completamente privo di sussidi di calcolo, ad eccezione delle tavole dei logaritmi,

sono una giustificazione pienamente sufficiente, a riguardo.

Un’osservazione aggiuntiva constata, come il Carlini usi modalità di scrittura che anticipano gli attuali fogli elettronici. Del resto, un secolo dopo, sempre in anticipo sull’avvento dei fogli elettronici (comparsi solo negli anni ’80 del ‘900), Cassinis, professore di geodesia e topografia alla Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano, nel suo libro: Calcoli Numerici Grafici e Meccanici, edito da Mariotti Pacini (Pisa, 1928; disponibile presso la Biblioteca della Sezione Rilevamento del DIIAR al Politecnico di Milano), mostra un prototipo di foglio elettronico, per il calcolo delle radici di un’equazione algebrica di terzo grado (fig. D.5). La rilevanza, nell’ambito attuale del trattamento delle osservazioni, è certamente fuori discussione.

$$X^3 - 30\,X^2 + 200\,X + 230 = 0.$$

	$a_0^{(p)}$	$a_1^{(p)}$	$a_2^{(p)}$	$a_3^{(p)}$
1ᵉ potenze: $p=0$	$+1$	$-3\cdot10$	$+2\cdot10^2$	$+2{,}3\cdot10^2$
	$+1$	$-9\cdot10^2$ $+4\cdot$ "	$+4{,}00\cdot10^4$ $+1{,}38\cdot$ "	$-5{,}29\cdot10^4$
2ᵉ » $p=1$	$+1$	$-5\cdot10^2$	$+5{,}38\cdot10^4$	$-5{,}29\cdot10^4$
	$+1$	$-25{,}00\cdot10^4$ $+10{,}76\cdot$ "	$+28{,}9444\cdot10^8$ $-0{,}5290\cdot$	$-27{,}9841\cdot10^8$
4ᵉ » $p=2$	$+1$	$-14{,}24\cdot10^4$	$+28{,}4154\cdot10^8$	$-27{,}9841\cdot10^8$
	$+1$	$-2{,}0278\cdot10^{10}$ $+0{,}5683\cdot$	$+8{,}0743\cdot10^{18}$ $-0{,}0008\cdot$	$-7{,}8311\cdot10^{18}$
8ᵉ » $p=3$	$+1$	$-1{,}4595\cdot10^{10}$	$+8{,}0735\cdot10^{18}$	$-7{,}8311\cdot10^{18}$
	$+1$	$-2{,}1301\cdot10^{20}$ $+0{,}1614\cdot$	$+65{,}1814\cdot10^{36}$	$-61{,}3251\cdot10^{36}$
16ᵉ » $p=4$	$+1$	$-1{,}9687\cdot10^{20}$	$+65{,}1814\cdot10^{36}$	$-61{,}3251\cdot10^{36}$
	$+1$	$-3{,}8758\cdot10^{40}$ $+0{,}0130\cdot$	$+4{,}2485\cdot10^{75}$	$-3{,}7608\cdot10^{75}$
32ᵉ » $p=5$	$+1$	$-3{,}8628\cdot10^{40}$	$+4{,}2485\cdot10^{75}$	$-3{,}7608\cdot10^{75}$
	$+1$	$-14{,}9212\cdot10^{80}$ $+0{,}0001\cdot$	$+18{,}0502\cdot10^{150}$	$-14{,}1434\cdot10^{150}$
64ᵉ » $p=6$	$+1$	$-14{,}9211\cdot10^{80}$	$+18{,}0502\cdot10^{150}$	$-14{,}1434\cdot10^{150}$

$\log\lvert a_i^{(6)}\rvert$	$\log\left\lvert\frac{a_i^{(6)}}{a_{i-1}^{(6)}}\right\rvert = \log X_i^{64}$	$\log X_i$	X_i
0			
81.1738008	81,1738008	1,2683406	18,5499
151.2564820	70,0826812	1,0950418	12,4463
151,1505538	63,8940718 — 64	9,9983449 — 10	0,9962

Fig. D.5 – Soluzione di un’equazione algebrica di terzo grado

PARTE III – APPUNTI DI METROLOGIA ED EPISTEMOLOGIA A CURA DI MARIANO CUNIETTI [35]

Il Prof. Mariano Cunietti, fisico, metrologo, gravimetrista e fotogrammetra, in un suo libro (ad uso didattico, ma non solo), affronta problemi di metrologia ed epistemologia, così da costruire una riflessione critica sulle misure che riguarda insieme teoria e pratica. La tematica si inserisce nella tradizione storica, ormai lunga, denominata teoria degli errori e conduce alle problematiche attuali sul trattamento delle osservazioni che spazia dall'analisi dei dati alla statistica computazionale.

Proprietà delle grandezze secondo Euclide

Gli stimoli sensoriali con cui si manifesta alla coscienza il mondo fisico, sociale, e psichico circostante sono di una complessità notevole, rivelando aspetti e individualità sempre diverse e mutevoli. Ciò nonostante, per sintesi statistica, oppure per predisposizione razionale, l'uomo riesce a mettere ordine in questa confusione, raggruppando, classificando, selezionando. Nella indagine scientifica, avviene un processo analogo. La complessità dell'evento o del fenomeno è semplificata e schematizzata; alcune caratteristiche sono messe in evidenza, a danno delle altre, cosicché quello che si presenta come individuo autonomo, può essere catalogato, confrontato e generalizzato, come particolarizzazione concreta di un evento o fenomeno astratto, composto di tutte e sole quelle caratteristiche, già isolate in singoli eventi reali.

Queste caratteristiche, isolate nei fenomeni e negli eventi per classificarli, sono le grandezze fisiche. Tuttavia per poter essere prese in esame ed usate nella indagine scientifica, le stesse caratteristiche devono soddisfare alcune condizioni concettuali, derivate essenzialmente dal modo di pensare, dal modo di procedere nel ragionamento e dal modo di collegare la successione degli eventi: ovverossia dalla logica. Per quanto sia intuitivo ed immediato ciò che si intende per grandezza, tuttavia una sua definizione in termini di logica e costata molte ricerche laboriose. Euclide, per primo, parla delle grandezze nei suoi *Elementi* e, nel libro V, enumera quelle che sono le caratteristiche distintive di una grandezza, enunciandone anche le proprietà assiomatiche principali. In particolare, i punti essenziali della trattazione euclidea sono [36]:

- Le grandezze sono ripartite in classi, formate ciascuna di enti che corrispondono alla medesima definizione generica.
- Si stabiliscono opportuni procedimenti di confronto fra due qualsiasi grandezze di una medesima classe (e solo di una medesima classe) e per mezzo di questi procedimenti si definisce:
  - quando le due grandezze sono uguali e quando sono disuguali, e in questo secondo caso quale è la maggiore e quale la minore;

[35] Questa parte è quasi interamente tratta dal libro Corso teorico e pratico sulle misure, di Mariano Cunietti (Edizioni libreria Cortina, Milano, 1964). La prima parte è dedicata a La misura delle grandezze, e strutturata in tre capitoli:

- la misura diretta delle grandezze;
- classi di grandezze misurate indirettamente;
- gli strumenti di misura.

La seconda parte è relativa all'Analisi dei risultati, e strutturata in quattro capitoli:

- elementi di statistica;
- elementi di calcolo delle probabilità;
- teoria degli errori di misura,
- osservazioni indirette e condizionate.

Chi scrive ha operato la selezione delle parti riproposte e parziali e scritture e revisioni, con alcune rare rilevanze critiche, oggi da segnalare, soprattutto per l'adattamento del linguaggio, all'uso corrente ed allo stile personale. In particolare, il primo ed il terzo capitolo della prima parte sono riproposti pressoché integralmente, mentre il secondo capitolo è solo brevemente riassunto. Per quanto riguarda invece la seconda parte, la selezione è minore e maggiormente sparsa, e riguarda alcuni paragrafi metodologici dei primi tre capitoli.

[36] In questo punto dell'introduzione, Cunietti si collega a quanto già scritto da Giovanni Polvani, nel suo libro: *Elementi di metrologia teoretica* (Ed. Dr. C. Marzorati, Milano, 1947).

- quale altra grandezza della medesima classe è la somma e, nel caso che le grandezze siano disuguali, quale è la differenza delle due grandezze date;
- quale numero è il rapporto fra l'una e l'altra grandezza.

- Il rapporto di una grandezza ad un'altra è sempre un numero reale positivo
- Il rapporto è unitario quando le due grandezze sono ugua
- li fra loro
- E' possibile istituire, in una semplice infinità di maniere diverse, corrispondenze biunivoche, ordinate e reciproche fra tutte le grandezze di una medesima classe e tutti i numeri reali positivi che facciano corrispondere, a grandezze uguali numeri uguali e viceversa, come pure a grandezze disuguali numeri disuguali e viceversa, ed infine rendano il rapporto di una grandezza ad un'altra uguale al quoziente numeri corrispondenti.

Le uniche corrispondenze che godono di questa proprietà sono quelle metriche, ottenute facendo corrispondere, ad ogni grandezza, il numero che ne esprime il rapporto (detto misura), rispetto ad un'altra grandezza (detta unità), appartenente alla medesima classe.

Questo complesso di proprietà definisce assai bene, sia pare indirettamente, il concetto di grandezza, e malgrado la sua datazione antica, non è stato superato, in chiarezza e rigore, da definizioni più moderne che, in generale, ricalcano lo schema euclideo di definire, enunciando le proprietà essenziali, piuttosto che ricavare queste da quella.

Definizione di grandezza secondo Bertrand Russell

L'enunciato di Euclide presenta qualche difficoltà, quando si voglia arrivare a conclusioni di ordine operativo. Allora è più utile, per gli sviluppi in senso operazionale, la trattazione fatta da Bertrand Russell, nel suo libro: *I principi delle matematica*, apparso agli albori del '900 [37].

Esiste una certa coppia di relazioni indefinibili, maggiore o minore; queste relazioni sono simmetriche e transitive e sono incompatibili l'una con l'altra.

- Ognuna è l'inversa dell'altra nel senso che ogni volta che una è valida tra A e B, l'altra è valida tra B ed A. I termini che risultano suscettibili di queste relazioni, sono grandezze.
- Ogni grandezza ha una certa relazione particolare con qualche concetto, espresso dicendo che essa è una grandezza di quel concetto. Due grandezze che hanno questa relazione col medesimo concetto, si dicono dello stesso genere; essere dello stesso genere è la condizione necessaria e sufficiente per la relazione di maggiore e minore.
- Allorché una grandezza può essere particolarizzata mediante una posizione spaziale, o temporale, o spazio-temporale, o se è una relazione, può essere particolarizzata con il prendere in considerazione una coppia di termini tra i quali essa è valida, allora la grandezza cosi particolarizzata si chiama quantità. Due quantità, che sono ottenute particolarizzando una stessa grandezza, si dicono uguali.

Un esempio aiuta a chiarire le parole di Russell [38].

---

[37] Si veda, a riguardo, Bertand Russel: I principi della matematica, Ed. Newtn Compton , Milano, 2008.

[38] La lunghezza è una delle proprietà dello spazio ed è un concetto astratto che comprende una molteplicità di termini. Ad esempio, kilometro, metro, millimetro e micron sono tutti termini compresi nel concetto di lunghezza. I termini sopra elencati stanno fra loro nel rapporto di maggiore o minore. Infatti un kilometro è maggiore di un metro, un millimetro maggiore di un micron, ma minore di un metro. Pertanto tutti questi termini sono grandezze della classe delle lunghezze.
Il concetto di lunghezza o meglio la lunghezza è una classe di grandezze. La classe ed i termini che in quella classe rientrano, sono ancora compresi in una sfera astratta. A differenza delle grandezze, le quantità non sono propriamente maggiori o minori, perché la relazione di maggiore o minore è valida solo tra le loro grandezze; ad esse spetta solo la proprietà dell'uguaglianza perché significa il possesso della medesima grandezza.
Ad esempio, una sbarra metallica non è in se stessa una lunghezza, ma in quanto è lunga e, in particolare, più lunga di un'altra sbarra metallica si riconosce in essa una grandezza di lunghezza. In tal senso, si può dire che quella sbarra essendo una concretizzazione di una lunghezza è una quantità di lunghezza. Le quantità che sono oggetti posseggono questa proprietà: se due quantità sono concretizzazioni di una stessa grandezza, cioè posseggono entrambe la stessa grandezza, sono due quantità uguali.
Un dato di fatto sperimentale di cui si dove tener conto è inoltre che gli uomini hanno la capacità di giudicare dell'uguaglianza o meno (stabilendo, in alternativa, relazioni di maggioranza o minoranza) di due quantità. Questa capacità è un presupposto logico che risulta fondamentale nell'operazione di misura di una grandezza.

Classi di grandezze di divisibilità e di distanza

La definizione data da Russell avente carattere puramente logico, porta a concludere che le classi di grandezze possono essere numerosissime e di tipo completamente eterogeneo, e non comprendere solamente quelle grandezze che solitamente vengono pensate fisicamente. Fra queste classi è utile prenderne in considerazione in modo particolare due: la classe delle grandezze di divisibilità e la classe di grandezze di distanza. Se si considera un tutto o insieme finito e limitato costituito di parti, la sua divisibilità è correlata con il numero di parti semplici che lo compongono. Questa proprietà di un insieme è una grandezza perché la divisibilità soddisfa ai requisiti già elencati per essere una grandezza. Infatti la divisibilità di un tutto sarà maggiore o minore a seconda che sono più o meno numerosi gli elementi o parti semplici che lo sostituiscono [39].

In merito alla grandezza di distanza, Russell dice che la posizione dei punti su una retta non è, di per sé, una grandezza; del la posizione infatti non può dirsi più o meno. Tuttavia se si prende la relazione di vicinanza, da destra o da sinistra, dei punti rispetto ad un punto preso come riferimento, questa relazione è una grandezza nel senso che di un punto può dirsi che è più o meno vicino, al punto di riferimento, di un altro punto della retta stessa. Analogamente nella serie temporale degli eventi, la data di un evento non è una grandezza, ma diventa una grandezza se è messa in relazione ad un evento di riferimento e si dirà che quell'evento è più o meno recente di un altro, se si prende come riferimento il presente. Si intende cioè dire che la sua distanza dal presente è minore di quella di un altro.

L'essere recente non una qualità del tempo o dell'evento. Ciò che in tali casi è paragonato è costituito da una relazione e non da una qualità. Questa relazione basta per generare una sistemazione seriale, ed è sempre necessariamente una grandezza. In tutti i casi del genere se i termini della serie hanno dei nomi e se questi nomi hanno dei comparativi, i comparativi indicano non un più del termine in questione ma un più di rassomiglianza con il termine di confronto (Betrand Russell, op. cit.).

In parole più semplici, Russell intende dire significa che potendosi ordinare i termini in una serie, in base alla relazione di maggiore o minore somiglianza, ad un termine di riferimento, questo maggiore o minore somiglianza dà luogo ad una classe di grandezze che si chiama delle distanze, per analogia con la serie tipica delle posizioni dei punti su una retta. Le classe di grandezze non è costituita da quel particolare attributo, preso in esame, ma della relazione di somiglianza dell'attributo di ciascun termine, con quello del termine di confronto. Le due classi di grandezze, cioè le grandezze di divisibilità e le grandezze di distanza, nel senso e nei limiti sopra enunciati, hanno un'importanza essenziale per l'introduzione del concetto logico di misura di una grandezza.

Definizione di misura di una grandezza

L'indagine sulla struttura logica della relazione di biunivocità, tra classi di grandezza, è la classe dei numeri e sulla natura delle operazioni per determinarla si rivela la fondamentale arbitrarietà di questi procedimenti.

---

[39] Dati due insiemi, omogenei al loro interno e tra loro, secondo quanto dice Russell, la divisibilità sia del primo che del secondo insieme è costituita dal numero di individui appartenenti a ciascun insieme. La grandezza di divisibilità posseduta dal primo insieme può essere maggiore, o uguale, o minore della grandezza di divisibilità posseduta dal secondo insieme.
Ad esempio, un motore a scoppio può essere smontato in tutti i suoi pezzi. Questi pezzi sono le parti semplici, il motore a scoppio é l'insieme o tutto; il numero di pezzi in cui si scompone il motore a scoppio è la divisibilità del motore.
A sua volta, una bicicletta può essere smontata in tanti i suoi pezzi separatamente o costruiti. La divisibilità della bicicletta è data dal numero di pezzi cosl ottenuto.
Si dirà che la divisibilità di un motore a scoppio e maggiore della divisibilità di una bicicletta se il numero di parti semplici (pezzi) dell'uno è maggiore del numero di parti semplici (pezzi) dell'altra.

Dicesi misura di una grandezza, nel senso più generale, qualsiasi metodo con cui si stabilisce una corrispondenza univoca o reciproca tra tutte o tra alcune grandezze di un determinato genere e tutti od alcuni, numeri interi, razionali o reali secondo il caso. In questo senso generale la misurazione richiede una relazione uno – uno tra i numeri e le grandezze in questione: relazione che può essere diretta o indiretta, importante o banale secondo le circostanze. La misurazione può in questo senso applicarsi a moltissime classi di grandezze; a due grandi classi: le distanze e le divisibilità, essa si applica in un senso più importante e più intimo (Bertand Russell, op. cit.).

Prima di spiegare perché le grandezze delle due classi citate hanno un legame più stretto, con i numeri, occorre porre in rilievo l'estrema generalità della definizione di misura data da Russell. Infatti la proprietà di essere misurabili non è più un attributo intrinseco delle grandezze, come per Euclide, bensì le grandezze possono essere misurate, mediante un'operazione che è totalmente estranea ad esse. Il numero con cui sono correlate, si associa ad esse attraverso un atto di volontà esterna che nulla rivela, in effetti, nella sua arbitrarietà, sull'intima essenza delle grandezze. Il legame fra l'uno e l'altra può essere anche banale, ma ciò non toglie nulla al significato delle misura che è (e rimane) un mezzo umano di rappresentazione logica della grandezza e, come tale, si sottrae ad ogni vincolo metafisico.

Misura delle grandezze di divisibilità

La giustificazione dell'intima relazione esistente tra le classi di grandezze, di divisibilità e dei numeri, è insita nella definizione di grandezza di divisibilità. Infatti la divisibilità di un tutto od insieme finito è totalmente correlata con il numero di parti semplici del tutto. Questo numero di parti semplici corrisponde alla misura della divisibilità di quel tutto. Inoltre l'addizione di due quantità di divisibilità, cioè di due tutti, produce un nuovo tutto singolo, la cui misura della divisibilità è data dalla somma della divisibilità di ciascuno dei due, ovvero del numero totale delle parti semplici che compongono il nuovo tutto somma. Di conseguenza quando le grandezze sono divisibilità, non solo si può misurarle con i numeri, ma le somme di due numeri che le misurano, misurano la grandezza somma di tali divisibilità [40].

La classe delle grandezze di divisibilità si correla così alla classe dei numeri, cosicché abbia significato la proposizione: questa grandezza è uguale alla somma di due altre grandezze della stessa classe. Tuttavia tale requisito non è richiesto per la misurazione in generale; esso è proprio di un notevole numero di classi di grandezze la cui misura è quantitativa, in quanto per esse lo zero ha significato di non esistenza e le misure, espresse sempre da numeri positivi, hanno significato di un più di esistenza, tanto maggiore, quanto maggiore è il numero. La misura di queste classi e cioè la relazione uno – uno, tra grandezze e numeri, può essere stabilita solamente attraverso la classe di grandezze di divisibilità, unica classe per la quale l'associazione tra grandezza o numero è immediata ed intrinseca alla grandezza stessa.

Misura delle grandezze di distanza

Sia data una successione dei termini, ordinati in base alla maggiore o minore somiglianza, con un dato termine di confronto. Si stabilisce di prendere le distanze, fra termini successivi, tutte uguali fra loro. In tal caso il numero indice (che ne stabilisce la posizione seriale) può essere assunto come misura della

[40] Ad esempio, siano un certo numero i pezzi singoli in cui si può scomporre, smontandolo, un motore a scoppio, lo stesso numero è anche la misura della divisibilità del motore a scoppio. Sia poi un altro numero è quello dei pezzi singoli in cui si può scomporre la carrozzeria (telaio compreso) dell'automobile su cui è montato il motore a scoppio, allora lo stesso secondo numero è anche la misura della divisibilità della carrozzeria di quell'automobile. Se un terzo numero è il numero di pezzi singoli in cui si può scomporre, smontandola quell'automobile, questo terzo numero è anche la misura della sua divisibilità, potendolo scrivere come somma dei primi due numeri; cioè la divisibilità del tutto o insieme (l'automobile), ottenuto componendo i due insiemi parziali (motore e carrozzeria), ha una misura che si ottiene sommando le misure della divisibilità dei due insiemi parziali.

grandezza di distanza corrispondente. Pertanto la misura della somiglianza della qualità posseduta dal termine ennesimo, con la qualità posseduta dal termine di confronto, ovvero la misura stessa del termine in esame, è data dalla loro distanza [41]. Tuttavia questo tipo di misura non soddisfa il requisito richiesto alle misure delle grandezze di tipo quantitativo, ovvero quello della somma. Una determinata grandezza non può ottenersi per mezzo della combinazione di due altre grandezze della stessa classe [42].
La convenzione stabilita definisce i numeri corrispondenti alle diverse grandezze di distanza, a meno di un fatture costante che dipende dalla scelta fatta, per la distanza unitaria (con cui si è ordinata la serie). Inoltre nello stabilire la relazione di corrispondenza, esiste un'altra arbitrarietà: la scelta del termine di paragone dal quale far partire la successione dei termini, nei due sensi (oppure in un solo verso). Tutto ciò fa sì che i numeri, esprimenti le misure, possono essere sia positivi che negativi. Le classi tra i cui termini si possono stabilire relazioni che permettono la disposizione seriale (secondo la definizione già data di classe di grandezza di distanza) sono molte e tutte quante sono classi di grandezza, misurabili secondo la convenzione adottata per la classe tipica delle distanze [43].

Misure delle grandezze appartenenti alle altre classi

Questa indagine sulla definizione logica di grandezza e di misura delle grandezze porta a stabilire una suddivisione fra classi di grandezze:

- da una parte, quelle per le quali ha un significato la somma di due o più grandezze, come per la classe delle grandezze di divisibilità;
- dall'altra, quelle classi che non ammettono la somma delle grandezze della classe, come la classe delle distanze.

Questa suddivisione è di notevole importanza, infatti:

- per Il primo gruppo di classi, la misura delle grandezze avviene riconducendo le grandezze stesse alla classe della divisibilità e, attraverso queste, associandole ai numeri;
- per Il secondo gruppo di classi, la misura richiede che le grandezze siano disposte serialmente e correlate al numero in base alla loro posizione seriale, ovvero alla distanza dal termine di confronto.

E' importante allora stabilire come sia possibile eseguire per ogni grandezza, da misurare, l'associazione di una grandezza appartenente all'una od all'altra di queste due classi fondamentali e, per mezzo di questa associazione, correlare le grandezze ai numeri.

---

[41] Un esempio significativo è ricavato della scala delle durezze. Presa la durezza del talco, come riferimento, un minerale si dirà più duro del talco. se scalfisce il talco, mentre non è scalfito dal talco stesso. Fra due minerali qualsiasi si dirà che l'uno ha durezza più somigliante dell'altro, a quella del talco, se è scalfito da questo, senza riuscire a scalfirlo. In tal modo, mediante questo criterio, si possono disporre, in una certa successione, a partire dal talco, un certo numero di minerali. Il posto che ciascun minerale occupa può essere compreso tra uno ed il numero dei minerali analizzati. Il primo posto è occupato dal talco, scalfito da tutti gli altri minerali. L'ultimo posto è occupato dal minerale che non è scalfito da nessuno dei minerali che lo precedono nella successione, mentre riesce a scalfirli tutti, a sua volta. Allora il numero della posizione, di un dato minerale, nella successione delle durezze, così costruita, rappresenta la misura della grandezza di distanza o di somiglianza della durezza di quello stesso minerale, rispetto alla durezza del talco, assunta come riferimento.

[42] Di conseguenza, la misura di una certa grandezza non può mai ricavarsi dalla somma delle misure di altre due grandezze, come avviene invece per le grandezze di divisibilità.

[43] In questo caso, si può addirittura dire che tutte sono ricondotte, attraverso l'arbitrarietà della convenzione, ad essere classi di grandezze di distanza. In questo gruppo numeroso di classi rientrano tutte quelle grandezze che si possono definire di stato, cioè implicano non tanto un essere, quanto un modo d'essere. Allora una caratteristica fondamentale di queste classi è quella di non attribuire significato alla proposizione: questa grandezza è somma di altre due grandezze, non avendo alcun senso l'operazione di somma, per le grandezze di queste classi.

Procedimento logico di misura delle grandezze delle classi riconducibili a quella delle divisibilità

La descrizione del procedimento logico e schematico, seguito per giungere alla misura di una grandezza, distingue fra grandezze e quantità, secondo Russell. Con Il termine quantità si indicano gli oggetti reali e concreti che possiedono una grandezza particolare. Ad esempio una sbarra metallica è un oggetto che possiede una grandezza di lunghezza; pertanto la sbarra metallica reale è una quantità di lunghezza, secondo la nomenclatura di Russell. Questa distinzione formale fra quantità e grandezze, si perde completamente nel linguaggio comune, cosicché si dirà comunemente e questo, entro certi limiti, è accettabile, che si misura lu grandezza di un oggetto e che l'oggetto è una grandezza di ... (così, ad esempio, la sbarra é una grandezza di lunghezza). Dopo queste precisazioni necessarie, Il procedimento da seguire è Il seguente.

- Sia data un quantità che possiede una certa grandezza, da misurare, appartenente ad una classe per le quale abbia un significato l'operazione di somma.
- Siano date inoltre tante quantità, uguali tra loro (per definizione), che posseggano una stessa grandezza, appartenente alla stessa classe alla quale appartiene la grandezza data.
- Sia definito un criterio qualsiasi per comporre queste quantità, in modo da formare un tutto che sia inoltre un oggetto reale, cioè una quantità che possiede una grandezza della stessa classe delle quantità precedenti.
- Questo ultimo oggetto composto possiede anche una grandezza di divisibilità, in quanto, per costruzione, è composto con le sopraccitate quantità uguali tra loro. Pertanto nella classe di grandezze di divisibilità, all'oggetto composto spetta una misura pari al numero di parti semplici che lo compongono.
- Si prenda ora la quantità data e la quantità dell'oggetto composto, mettendole a confronto, cioè sottoponendole al giudizio che decida la loro uguaglianza (o meno).
- Da questo confronto, se avvenuto con successo, risulta che la quantità data e la quantità dell'oggetto composto sono quantità uguali, cioè possiedono la stessa grandezza.
- La quantità dell'oggetto composto possiede anche una grandezza di divisibilità misurata dal numero di parti semplici. Allora attraverso di esso, alla grandezza posseduta dalle due quantità, è associato Il numero pari al numero di parti semplici.

Questa operazione, estesa a tutte le quantità, in possesso di grandezze di quella classe, è la descrizione della operazione necessaria per correlare bi-univocamente le grandezze ai numeri, come richiesto dalla definizione di misura secondo Russell. Pertanto Il numero associato è la misura della grandezza posseduta dalla quantità data, ottenuta attraverso questo criterio di correlazione. L'operazione di composizione delle quantità elementari, per ottenere la quantità ausiliaria dell'oggetto composto, è comunemente chiamata somma dei campioni e, in generale, avviene secondo schemi totalmente arbitrari (specifici delle operazioni di misura, da un punto di vista metrologico, varie e tecnologicamente diverse) che tuttavia devono soddisfare alcuna condizioni assai poco restrittive.

Descrizione operazionale della misura di una grandezza di tipo quantitativo

Il procedimento di misura, appena descritto, va oltre una semplice enunciazione formale, coincidendo con Il processo stesso, nella pratica, applicato per l'operazione di misurare. Proprio in questo, è la sua maggiore validità, rispetto alla definizione che, in generale, si dà basata sulla possibilità assiomatica di eseguire un rapporto fra la grandezza da misurare e la grandezza assunta come unità di misura. Infatti nella scienza moderna non è più possibile accettare la definizione di misura di una grandezza, senza precisare e descrivere le operazioni necessarie, per realizzare quel rapporto. Descrivere questo rapporto diretto fra grandezze é impossibile tanto più, in conseguenza, del fatto che ciò di cui si dispone non sono le grandezze, ma le concretizzazioni delle grandezze, cioè gli oggetti reali che possiedono quelle grandezze. La tendenza della scienza moderna prende il nome di operazionalità dei concetti [44].

Ogni concetto é sinonimo del corrispondente gruppo di operazioni.

Cosa s'intende per lunghezza? Evidentemente si sa cosa s'intende per lunghezza se possiamo dire quale è la lunghezza di qualunque oggetto. Per trovare la lunghezza di un oggetto si deve compiere certe operazioni fisiche. Il concetto di lunghezza resta pertanto fissato quando sono fissate le operazioni mediante le quali si misura la lunghezza. Vale a dire il concetto di lunghezza implica né più né meno che Il gruppo di operazioni con cui la lunghezza si determina [45] (Percy WIlliams Bridgman, op. cit).

Di conseguenza, per poter parlare di una classe di grandezze è essenziale avere indicato i procedimenti di confronto fra due grandezze qualsiasi della classe ed aver dato i procedimenti di misura delle grandezze stesse. Secondo Bridgamann, la definizione logico-operazionale della misura quantitativa è la seguente:

La misura della grandezza posseduta da una quantità o, più semplicemente, da quella grandezza è data dal numero di elementi di un campione, tutti uguali tra loro, che occorre comporre, mediante la prefissata operazione di somma, per ottenere una quantità in possesso di una certa grandezza omogenea alla grandezza (in esame) e che risulta uguale a questa in base al giudizio di uguaglianza.

La misura si compone di queste tre operazioni:

- composizione o somma degli elementi del campione o campioni;
- verifica dell'identità fra le quantità data e dell'oggetto composto dai campioni;
- computo del numero degli elementi del campione o campioni.

Inoltre questo schema operativo permette di rispondere alla domanda: in quale punto dell'operazione di misura nascano gli errori (cosiddetti di misura). Infatti il computo dei campioni è un'operazione interna alla classe delle divisibilità per la quale la correlazione tra grandezza e numero è immediata e, del tutto, priva di errore [46]. Allora gli errori di misura devono ricercarsi nelle rimanenti due operazioni di cui si compone Il misurare, ovvero la somma dei campioni (con le sue metodologie e/o procedure, dettate dalla tecnologia in uso) e la verifica di identità fra le due quantità, rispettivamente data e dell'oggetto composto. Queste due operazioni associano alle grandezze da misurare, una grandezza di divisibilità e permettono di attribuire indirettamente alla grandezza in esame che non appartiene alla classe delle divisibilità, il numero spettante alle divisibilità. Pertanto si può affermare che:

[44] Brigmann P.W.: La logica della Fisica moderna. Einaudi, Torino, 1952.
[45] Nelle costruzioni teoriche e nelle interpretazioni degli esperimenti, nulla deve comparire che non sia operazionale, ovvero che non corrisponda ad un gruppo di operazioni, eseguite o da eseguirsi, ma comunque possibili.
[46] La metrologia moderna dissente da quanto qui affermato da Cunietti. Infatti anche un conteggio, in particolare, se lungo può essere affetto d'errore (seppure concedendo che, nel caso di conteggi brevi, gli eventuali errori possano essere considerati solo grossolani) ed allora può essere ragionevole contare classi, invece di elementi (cioè decine, centinaia, migliaia, ecc., invece di unità). D'altra parte, oggigiorno le misure di tempo sono, per lo più, conteggi di frequenze ed allora l'affermazione che ogni conteggio sia privo d'errore, porta conseguentemente all'affermazione falsa che le misure di tempo siano del tutto esatte. Per contro, occorre riconoscere che Cunietti scrive a cavallo tra gli anni '50 e '60 del '900, quando i conteggi lunghi, tipici del mondo digitale, sono ancora una rarità, vera e propria.

- la grandezza di divisibilità la cui misura si effettua con Il computo, é l'unica misura diretta di una grandezza;
- la misura della grandezza di divisibilità è una misura priva di errori (a riguardo, si veda tuttavia anche quanto riportato nella nota appena precedente);
- tutte le misure delle altre classi di grandezze sono misure di tipo indiretto, in senso stretto (o di prima specie), essendo necessario, per la loro misura, passare attraverso la classe ausiliaria delle grandezze di divisibilità.

Pertanto le cause di errore dipendono dal fatto che ogni procedimento di misura è indiretto.

Definizione operazionale delle grandezze

Sospinti dalla necessità di chiarificazione dei concetti e delle definizioni, occorre perfezionare anche le definizioni già date e, in particolare, quella di grandezza. Per definizione di grandezza si sono introdotti i termini di minore e maggiore che risultano indefinibili, in senso logico. Altrettanto dicasi delle relazioni fra quantità che permettono di emettere Il giudizio immediato di identità. Tale indeterminatezza logica deve scomparire, quando si voglia giungere ad una definizione di grandezze che abbia senso anche da un punto di vista operazionale, ovvero legato alla operazioni eseguibili su di essa e, in particolare, all'operazione di misurare. In senso operativo, la relazione maggiore o minore e Il giudizio di identità sono emessi in connessione alle sensazioni umane stimolate, direttamente od indirettamente, dalle quantità messe e confronto.

Pertanto scelto in base a quale stimolo sensoriale si emette, il giudizio di uguaglianza fra le quantità, per definire una classe di grandezze in senso operativo, occorre anche precisare come si opera la correlazione con la classe dei numeri. Infatti finché non si giunge a descrivere l'operazione di misura delle grandezze di una certa classe, la classe stessa rimane definita, in maniera astratta, al di fuori della concreta realtà fisica e sperimentale. Entro questa realtà, quelle grandezze sono inserite non secondo gli intendimenti teorici della loro definizione concettuale, ma conformante alle operazioni concrete che portano a constatarne la presenza negli oggetti ed a misurarle. Pertanto la definizione di una classe di grandezze deve contenere l'indicazione dei relativi procedimenti e dei mezzi di misura, anzi può farsi consistere nella indicazione di questi stessi procedimenti di misura.

Il gruppo di operazioni equivalente ad un dato concetto deve di conseguenza essere un gruppo unico, altrimenti possono sorgere inammissibili ambiguità nelle applicazioni pratiche. In linea di principio, quando si cambiano le operazioni, effettivamente si cambiano anche i concetti, le grandezze e l'uso che si fa dello stesso nome per concetti diversi derivanti da variazioni operazionali, ad esempio, dovute a tentativi di migliorare la misura, in generale, è abusivo e può portare a contraddizioni od ambiguità. Si deve sempre ammettere che un aumento nella precisione sperimentale mostri differenti due gruppi di operazioni che, pur dando lo stesso risultato nelle parte più ordinaria del campo di esperienza, conducano invece a risultati tangibilmente diversi nelle parti meno familiari del campo stesso. Pertanto l'operazione del misurare assume grande importanza e, ad essa, è affidato il compito di definire oltre che misurare la grandezza [47].

[47] Ogni differenziazione metafisica tra la grandezza e la sua misura, anche se esistesse, non interessa, in quanto l'una e l' altra coincidono, dal punto di vista fisico, nell'atto stesso che si dà corso alla operazione di misura. Tutto ciò non toglie, che la grandezza, come concetto, possa essere pensata autonoma dallo strumento e, come tale, possa essere inserita in uno schema interpretative in svolgimento. Tuttavia nella comprensione degli esperimenti eseguiti, essa non può, essere svincolata dallo strumento che misurandola la definisce.

Descrizione operazionale della misura di una grandezza di distanza

Quanto detto, a proposito delle misure di grandezza a carattere quantitativo, è valido anche per le classi di grandezze misurabili per mezzo della classe ausiliaria delle distanze. Esse sono operazionalmente definite, in modo compiuto, dalla descrizione del metodo seguito per compierne la disposizione seriale, in base alla relazione di somiglianza. Nell'esempio citato della scala delle durezze, il metodo per disporre in successione la durezza dei minerali, riferita a quella del talco, consiste nella prove della scalfittura. Tale prova costituisce l'operazione che definisce ed insieme misura la durezza, in maniera molto semplice. In altri casi, la relazione fra le grandezze che permette la loro serializzazione è assai più complessa. In generale, essa consiste nella scelta di un fenomeno, di tipo semplice o complesso, la cui intensità dipende da un gruppo di grandezze di altre classi [48].

Due quantità possiedono un'identica grandezza, quando provocano valori identici di intensità del fenomeno prescelto, e posseggono grandezze minori oppure maggiori, quando maggiori o minori sono le intensità del fenomeno da esse provocate. L'intensità del fenomeno, rispetto ad un'intensità di riferimento, dipendente da una grandezza origine, permette di disporre, in ordine seriale di somiglianza, le grandezze della classe in questione. Il fenomeno scelto rappresenta la relazione fra le grandezze della classe, mediante la quale può effettuarsi la loro seriazione. Tuttavia la scelta del fenomeno non basta a definire la classe delle grandezze, poiché bisogna precisare operativamente, anche come confrontare l'intensità del fenomeno correlata a ciascuna grandezza e permettere la distribuzione seriale che, secondo le convenzioni già precisate, porta immediatamente alla misura numerica delle grandezze.

Il confronto avviene misurando l'intensità del fenomeno, legato a più grandezze di altre classi, ma occorre anche misurare queste grandezze, in termini quantitativi. La successione delle misure delle intensità del fenomeno permettono di disporre serialmente le grandezze della classe. Si ritorna così ad una misura dell'altro tipo, ovvero anche le misure di tipo classificatorio (o di stato) sono ricondotte a misure di tipo quantitativo, in quanto l'intensità del fenomeno connesso non può essere misurata altrimenti. Si noti, come questo non significhi affatto che la classe delle grandezze di distanza sia ricondotta alle grandezze di divisibilità. Invece queste grandezze risultano operativamente definite per mezzo di quel fenomeno e delle sue variazioni d'intensità e la seriazione, per mezzo della quale sono misurate, è ottenuta in base alla misura quantitativa di questa intensità [49].

Pertanto la misura delle grandezze di tipo classificatorio o di distanza è una "vera" e propria misura indiretta. Infatti essa dipende dalla misura diretta di una grandezza (o più), di tipo quantitativo, cui fa riferimento il suo strumento di misura. A riguardo, questo strumento è fondata su un fenomeno che lega la grandezza da misurare ad un'altra grandezza e, in particolare, l'intensità di questo fenomeno (in generale, è una lunghezza od un angolo), per mezzo della quale è stabilita la posizione seriale della grandezza d'interesse e così anche la sua misura. Chi scrive sottolinea poi l'importanza di parlare di misura indiretta, in questo caso specifico, essendo tante misure indirette ben più complesse, in quanto correlate, se dipendenti dalle stesse misure dirette (talvolta anche condizionate tra loro), oppure se collegate da un modello funzionale comune e, a volte, addirittura vincolate tra loro.

---

[48] Queste grandezze non sono lo scopo della misura, ma sono legate alle grandezze da misurare, attraverso questo fenomeno.

[49] Ad esempio, la temperatura è una grandezza perché, fra le diverse temperature, hanno senso le relazioni di maggiore o minore. Tuttavia la misura della temperatura non può effettuarsi con la sua associazione alla grandezza di divisibilità, perché operativamente è impossibile attribuire alcun significato alla somma di temperature. Infatti la temperatura è una grandezza di stato ed è misurata, per classificazione, associata alla classe di grandezze di distanza. Il fenomeno che serve a definire la temperatura è il fenomeno della dilatazione. Tuttavia per poter ordinare in serie le grandezze di temperatura, occorre misurare questa dilatazione. La misura di questa dilatazione è fatta con misure di lunghezza o di volume, e le misure di queste grandezze sono di tipo quantitativo.

Analisi delle operazioni necessarie per eseguire una misura diretta

Tutti i tipi di misura sono riconducibili operativamente al solo tipo di misura diretta, ovvero quello di tipo quantitativo. Pertanto tralasciando di considerare l'operazione ovvia del computo dei campioni, è necessario studiare questo procedimento, analizzandone le operazioni fondamentali, con maggiori particolari. Per rimanere nel piano della operazionalità dei concetti, precedentemente introdotta, é necessario dare la definizione operazionale di somma dei campioni, cioè di quella operazione che permette di costruire un insieme che possieda, per costruzione, una grandezza della classe che si vuole misurare, associata ad una grandezza di divisibilità. La scelta della definizione logica di somma, inerente all'operazione di misura di una certa classe di grandezze, è largamente arbitraria e non ha giustificazioni preventive; tuttavia deve sottostare ad alcune limitazioni:

- deve dare luogo a quantità, somma delle quantità elementari, che possiedano grandezze delle stesso genere della grandezza posseduta dai singoli elementi sommati;
- deve essere di tipo univoco, cioè deve potersi sommare in uno ed un solo modo, il numero di quantità della stessa classe, in particolare il numero di elementi del campione;
- la definizione di somma deve essere indipendente, sia della grandezza posseduta da ciascuna quantità sommata (in particolare, dall'elemento del campione) sia dal numero di quantità da sommare;
- deve possedere tutte le proprietà della somma dei numeri e cioè la proprietà commutativa ed associativa.

Dal punto di vista operazionale la scelta del criterio di somma degli elementi del campione richiede che sia assegnato un certo tipo di evento, dotato di una struttura più o meno complessa. Le quantità da sommare intervengono, in questo evento unitamente ad altre quantità che si chiamano ausiliarie, in possesso di grandezze appartenenti a classi, in generale, diverse da quella cui appartengono le quantità da sommare. Il processo di somma consiste nel reiterare successivamente questo evento, verificando che si mantengano costanti (cioè siano sempre in possesso della stessa grandezza) le quantità ausiliarie, presenti nell'evento. Queste condizioni e, in particolare, le proprietà commutativa ed associativa, sono necessarie, perché abbia significato l'espressione: una quantità possiede una grandezza doppia, tripla, ecc. di quella posseduta da un'altra quantità.

La scelte dell'evento, delle quantità ausiliarie, del loro tipo, del loro numero e della loro grandezza è fatta in mode che le condizioni sopraccitate risultino soddisfatte. Per citare un esempio, si pensi al metodo di somma dei campioni di lunghezza. Si definisce operazione di somma di due o più lunghezze, la disposizione di due o più quantità di lunghezza, in modo che abbiano un estremo in comune e che l'angolo, compreso fra esse, sia un angolo piatto. Allora per una corretta definizione di somma, occorre verificare una distanza nulla, fra i due estremi consecutivi, ed un angolo piatto, fra i due segmenti allineati. Ognuno dei procedimenti di somma richiede la scelta di grandezze ausiliarie e dei metodi, per realizzarle e controllarle nell'evento. Esse costituiscono un elemento di fondamentale importanza, nelle operazioni di misura. Infatti la loro necessaria presenza è il fattore di maggiore complessità di tutto il procedimento.

Invece nel giudizio d'uguaglianza fra le due quantità, il meccanismo della percezione e del confronto può rimanere ignoto, mentre ben chiaro è il significato operazionale in esso contenuto, essendo perfettamente conosciute le operazioni necessarie per poter dire: queste due quantità sono uguali. Nell'esempio precedente, il giudizio sull'uguaglianza di due quantità, messe a confronto, può essere ottenuto per mezzo del tatto o della vista. Nel primo caso, si dicono uguali due quantità, rappresentate da sbarre, quando al tatto si constati che contemporaneamente due testate coincidono, avendo sempre al tatto preventivamente accostato le testate opposte, delle stesse sbarre. Nel secondo caso, il giudizio di uguaglianza è emesso quando i tratti estremi, tracciati su una sbarra, risultino allineati con i corrispondenti tratti estremi, tracciati sull'altra sbarra [50].

Struttura di uno strumento di misura secondo lo schema logico

Dell'analisi delle operazioni necessarie per eseguire una misura, si può facilmente dedurre la struttura funzionale di uno strumento misuratore, secondo uno schema logico:

- Innanzitutto elemento indispensabile delle strumento è ill campione, costituito da quantità uguali fra loro, cioè tutte in possesso di una medesima grandezza, appartenente alla classe delle grandezze che si vogliono misurare. Pertanto ogni strumento misuratore di tipo logico, possiede un suo particolare campione le cui caratteristiche sono tipiche per ogni strumento.
- All'interno dello strumento, gli elementi del campione debbono essere sommati, per ottenere la grandezza ausiliaria. L'evento, scelto per tale operazione, deve essere riproducibile ogniqualvolta sia necessario. Pertanto lo strumento misuratore deve essere munito di organi che riproducano l'evento e verifichino la costanza delle quantità ausiliarie [51].
- Infine l'organo, atto ad emettere il giudizio di identità od uguaglianza, nel caso più semplice, é costituito dal senso stesso, usato dall'operatore. Nei casi più complessi invece, il senso dell'operatore può trovarsi al termine di una lunga serie di organi fisici intermedi il cui compito è quello di acutizzare la sensibilità dell'operatore, senza nulla aggiungere o togliere alla funzione di giudizio.

L'insieme di questi tre elementi ed organi, necessari e sufficienti per l'esecuzione di qualsiasi misura di carattere quantitativo, costituisce lo strumento di misura. Uno strumento, cosi costituito, non solo serve a misurare le grandezze di una data classe, ma anche definisce, in maniera completa, sia da un punto di vista operativo, sia da un punto di vista logico, la classe delle grandezze da misurare. Inoltre da un punto di vista metrologico, si deve ammettere che, ad ogni complesso, corrisponde una classe di grandezze che da lui solo possono essere misurate. Questo rigorismo logico è costretto a cedere, di fronte alle necessità pratiche ed anche davanti al buon senso ed all'intuito, essendo enormemente probabile (e praticamente vero) che due complessi strumentali, basati sugli stessi fenomeni sensoriali e fisici, danno luogo a classi di grandezze e misurano grandezze dello stesso genere.

Si pone allora il problema che una stessa grandezza sia misurata nello stesso modo da due complessi strumentali diversi, ciascuno dei quali ha Il suo proprio campione. Pertanto sorge la necessità di uniformare gli strumenti, in modo che diano tutti come risultato finale della misura di una stessa grandezza lo stesso numero. Tuttavia non è necessario dotare gli strumenti di campioni tutti uguali tra loro, occorre invece modificare la determinazione della misura. Pertanto la misura generalizzata, non più legata al campione, non è un'operazione unica, ma un rapporto fra i risultati di due operazioni, descritte nell'immediato prosieguo. Il

[50] Il criterio e la sensazione, usati per emettere il giudizio d'uguaglianza fra le due quantità, fanno parte integrante dell'operazione di misura delle grandezze di una classe. Pertanto è necessario inserire nella definizione della classe di grandezze con quel procedimento di misura.

[51] Naturalmente sia il tipo d'evento, sia le grandezze ausiliarie, devono essere identici, per tutti quegli strumenti che intendono misurare grandezze della stessa classe.

rapporto, fra queste due misure, é ricondotto ad un rapporto fra numeri (e non più fra grandezze) e dà luogo ad una frazione propria fra numeri interi (misure di grandezze) che ha, come risultato un numero razionale (invece di un numero intero).

- La prima misura è quella della grandezza posseduta da una certa quantità relativa al campione proprio dello strumento usato;
- la seconda misura, misurata con il medesimo strumento e con il medesimo campione, è quella della grandezza posseduta da una quantità arbitraria, universalmente accettata come grandezza di riferimento e, come tale, gelosamente custodita che prende il nome di unità di misura [52].

Il continuo fisico e la soglia della sensibilità sensoriale

Il metodo di misura, descritto dal procedimento logico, associa mediante la classe delle divisibilità ad ogni grandezza solo numeri interi. La classe di grandezze, definite dallo strumento di misura, è discontinua, come discontinua è la serie dei numeri interi. Pertanto occorre concludere che le grandezze, entro ciascuna classe, non sono continue. Ogni affermazione sulla continuità delle grandezze può essere postulata, in sede metafisica, ma in nessun caso, può essere fisicamente provata e definita operativamente. Tuttavia questa conclusione cozza contro l'abitudine d'intendere la realtà, come continua. Essa è così storicamente radicata che, solo superficialmente, è scalfita delle odierne teorie della fisica quantistica. D'altra parte, la pratica operativa offre una constatazione importante che permette di superare la questione, senza distruggere la visione abituale del mondo della natura.

Si e osservato, per esempio, che un peso A di 10 grammi ed un peso B di 11 grammi, producono sensazioni identiche; inoltre che nemmeno il peso B può essere distinto da un peso C di 12 grammi, ma tuttavia che il peso A ed il peso C possono distinguersi facilmente. I risultati bruti dell'esperienza sono esprimibili delle relazioni seguenti: A = B, B = C, A ≠ C. In queste relazioni, si ha un disaccordo con il Principio di non contraddizione. Non si può credere che due quantità, uguali ad una terza, non siano uguali tra loro e percio si è spinti a concludere che A è differente da B e B da C, benché l'imperfezione dei sensi non permetta di distinguerli (Jules Heni Poincaré, la Scienza e l'Ipotesi).

Questa constatazione a carattere nettamente sperimentale ed induttivo, permette di salvare il concetto di continuo fisico nella classe di grandezze, ma contemporaneamente porta ad ammettere la presenza di una soglia di sensibilità, sia fisiologica che strumentale, nelle apparecchiature, atte alla misura di una quantità. Infatti la grandezza posseduta degli elementi del campione é finita e, di conseguenza, la serie delle quantità di confronto, costruite entro lo strumento (sommando gli elementi del campione), é discreta. Invece le grandezze, entro ciascuna classe, costituiscono un continuo fisico. Pertanto una quantità data che possiede una di queste grandezze potrebbe non risultare uguale ad alcuna delle quantità, costruita con i campioni, ed allora, la grandezza posseduta dalla quantità data non sarebbe una quantità misurabile, per mezzo dello strumento disponibile.

Si ammetta ora che le sensazioni non siano perfette, perché non distinguono differenze fra le quantità inferiori a certi valori, dette soglia di sensibilità delle sensazioni. Se sperimentalmente si trova (ed è sempre possibile, se si usa un campione il cui elemento, seppure finito, sia sufficientemente piccolo) che ciascuna quantità data sia associabile ad una delle quantità di confronto, questo non significa che l'ipotesi sulla

[52] Nella pratica, si è arrivati ad uniformare i campioni, costruendoli sempre in modo da risultare sottomultipli decimali delle grandezze di riferimento (od unità di misura), cosicché questo rapporto sia reso ancora più semplice.

continuità delle grandezze date, entro la loro classe, sia errata e che esse formino una serie discreta, ma più semplicemente che la differenza, fra le due quantità, non è avvertita dalle sensazioni, essendo inferiore alla soglia di sensibilità delle sensazioni stesse. Pertanto risulta giustificato che le misurazioni non diano risultati corrispondenti al continuo matematico, supposto presente entro la classe delle grandezze date, ma rispecchiano la discontinuità stessa dell'operazione di misura.
Al fine di definire meglio il concetto di soglia di sensibilità strumentale, siano prese in esame una quantità data, in possesso di una certa grandezza, da misurare, ed una quantità di confronto in cui sia possibile variare la grandezza con continuità (nell'ipotesi dell'esistenza del continuo). Dopodiché si può stabilire, attraverso l'organo preposto nello strumento, se le due quantità sono uguali o diverse. Inizialmente si supponga che la quantità di confronto sia minore della quantità data e che, variandola con continuità, si può raggiungere un valore della grandezza, tale che l'uguaglianza sia finalmente raggiunta. Da questa situazione, in avanti, per un certo periodo, all'aumentare della grandezza di confronto, non cambia il giudizio d'uguaglianza tra le due grandezze. Tuttavia procedendo oltre, le due quantità differiscono e la quantità di confronto diventa maggiore della quantità data.
Poiché si è supposto di aver aumentato con continuità la grandezza posseduta dalla quantità di confronto, l'intervallo compreso fra l'inizio e la fine dell'uguaglianza, dipende dalla soglia di sensibilità strumentale. Allora questa differenza, corrispondente alla differenza fra le due grandezze estreme, definisce la grandezza della soglia di sensibilità strumentale che avrebbe anche valore operazionale, se fosse possibile descrivere come far aumentare con continuità, a grandezza posseduta dalla quantità di confronto. Ad esempio, nel caso che la quantità di confronto fosse una quantità di lunghezza, si può far aumentare la sua lunghezza, con continuità, aumentandone la temperatura, senza ricorrere alla somma di elementi del campione. Tuttavia questo procedimento non permetterebbe la misura diretta degli estremi dell'intervallo cercato e, di conseguenza, della grandezza corrispondente alla soglia di sensibilità.

La misura "vera" di una grandezza

L'introduzione, nella operazione del misurare di una zona d'incertezza, chiamata soglia di sensibilità strumentale, pone il problema della misura "vera" di una grandezza. L'apparato misuratore è, al contempo, il mezzo operativo per definire e misurare la grandezza in esame, ed allora la risposta alla domanda, sull'esistenza di una misura "vera" e di come ottenerla, può essere data solo in base allo strumento di misura. Infatti se la grandezza è definita a mezzo dello strumento e se lo strumento ha una certa soglia di sensibilità, anche la grandezza è definita ed operativamente esiste con questa soglia d'incertezza. Pertanto è assurdo pretendere che la misura "vera" di una grandezza sfondi questa soglia, sia pure al prezzo di alcune astrazioni concettuali, ed allora la cosiddetta misura "vera" dovrà reggersi su una definizione più restrittiva, ma al contempo, operativamente più reale.
D'altra parte, non è nemmeno giusto proiettare la misura "vera" nel futuro, ammettendola come limite d'una ipotetica serie di strumentazioni, sempre più perfezionate. Infatti così facendo non si proietta, nel futuro, solo la misura "vera", ma anche la classe delle grandezze da misurare. Allora può accadere effettivamente che un domani si abbiano strumenti più perfetti, ma ad essi corrisponderanno grandezze diverse dalle attuali, anch'esse assai più perfette. Infine anche i concetti hanno una loro evoluzione, cioè una loro vita in cui, a volte, si modificano perfezionandosi, ma proprio per questo, quello che si misurerà domani, con altri strumenti ed altri metodi, non sarà la stessa grandezza che si misura oggi. Pertanto la definizione di misura

"vera" di una grandezza deve essere valida attualmente e deve essere intrinseca, come la grandezza cui si riferisce, allo strumento ed ai metodi con cui si effettua la misura.
Questa definizione può essere ricavata, solo partendo della definizione stessa di misura. Infatti caratteristica fondamentale della misura di una grandezza è l'univocità (mediante il metodo di misura prescelto). Pertanto ad una certa grandezza deve potersi attribuire uno ed un solo valore, ovvero sempre lo stesso numero, comunque sia ripetuta l'operazione di misura, sempre con la stessa strumentazione. Traducendo questa definizione in termini operazionali, si può dire che la misura "vera" della grandezza posseduta da una quantità data è la misura, eseguita con uno strumento i cui organi operazionali siano in possesso di tre proprietà (descritte nell'immediato prosieguo). La giustificazione teorica di queste proprietà è abbastanza evidente; tuttavia è anche necessario descrivere operazionalmente, come sia possibile verificare la loro presenza nello strumento, usato per effettuare la misura.

- Il campione deve essere costituito da elementi tutti uguali, cioè in possesso della stessa grandezza (un campione con tale proprietà è perfetto per definizione).
- La grandezza, posseduta dagli elementi del campione, deve essere identica alla grandezza delle soglia di sensibilità strumentale.
- L'evento (mediante il quale si esegue la somma dei campioni) deve potersi reiterare in maniera perfettamente identica (questa esigenza equivale a richiedere che le grandezze ausiliarie, proprie dell'evento prescelto, siano imposte e controllate ad ogni ripetersi dell'evento, con precisione sufficiente).

Per tale analisi, occorre partire delle operazioni necessarie alla verifica della terza proprietà. Se l'evento per mezzo del quale si esegue la somma di ogni campione non si ripete in maniera identica, ogni volta, il risultato della somma di tutti i campioni, presi in considerazione, di volta in volta, varia e l'univocità della misura é persa. Si scelga allora un numero qualsiasi di elementi del campione, perché l'evento possa dirsi realizzato perfettamente, occorre che la somma di questi elementi, comunque ripetuta, con quella strumentazione, dia come risultato quantità sempre in possesso della medesima grandezza, cioè tutte uguali fra loro. Il giudizio di uguaglianza, fra queste quantità, deve essere emesso dall'apposito organo di confronto, proprio dello strumento in esame. Allora proprio la seconda proprietà è necessaria per poter misurare univocamente tutte le grandezze di una classe.
Se si avesse un elemento di grandezza maggiore della soglia, non si riuscirebbe mai (salvo casi rarissimi) a trovare uguaglianza tra le quantità composte, con il campione, e le grandezze da misurare. Invece se si avesse un elemento di grandezza minore della soglia, l'aggiungere o il togliere uno o più campioni non verrebbe avvertito e non si avrebbe alcuna corrispondenza univoca fra misure e grandezze. Pertanto questa condizione risulta verificata, quando è sempre possibile costruire, con gli elementi del campione, una quantità di confronto, uguale ad una qualsiasi quantità data, in possesso di una qualsiasi grandezza della classe in questione [53]. La prima proprietà, cioè il possesso di un campione perfetto, è raggiunta quando, estratti a caso e sommati un certo numero di elementi, si ottiene una quantità uguale alla somma di un qualsiasi altro gruppo di elementi, estratti a caso dal campione, avente la stessa numerosità.
Alla fine, il giudizio di uguaglianza fra le quantità deve essere emesso con l'organo a questo scopo preposto, nello strumento del quale si sta analizzando il campione. Di conseguenza, la definizione di misura "vera" di

[53] L'uguaglianza costruita deve poi poter venir meno, se si toglie o si aggiunge, alla quantità di confronto, anche un solo elemento del campione.

una grandezza, ottenuta in base alla enunciazione delle tre proprietà strumentali, necessarie per ottenerla, ha il pregio di essere legata solamente a fattori attuali, inerenti allo strumento misuratore nel suo complesso, e di contenere in sé gli elementi operazionalmente efficienti per poterla determinare. Resta da osservare, come Cunietti usi l'aggettivo "vero", proprio nei termini di una metafisica moderna (cioè semplicemente andando oltre le cose fisiche), insieme empirista e convenzionalista, e non certamente in modi idealisti, collegati a metafisiche antiche che rimandino, a loro volta, a strani arcani. Infatti una verità idealizzata non è necessaria, né sufficiente, ad alcuna comparazione ed alla formulazione di giudizi di valore [54].

Sensibilità e precisione di uno strumento

Per completare la trattazione sulle misure dirette, dal punto di vista logico operazionale, occorre ancora precisare la definizione di due termini di uso comune che sono, quasi sempre, associati all'operazione di misura: sensibilità e precisione.

- Sensibilità di uno strumento di misura diretta è la minima grandezza della classe che lo strumento può definire e misurare.
- Precisione di uno strumento di misura diretta è la grandezza maggiore che lo strumento può definire e misurare in maniera univoca.

Entro questi due limiti lo strumento si comporta in modo perfetto. Infatti nell'intervallo, fra la sensibilità e la precisione, lo strumento correla le grandezze ed i numeri, in maniera univoca. La sensibilità, ovvero minima grandezza misurabile con uno strumento, è la grandezza posseduta dall'elemento campione, a sua volta, dipendente dalla soglia di sensibilità strumentale. Invece una definizione operativa della precisione è più difficile, perché meno chiaro è il concetto che si vuole esprimere con la parola precisione. Operativamente uno strumento è preciso, in senso assoluto, cioè raggiunge la massima precisione, quando misura, in modo univoco, tutte le grandezze della classe, da lui stesso definite. Una misura precisa presuppone un campione perfetto, secondo la definizione data, e perfezione anche nella esecuzione della somma degli elementi del campione, secondo lo schema prefissato.

Tuttavia poiché, nella realtà, questa perfezione non è ottenibile, si incorre in questo inconveniente che non tutte le grandezze della classe si possono misurare in modo univoco. D'altra parte, è giustificato supporre che, per la imperfezione del campione e dell'organo per la somma, le imperfezioni dell'operazione di misura crescano con il crescere del numero di elementi combinati assieme. Pertanto quanto maggiore è il numero di elementi del campione, sommati per ottenere una quantità, in possesso di una grandezza indipendente dal gruppo di elementi, presi a caso, e dall'operazione di somma, tanto più preciso è quello strumento. Allora la definizione di precisione di uno strumento è il numero massimo di elementi del campione che è possibile sommare per dar luogo ad una quantità la cui grandezza sia indipendente dal gruppo di elementi del campione prescelto e dalla operazione della loro somma.

La definizione operativa della precisione richiede la descrizione delle operazioni necessarie per verificarla.

- Si sommino diversi gruppi di elementi del campione, ottenendo altrettante quantità, e le si confrontino fra loro, per mezzo dell'organo di giudizio dello strumento misuratore.

[54] La verità idealizzata non è sufficiente, perché non costruisce scale di valori, e non è necessaria, perché una scala di valori opera sempre in ambiti limitati e discreti, senza dover ricorrere a "cose" infinitamente grandi od infinitamente piccole. Pertanto secondo Cunietti, la metrologia è giustamente una pratica operativa, accettata per convenzione tra i più, e non una singolare "religione".

- Queste somme possono risultare tutte uguali, cioè in possesso dalla stessa grandezza, oppure diverse l'una dall'altra.
- Individuato numero tale che:

  - le combinazioni di elementi, in numero minore (del numero individuato), comunque estratti dal campione, diano luogo a quantità sempre uguali;
  - le combinazioni di elementi, in numero maggiore (dello stesso numero individuato), diano luogo a quantità non sempre tutte uguali tra loro,

- il numero individuato rappresenta la precisione strumentale od almeno un suo indice operativamente significativo, essendo la misura della grandezza maggiore, misurabile univocamente con lo strumento in uso.

Uno strumento costruito con un certo campione può uscire dal suo limite superiore, impostogli dalla sua precisione. Allora altre grandezze, maggiori della grandezza limite, detta precisione, possono essere misurate dallo strumento, ma questi risultati non danno luogo a misure unicamente determinate. In pratica invece, gli strumenti sono quasi sempre usati, anche perchè così suggerisce l'economia di misura, proprio per misurare grandezze a cavaliere o superiori della precisione strumentale. In questo caso, l'indice della precisione è relativo alle varie operazioni di misura e non solo allo strumento impiegato (al quale rimane invece indissolubilmente legata la sensibilità). Allora la definizione della precisione della misura di una grandezza, posseduta da una quantità data, attiene globalmente all'analisi statistica dei risultati, uscendo così dalla semplice trattazione metrologica.

Misure dirette e relative

Le grandezze fisiche sono definite operazionalmente dallo strumento che serve per misurarle. La misurazione delle grandezze di una classe consiste nel correlare, a ciascuna di esse, in maniera univoca, un numero. Questa correlazione può avvenire attraverso la classe tipica delle divisibilità, oppure attraverso la classe tipica delle distanze. Le classi correlate ai numeri per mezzo della classe delle divisibilità sono classi di grandezze, tipicamente quantitative, per le quali ha significato la somma delle grandezze e sono misurate con procedimenti di confronto, detti diretti. Le classi correlate ai numeri per mezzo delle grandezze di distanza sono classi di grandezze di stato, per le quali non ha significato la somma delle grandezze e sono misurate con procedimenti di classificazione, detti indiretti. I procedimenti di misura diretta delle grandezze di tipo quantitativo sono basati sullo strumento logico di misura diretta.

Nello schema del procedimento di misura con lo strumento logico e semplice si sommano gli elementi del campione, finché si ottiene una quantità giudicata uguale alla quantità data. Il numero di elementi sommati è la misura cercata, riferita allo strumento usato. Tuttavia per svincolare la misura dallo strumento usato generalizzandola, si esegue il rapporto fra il numero intero ottenuto ed il numero intero ottenuto, misurando con quello stesso strumento, la quantità detta unità di misura. Gli organi essenziali dello strumento logico sono il criterio per giudicare l'uguaglianza (o meno) di due quantità: il campione e l'evento per la somma dei campioni. Il criterio di giudizio richiede l'intervento diretto o indiretto di una facoltà sensoriale, caratterizzata da una soglia di sensibilità. Il campione è un insieme di quantità, tutte uguali, in possesso di una grandezza circa uguale alla grandezza della soglia della sensibilità sensoriale dell'organo di giudizio.

L'evento mediante il quale si esegue la somma dei campioni deve rispettare, oltre alle proprietà della somma dei numeri, anche quella di essere univoco e reiterabile, in maniera identica, su un numero qualsiasi di elementi del campione. Le misure sono univoche, quando gli organi dello strumento sono perfetti. La perfezione degli organi è operativamente descrivibile e comprende un certo numero di prove da eseguirsi sullo strumento. Gli strumenti non sono mai perfetti, nell'intero campo di misura; tuttavia esiste sempre un intervallo del campo entro il quale si comportano come strumenti perfetti. L'estremo inferiore del campo si chiama sensibilità, l'estremo superiore. Le misure con lo strumento logico associano un numero alla grandezza con un'operazione tutta interna alla classe delle grandezze che con quello strumento sono misurate e definite [55].

Classi di grandezze definite e misurate indirettamente [56]

Le grandezze appartenenti a classi riconducibili, per la loro misura, alla classe di grandezze di distanza sono misure indirette, vere e proprie, perchè per la loro disposizione seriale (attraverso la quale si associa il numero alla grandezza) si fa uso d'un fenomeno e d'una convenzione arbitraria. Nella maggior parte dei casi, questa convenzione implica la misura diretta di una grandezza di tipo quantitativo, cioè appartenente ad una classe la cui misura si ottiene mediante l'associazione alle grandezze di divisibilità. La maggior frequenza di questo secondo criterio di classificazione deriva dalla possibilità di eseguire una classificazione teoricamente continua. Ad esempio, il procedimento riguardante la classificazione della durezza dei minerali, con il procedimento semplice della scalfittura, non può mai portare ad una classificazione continua della grandezza di durezza.

Infatti per ogni misura di una grandezza nuova ed intermedia, si genera uno scompiglio, nella misura delle grandezze che la seguono, dovuta all'inserimento delle nuova grandezza. Allora la continuità ideale, riconosciuta nelle classi di grandezze, è contraddetta, senza possibilità di superamento, nella misura della grandezza stessa. Invece un secondo esempio, con la misura degli stati termici, ricorre al fenomeno della dilatazione del mercurio. Mediante criteri quantitativi che non contraddicono la continuità ideale delle grandezze nelle rispettive classi, sono misurate le dilatazioni e, mediante queste, attraverso apposite convenzioni sulla serializzazione, gli stati termici o le temperature dei corpi. In questo tipo di procedimento, le cui derivazioni sono molteplici, il fenomeno fisico assume una funzione preponderante ed anzi essenziale. E' lo stesso fenomeno che permette la serializzazione continua delle grandezze e la misura [57].

Fenomeni fisici loro astrazioni e schematizzazioni concettuali

Per meglio comprendere il procedimento di misura, occorre giustificare, in maniera sommaria, il significato di fenomeno, reale e concreto, e della trasformazione cui è assoggettato nel processo scientifico. La scienza

---

[55] Gli elementi del campione (con i quali si costruiscono le grandezze di confronto) sono quantità tutte uguali, perché possiedono una medesima grandezza della stessa classe delle grandezze da misurare. Inoltre a questa stessa classe appartiene la grandezza posseduta dall'unita di misura. Pertanto queste misure sono le uniche di tipo diretto ed anche relative, perché tutte le operazioni rimangono nell'ambito della stessa classe.

[56] Con una dizione più moderna, le misure (od osservazioni) indirette sono:

- funzioni di quantità (direttamente) osservate, se esplicitabili rispetto ad un dato modello funzionale;
- parametri (eventualmente vincolati tra loro) dello stesso modello funzionale, se non esplicitabili.

Inoltre così come le osservazioni dirette possono essere tra loro condizionate, anche i parametri di un modello funzionale possono essere legati tra loro da relazioni di vincolo.

[57] Da un punto di vista strettamente operazionale, anche il fenomeno, scelto per misurarla, definisce la classe delle grandezze. Pertanto le classi di grandezze, misurate e definite, per mezzo di un fenomeno, secondo il procedimento, formano il vastissimo e numerosissimo gruppo di grandezze, misurate e definite, indirettamente.

fisica ha lo scopo d’indagare sulla natura dei fenomeni, in maniera il più possibile oggettiva e, per far questo, passa attraverso una schematizzazione, sempre più minuta, ma anche sempre più vasta ed universale della natura. Pertanto essa mira a costruire un modello che riproduce unitariamente la realtà fenomenica. Questo modello è l'insieme delle ipotesi, delle teorie e delle leggi. I fenomeni della natura, siano essi di origine puramente indipendente dalla volontà dell’uomo (fenomeni), oppure provocati da questa volontà (esperimenti), salvo rari casi elementari, si manifestano sotto un aspetto assai complicato entro il quale si possono individuare grandezze, di specie diversa, legate assieme in quell’evento.
Come le grandezze sono astrazioni concettuali necessarie, per la conoscenza scientifica, così in generale, anche i legami (che in ogni evento o fenomeno fisico stringono fra loro le grandezze), sono schematizzati mediante relazioni valide, non fra quantità, ma fra misure di grandezze, isolate nel fenomeno. La ricerca non s’interessa di stabilire l’origine, teorica o sperimentale, delle relazioni analitiche [58]. Occorre invece ribadire il principio che le relazioni analitiche, astrazioni concettuali di fenomeni, sono valide solo fra le misure delle grandezze e costituiscono una rappresentazione del fenomeno il quale, da quell’espressione analitica e da quella grandezza, risulta definito. Da un punto di vista metrologico, non è necessaria alcuna dimostrazione teorica o prova sperimentale delle relazioni fra grandezze, in quanto esse vivono di vita autonoma, purché in esse si possano introdurre numeri che sono misure di grandezze.
Le relazioni fra le misure si presentano in forma e con aspetti diversissimi; tuttavia essendo espressione di un legame fra le grandezze (con le quali si sintetizza un fenomeno od un esperimento) sono espresse da funzioni sia implicite che esplicite delle misure delle grandezze, presenti nel fenomeno o nell’esperimento. Questo ultimo caso, cui si puo ricondurre generalmente anche l’altro caso, purché la funzione sia di tipo analitico, è il più frequente. Ovviamente nell’espressione di questa funzione, oltre alle misure delle grandezze (presenti nel fenomeno o nell’esperimento e descritte della funzione stessa), compaiono anche altri parametri generici, alcune costanti fisiche, alcuni coefficienti numerici, ecc. (tutti dati di tipo numerico che servono a rendere definita la soluzione della funzione in esame, anche se la sua effettiva computabilità pratica può essere molto complicata).

La misura indiretta e le leggi fisiche

Nella misura della temperatura dei corpi, caso tipico di misura indiretta per mezzo di un fenomeno fisico, il fenomeno usato ha una schematizzazione concettuale assai semplice che lega lo stato termico al volume della sostanza (liquida o gassosa), usata nel termometro. Esistono tuttavia casi più complessi nei quali il fenomeno usato per la classificazione e la misura collega più di due differenti tipi di grandezze. Pertanto la sua schematizzazione concettuale è una funzione a più variabili. La posizione della grandezza nella serie dipende allora dal valore che la funzione assume, al variare delle misure di due (o più) altre grandezze, presenti nel fenomeno. Inoltre se si vuole che il valore della funzione risulti definito e calcolabile, bisogna che queste grandezze siano tutte misurabili, in maniera diretta, od almeno la loro misurazione sia riconducibile a misure dirette.
Quando una funzione è in forma esplicita, le grandezze contenute sono chiamate determinanti, mentre la grandezza, corrispondente alla funzione, è detta determinata (altrimenti determinata è una sola delle grandezze, presenti in forma implicita, essendo determinanti tutte le altre). In tal caso, la funzione assume il

[58] La ricerca accetta l’origine, teorica o sperimentale, delle relazioni analitiche come risultato, d’elaborazioni precedenti sulla cui verità o veridicità non é più necessario indagare.

compito di definire, oltre che di misurare, le grandezze di una certa classe. La classe di grandezze le cui misure sono ricavate da questo tipo di relazioni è una classe di grandezze la cui definizione è data dalla stessa relazione. Pertanto la sua misura non si effettua mediante operazioni da eseguirsi sulle quantità in possesso di quelle grandezze, ma inserendo le quantità in una funzione prefissata, misurando le altre grandezze presenti nel fenomeno e calcolando il valore numerico della relazione. Questi sono anche i tre momenti nei quali si può intendere idealmente suddivisa l'operazione di misura indiretta di una grandezza:

- ❑ produzione del fenomeno;
- ❑ misura diretta delle grandezze determinanti;
- ❑ calcolo della misura della grandezza determinata.

Se una funzione è usata entro qualche schema operativo, per la misura indiretta della grandezza di una classe che così è anche definita, la sua disponibilità risulta esaurita, per operazioni di misura di altre grandezze. Pertanto questa funzione non può, opportunamente rimaneggiata algebricamente, servire per misurare o definire, un'altra grandezza, oppure un'altra ancora. Infatti qualsiasi nuovo servizio esclude il primo, essendo una sola la grandezza determinata, mentre tutte le rimanenti grandezze, presenti in un fenomeno, devono essere determinanti e, di conseguenza, misurabili e definibili, in maniera diretta. Il gruppo delle grandezze misurate e definite indirettamente, per mezzo di queste relazioni, unitamente al gruppo delle grandezze misurate e definite direttamente, formano un complesso di grandezze che, in generale, esaurisce tutte le grandezze presenti nei fenomeni propri di una certa porzione della scienza.
Ad esempio, le grandezze fondamentali della meccanica classica più le grandezze derivate, ottenute per via indiretta, coprono la totalità delle grandezze connesse con i fenomeni propri del dominio della meccanica stessa. Tuttavia tutti i fenomeni mediante i quali sono definite o rese misurabili le grandezze derivate non esauriscono tutti i fenomeni inerenti quel campo. Altri fenomeni, a loro volta, sintetizzati in relazioni dello stesso tipo, possono essere assunti come mezzi per definire e misurare una certa grandezza, per via indiretta, ma la grandezza, cosi ottenuta, deve comunque trovarsi già definita nel gruppo precedente [59]. Se dati sperimentali o deduzioni teoriche sufficienti garantiscono che le due classi di grandezze, definite e misurate in maniera diversa, sono coincidenti, cioè sono la stessa classe di grandezze, si è costruita una legge fisica.

Dal punto di vista del misuratore, la definizione operazionale di legge fisica individua una classe di grandezze definita e misurata in modo indiretto, coincidente con una classe di grandezze definita e misurata in maniera diretta, oppure definita e misuruta in maniera indiretta, per mezzo di un fenomeno diverso da quello usato per definire o misurare la prima classe di grandezze.

Le unità di misura delle grandezze misurate indirettamente

La misura delle grandezze di distanza si basa su due scelte arbitrarie, quella del centro o zero della serializzazione e quella dell'intervallo unitario fra due successive grandezze. Se si vuole generalizzare il criterio di misura delle grandezze definite e misurate indirettamente, si deve svincolare queste scelte dall'arbitrio dell'operatore e, come già fatto per le grandezze misurate direttamente, stabilire universalmente, mediante opportune convenzioni, questi due elementi della serializzazione. Stabilire questi elementi equivale a scegliere, per le misure indirette, lo zero e l'unità di misura della scala numerica (secondo la quale le

[59] In questo caso, la grandezza è definita e misurata in duplice modo: mediante due fenomeni distinti e due misurazioni indirette diverse, oppure mediante una relazione ed una misura diretta.

grandezze sono disposte serialmente). Dall'analisi dei differenti tipi di misura indiretta, si conclude che i criteri seguiti,per queste scelte, sono assai differenti, da caso a caso, ed in parte dipendono dal particolare tipo di relazione algebrica con cui è schematizzato il fenomeno.
Volendo tracciare una pur grossolana casistica si giunge a riconoscere tre modalità nettamente distinte che possono essere dette rispettivamente:

- dei punti fissi;
- delle unità di misura derivate;
- delle leggi fisiche.

Tre esempi illustrano in maniera assai evidente i tre casi.

- Per la misura della temperatura sono state attribuite, in maniera del tutto arbitraria, ma per convenzione universalmente accettata, particolari misure numeriche, ovvero particolari posizioni nella serie delle grandezza a due stati termici, cioè alla temperatura di due corpi, in particolari condizioni. Nella scala Celsius tali punti sono la temperatura del ghiaccio fondente (cui è attribuita la misura di zero gradi centigradi) e la temperatura del vapore d’acqua bollente, sotto una pressione normale (cui è attribuita la misura di cento gradi centigradi). Stabiliti questi due punti, in base al fenomeno della dilatazione di un liquido o di un gas, risultano definite le misure di ogni altro stato termico e conseguentemente lo zero e l‘unita di misura (cioè un grado Celsius) delle temperature.
- La velocità di un corpo è una grandezza definita, in modo indiretto, con il rapporto fra la lunghezza della traiettoria, percorsa da un corpo, ed il tempo impiegato a percorrerla. Questa stessa relazione serve per disporre in serie le velocità e misurarle. La convenzione assunta, per queste misure, stabilisce che le velocità è zero, quando è nulla la traiettoria percorsa in un tempo non-nullo, e la velocità é unitaria (unità di misura della velocità), quando una traiettoria di lunghezza unitaria (unità di misura della lunghezza) è percorsa in un tempo unitario (unità di misura del tempo).
- Il comportamento elastico dei corpi è regolato delle legge di Hooke. Applicando questa legge al caso della flessione di una sbarra, si ha che la freccia (o spostamento) dell‘estremo di una sbarra di una data lunghezza, larghezza ed altezza, sul quale si applica una certa forza è data da una nota relazione, ove è presente una costante di proporzionalità. Questa relazione serve anche a misurare lo spostamento; pertanto una grandezza che è fatta rientrare nelle classe delle lunghezze. La sua unità di misura risulta già definita nell’ambito di quella classe. La relazione che serve a misurarla deve tener conto che lo spostamento appartiene alla classe delle lunghezze e che la sua unità di misura è già prefissata (infatti tiene conto di questo fatto proprio la costante di proporzionalità, con il suo valore numerico) [60].

Generalizzando gli esempi citati, si giunge a stabilire che, in alcuni casi, l’unità di misura è definita in base a scelte arbitrarie, fatte nella classe definita e misurata indirettamente. In altri casi, l’unità di misura è ricevuta come derivazione delle unità di misura delle determinanti. Infine si hanno casi nei quali l’unità di misura della classe delle grandezze, misurate indirettamente, è presa internamente ad una classe di grandezze, misurate direttamente, perché le due classi sono riconosciute coincidenti.

[60] Di conseguenza, l’espressione per misurare uno spostamento è una legge fisica, poiché stabilisce che la classe delle grandezze di spostamento, misurate e definite da certe espressioni analitiche, coincide con la classe delle grandezze di lunghezze, già definite e misurate in maniera diretta.

Le relazioni di proporzionalità

Le relazioni algebriche di tipo esplicito assumono, in teoria, forma qualsiasi; tuttavia le relazioni più frequenti nella definizione di classi di grandezze, misurabili indirettamente, appartengono a due gruppi particolari:

- relazioni somme di grandezze,
- relazioni di proporzionalità fra grandezze.

In fisica, le relazioni di proporzionalità hanno una particolare importanza; infatti per mezzo loro è impostata l'istituzione dei sistemi di unità di misura.

Siano date classi (distinte o no) di grandezze e prese arbitrariamente alcune grandezze, se è possibile determinare, con una legge prefissata, una e una sola grandezza della prima classe, questa grandezza è detta corrispondente, secondo la legge adottata, di tutte le altre grandezze considerate [61]. Inoltre se prese altre grandezze, arbitrariamente nelle stesse classi (esclusa la prima), ed una seconda grandezza, scelta invece nella prima classe e determinata dalle prime grandezze (secondo la legge adottata), si ha sempre (comunque queste grandezze siano scelte) l'uguaglianza del rapporto tra il prodotto delle prime ed il prodotto delle seconde grandezze, allora la funzione adottata è una proporzionalità, le seconde grandezze di queste classi variano proporzionalmente e sono proporzionali alle prime grandezze delle stesse classi, in ragione del rapporto calcolato.

Può sembrare contraddittorio riferirsi a rapporti fra grandezze, quando l'operazione dell'eseguire un rapporto fra grandezze è operazionalmente impossibile a definirsi. Tuttavia queste classi di grandezze sono classi di grandezze già operazionalmente definite ed è possibile misurarle, secondo lo schema logico ed operativo enunciato. Pertanto le grandezze di queste classi non sono grandezze in sé, né tantomeno quantità in possesso di quelle grandezze, ma bensì le loro misure dirette e relative. I numeri sono correlati con ciascuna delle grandezze, appartenenti a ciascuna delle classi definite dagli strumenti impiegati. Infatti i rapporti che compaiono nelle formule sono rapporti fra numeri e, di conseguenza, sono operazionalmente legittimi e possibili, in ogni caso. Questi numeri legano le grandezze alle particolarità strumentali, alle caratteristiche del campione, usato per misurare, ed alla sua dimensione [62].

Misura indiretta di una grandezza per mezzo di una relazione di proporzionalità

Nel caso in cui i suddetti rapporti siano calcolati, avendo a denominatore le unità di misura di queste classi, essi sono detti formula generale di conversione che esprime la relazione di proporzionalità fra le misure generalizzate. Questa espressione è un caso particolare dell'espressione generale (scritta con denominatori generici) e, come tale, può essere usata per misurare e definire indirettamente una classe di grandezze, in maniera autonoma dagli strumenti con i quali si misurano le grandezze determinanti (secondo la legge adottata). Infatti da questa espressione, noto il sopraccitato rapporto costante (esprimibile con i rapporti di grandezze opportune appartenenti alle loro classi), la misura delle generica grandezza di una certa classe si può ottenere per mezzo delle misure generalizzate delle grandezze determinanti (sempre secondo la legge adottata).

[61] In questo caso, la grandezza della prima classe è determinata dal prodotto di queste e queste, a loro volta, sono dette grandezze determinanti la prima classe, secondo la legge adottata.

[62] A riguardo, occorre separare la definizione delle classi di grandezze misurabili indirettamente, attraverso relazioni di proporzionalità, dalle caratteristiche strumentali, proprie delle misure di ciascuna delle grandezze, presenti nel fenomeno. Questa separazione è ottenuta attraverso le generalizzazione del criterio illustrato per le misure dirette relative. Si adotta come riferimento, per ogni classe di grandezze, la grandezza posseduta dalla quantità universalmente riconosciuta come unità di misura di quella classe.

Per un caso di proporzionalità di tipo fisico, sia data una relazione di proporzionalità tra forze (intensive), masse ed accelerazioni. Indicate le unità di misura delle forze ed inoltre una massa ed un'accelerazione tali che determinino l'unità di misura delle forze (conformemente al rapporto, precedente ottenuto, ed all'uguaglianza conseguente), il rapporto ottenuto (fra le forze) è uguale al rapporto tra i prodotti delle masse per le accelerazioni. Infine nel caso, non infrequente, di unità di misura incoerenti tra loro, volendo mettere in evidenza le unità di ciascuna grandezza è necessario moltiplicare e dividere ciascuna grandezza per le proprie unità di misura, così da non alterare il rapporto (fra le forze). Un diverso raggruppamento di fattori e denominatori mette in evidenza i rapporti di ciascuna grandezza con la propria unità di misura ed il rapporto tra queste e le grandezze che determinano l'unità di misura della forza [63].
Le misure indirette basate su relazioni di proporzionalità danno luogo ad una famiglia molto importante e numerosa di classi di grandezze. In questa famiglia, si riconoscono diversità abbastanza evidenti fra le diverse classi, in alcuni casi, dovute all'origine della relazione di proporzionalità, in altri casi, alla forma algebrica della relazione stessa. In base a queste diversità si possono ripartire le classi di grandezze misurabili indirettamente mediante relazioni di proporzionalità, nei seguenti due gruppi:

- le classi ottenute da relazioni di proporzionalità che sono delle definizioni;
- le classi ottenute da relazioni di proporzionalità che sono leggi fisiche.

A sua volta, in questo secondo gruppo si presenta possibile un'ulteriore ripartizione, basata sull'origine teorica o sperimentale della legge fisica (e sulla particolare forma che assume l'equivalente di convenzione).

Relazioni di proporzionalità che sono definizioni

Le classi di grandezze che sono misurate solo indirettamente, pur essendo fisicamente intuibili anche in maniera autonoma e diretta, hanno una relazione analitica che costituisce la definizione stessa delle grandezze. La misura diretta della grandezza di queste classi non è mai eseguita. Ad esempio, si consideri il caso della velocità: il concetto di velocità implica i due concetti di spazio e di tempo. Le operazioni necessarie per misurare e definire la velocità, per mezzo delle grandezze di spazio e di tempo, sono le seguenti. Dapprima si determina l'istante in cui l'oggetto è in una posizione, poi l'istante in cui l'oggetto si trova in un'altra posizione; dopodiché si misura la distanza fra le due posizioni, si divide questa distanza per l'intervallo di tempo intercorso, fra gli istanti dei due passaggi. Questo rapporto è la misura della velocità, ottenuta indirettamente.
Numerosissime sono le classi di grandezze che, al pari della velocità, sono istituite mediante relazioni di proporzionalità, di origine definizionale. In generale, ogni particolare zona dello scibile scientifico (come la meccanica, l'elettrotecnica, la tecnologia, ecc.), possiede una catena di relazioni di questo tipo che collegano, fra loro, tutte le grandezze di quel ramo. L'origine delle relazioni di proporzionalità è teorica, pur essendo in senso lato suggerita dalla esperienza, cosicché la serie delle classi di grandezze, definite attraverso queste relazioni, pur essendo intuibili autonomamente dipendono l'une dall'altra, con successione continua. In ognuna di queste catene di relazioni che collegano classi di grandezze proprie di una parte della scienza, si richiede la presenza di un certo gruppo di classi (almeno una) che risultino misurabili e definite in maniera relativa diretta.

[63] Il prodotto di tutti i quozienti del secondo gruppo è detto equivalente di conversione.

Questo gruppo di classi è considerato fondamentale per quella parte della scienza e ad esso, mediante le relazioni di proporzionalità, sono collegate tutte le altre classi misurate e definite in maniera indiretta. Il numero delle classi, prese come fondamentali, è esiguo e la loro scelta non è subordinata ad alcuna necessità.[64]. Le classi di grandezze misurabili indirettamente e definite da relazioni di proporzionalità, di origine definizionale, offrono questo vantaggio notevole: l'unità di misura propria della classe è anch'essa definita indirettamente dalla unità di misura delle classi fondamentali attraverso la stessa relazione di proporzionalità. Pertanto in questo caso, l'equivalente di conversione è sempre uguale all'unità, giacché nella classe di grandezze così definite, l'unità di misura è scelta coincidente con le grandezze determinate attraverso la relazione adottata dalle unità di misura delle singole classi determinanti.

A causa di questo fatto, ovvero che le unità di misura di queste classi sono definite in maniera indiretta ed esterne, per mezzo delle unità di misura delle grandezze fondamentali, le misure indirette di queste grandezze sono dette assolute. E' qui immediata la citazione del sistema di classi di grandezze proprie delle meccanica: velocità, accelerazione, forza, lavoro, energia, potenza, ecc., cioè classi di grandezze tutte legate da relazioni di proporzionalità, di tipo definizionale, al gruppo delle grandezze fondamentali che, per convenzione, è costituito da tre classi di grandezze: tempo (ma è più giusto dire: durata), spazio (ma è più giusto dire: lunghezza) e massa. Le unità di misura di queste tre classi (durata, lunghezza e massa) dalle quali derivano tutte le altre del sistema sono dette unità di misure assolute e determinate mediante misure dirette.

Tornando alla grandezza di velocità, l'abitudine ad associare il concetto di velocità a quello di spazio e di tempo, secondo la definizione indiretta, in generale, vieta di pensare alla velocità come a qualcosa di indipendente, come una classe di grandezze autonome misurabile direttamente. Tuttavia è operazionalmente possibile misurare la velocità attraverso la classe delle grandezze di divisibilità. A riguardo, scrive Bridgmann:

Si può innanzitutto costruire un campione concreto di velocità, ad esempio, stendendo un filo tra due sostegni con un peso fisso per tenerlo in tensione. Se urtando il filo, lungo di esso si propaga un disturbo che si può seguire con l'occhio, si definisce campione di velocità la velocità di questo disturbo. Un oggetto ha una velocità maggiore del campione, se precede il disturbo, minore se rimane indietro. Si può ora duplicare il campione costruendo un altro sistema di sostegni, con filo teso, e controllare l'uguaglianza delle due velocità osservando se i disturbi procedono insieme. Si misura con il numero due la velocità di qualche cosa che corra insieme con il disturbo del filo del secondo sistema, quando il secondo sistema si muove ad una velocità tale che esso corre insieme al disturbo del primo filo. Si può estendere indefinitamente il processo e misurare qualunque velocità.

Questo metodo di misura contiene tutti gli elementi necessari, per costituire una strumentazione, atta a misurare direttamente. Infatti si ha:

- il campione, costituito dai sistemi con il filo teso;
- il metodo per giudicare l'identità di due quantità, osservando se procedono insieme;
- il metodo di somma definito della condizione che si sommano le velocità, quando il sistema di un elemento del campione corre come il disturbo dell'elemento precedente.

Il numero di elementi da sommare nel modo definito, per ottenere che la perturbazione dell'ultimo elemento proceda come una certa quantità di velocità, dà la misura diretta e relativa della grandezza di velocità che si

[64] L'unica necessità cui appellarsi è quella pratica della possibilità, comodità e precisione di misura diretta.

vuole misurare. Tuttavia qualora l'operazione di misura diretta della velocità, mediante lo strumento descritto da Bridgmann, sia possibile e realizzabile, la classe delle grandezze, definite e misurata con questo metodo, non risulta automaticamente coincidente con la classe delle grandezze, definita per mezzo della misura indiretta. Infatti per stabilire la coincidenza delle due classi, occorre una legge fisica e, da quanto si può dedurre della teoria della relatività ristretta, non è possibile enunciare una legge di tale natura. Addirittura la teoria della relatività porta a stabilire proprio il contrario, perché le due classi di grandezze, l'una definita e misurata direttamente e l'altra definita e misurata indirettamente, non sono coincidenti [65].

Relazioni di proporzionalità derivate da leggi fisiche

La precedente catena di relazioni definizionali, pur tessendo una serie di legami fra tutte le classi di grandezze, proprie di ciascun ramo dello scibile, non esaurisce tutte le possibilità fenomeniche che coinvolgono quelle classi. Ovvero da quella catena, a volte, partono diramazioni che legano, per altra via, due classi, già preventivamente definite. Questi legami sono stabiliti da fenomeni esterni alla successione fenomenica che porta alla costituzione delle classi di grandezze derivate. In generale, le relazioni rappresentanti, in maniera astratta, questi legami sono proporzionalità. In questi casi, tutte le classi di grandezze, in ingresso nella relazione di proporzionalità, risultano già definite da strumentazioni, atte alla misura diretta e relativa di quelle grandezze, oppure da relazioni di proporzionalità, del tipo definizionale già presentato.

Se verificata, in maniera sicura, una relazione diventa una legge e la proporzionalità espressa serve a misurare indirettamente una grandezza, le due classi di grandezze (una definita indirettamente, l'altra direttamente od indirettamente) devono essere considerate coincidenti. Pertanto ad una definizione ed alla corrispondente misura, può essere sostituita l'altra definizione e la corrispondente altra misura. Un esempio di classe di grandezze misurabile indirettamente, per mezzo di relazioni di proporzionalità, derivate da leggi fisiche è dato dalla relazione esistente fra quantità di calore e lavoro. Infatti definita la classe delle quantità di calore e quella dei lavori; su basi sperimentali si può affermare che, in una trasformazione chiusa qualsiasi, subita da un sistema, la quantità di calore scambiata tra il sistema e l'esterno è determinata univocamente dal lavoro totale compiuto dalle forze esterne [66].

Allora è valida la relazione d'uguaglianza del rapporto fra quantità di calore con il rapporto fra lavori e, introducendo le unità di misura delle rispettive classi si ha che il rapporto tra una data quantità di calore e la sua unità di misura è uguale al rapporto tra il corrispondente lavoro e la sua unità di misura, moltiplicato per l'equivalente di conversione, ovvero il rapporto tra l'unità di misura del lavoro e quel lavoro corrispondente all'unità di misura della quantità di calore. Di conseguenza, grazie a questa relazione di proporzionalità, le misure delle quantità di calore possono essere ricondotte a misure di lavoro ed il lavoro è la grandezza determinante, attraverso questa relazione di proporzionalità, della quantità di calore. A sua volta, la grandezza lavoro non è misurabile direttamente, ma è definita attraverso una relazione di proporzionalità, di tipo definizionale, che la fa dipendere da altre grandezze fondamentali, misurate direttamente.

L'equivalente di conversione è detto equivalente termico dell'unità di lavoro e serve a convertire le misure di una grandezze, definita rispetto ad una sua unità di misura, nella misura di un'altra grandezza, di natura

[65] Il caso tipico della velocità illustra bene il carattere delle misure indirette, basate su relazioni di proporzionalità e, mettendone in luce le limitazioni, aiuta ad evitare errori interpretativi. Ad esempio, proprio per la velocità non si può, in alcun caso operativamente valido, ricavare un tempo, oppure uno spazio rispettivamente, come rapporto fra lo spazio e la velocità, e come prodotto della velocità per il tempo. Infatti queste due operazioni richiedono che la velocità, diventata determinante, sia misurata direttamente.

[66] La corrispondenza, stabilita tra le quantità di calore ed i lavori, è una proporzionalità semplice e diretta.

diversa, definita rispetto ad una sua unità. L'esempio citato è tipico delle relazioni di misure indirette, derivate da leggi fisiche, ed indica le differenze fra queste relazioni di misura e le precedenti (definizioni). Infatti nelle relazioni definizionali l'unità di misura della classe è derivata direttamente dalle unità di misura delle classi fondamentali; pertanto l'equivalente di conversione è uguale ad uno. Al contrario, per le relazioni fondate su leggi fisiche, ogni classe è definita in maniera autonoma e contiene già, in se stessa, l'unita di misura. Allora quando è usata per una misura indiretta, il valore numerico dell'equivalente di conversione di quella relazione non risulta uguale, per definizione, all'unità.

Un altro esempio di relazione di proporzionalità, derivata da legge fisica, comunemente usata per l'esecuzione di una misura indiretta, è la legge di Hooke, applicata alla flessione di un'asta incastrata. Questa legge lega la lunghezza del segmento di cui si è spostato l'estremo dell'asta incastrata, caricata con una certa forza, alla misura della forza stessa ed alle caratteristiche di forma delle sbarra. In particolare, lo spostamento è direttamente proporzionale alla forza applicata ed al cubo della lunghezza dell'asta, ed inversamente proporzionale alla larghezza dell'asta ed al cubo della sua altezza, oltre che al modulo di flessione. Ad una sola classe fondamentale di grandezze, quella delle lunghezze, appartengono lo spostamento dell'estremo dell'asta, la lunghezza, la larghezza e l'altezza dell'asta, mentre una seconda classe derivata di grandezze è quella delle forze. La relazione di Hooke è una relazione di proporzionalità, di tipo complesso, tra le grandezze delle classi citate [67].

La logge di Hooke, noto il valore del modulo di flessione, serve a misurare indirettamente la lunghezza dello spostamento. La stessa legge é d'origine strettamente sperimentale ed il valore del modulo di flessione è determinato sperimentalmente. Tuttavia esistono casi in cui l'equivalente di conversione non è ricavato sperimentalmente, ma determinato, a priori, per via semplicemente deduttiva. Questa possibilità si presenta nei casi in cui la relazione di proporzionalità è ottenuta, non già da leggi fisiche sperimentali, ma da leggi dedotte dai principi generali postulati, in ciascun ramo del sapere, a fondamento di ogni manifestazione fenomenica. Per rimanere nel campo della meccanica, la legge relativa al fenomeno dell'oscillazione del pendolo semplice lega la durata del suo periodo l'oscillazione alla lunghezza dell'asta ed all'accelerazione di gravità del luogo [68].

Relazioni di proporzionalità di tipo parametrico

L'area di un quadrato è una grandezza definita e misurata, in maniera indiretta, per mezzo della relazione di proporzionalità, stabilendo l'uguaglianza del rapporto tra l'area stessa e la sua unità di misura con il quadrato del rapporto tra il lato con la sua unità di misura, a sua volta moltiplicato per l'equivalente di conversione dato dal quadrato del rapporto tra l'unità di misura del lato e e quella lunghezza corrispondente all'unità di misura dell'area. Tuttavia poiché, per definizione, l'unità di misura dell' area dei quadrati è pari al quadrato dell'unità di misura del lato, l'equivalente di conversione è uguale ad uno. L'unità di misura delle aree dei quadrati è convenzionalmente assunta come unità di misura delle aree di tutte le altre figure piane. A loro volta, queste aree sono misurabili mediante relazioni di proporzionalità più o meno complesse, ma per la convenzione sulle unità di misura delle aree, esse assumono l'aspetto di leggi fisiche.

[67] Poiché ciascuna grandezza, in ciascuna classe, è misurata rispetto alla sua unità di misura stabilita, nella relazione, compare il modulo di flessione, ovvero l'equivalente di conversione, proprio di quella relazione.

[68] La durata del periodo di oscillazione (classe di grandezze dei tempi) è legata alla classe delle lunghezze e delle accelerazioni di gravità, agenti sulla massa del pendolo, del prodotto della radice quadrata della lunghezza dell'asta del pendolo per la radice quadrata dell'accelerazione di gravità del luogo, a meno di un fattore di proporzionalità, pari a due pi-greco. In questa espressione, questo coefficiente rappresenta l'equivalente di conversione (dedotto da principi generali, cioè dalle leggi della dinamica), per misurare la durata dei periodi di oscillazione, mediante la misura della lunghezza dell'asta del pendolo e dell'accelerazione di gravità del luogo.

Ad esempio, si consideri un triangolo qualsiasi, l'area del triangolo è determinata del semiprodotto delle lunghezze di due lati per il seno dell’angolo compreso. In questa relazione, il termine trigonometrico e la frazione un mezzo fanno le veci dell’equivalente di conversione (non più uguale ad uno) della relazione di proporzionalità. Infatti fra le grandezze delle classi delle aree (di questi triangoli) e quelle delle lunghezze dei lati (adiacenti l’angolo comune) vale la relazione sopraccitata, dove i due termini trigonometrici e le due frazioni un mezzo si eliminano perché rispettivamente uguali. Allora introducendo le unità di misura si ricava (tenuto conto di quanto detto sulle unità di misura relative alla misura dell’area di un quadrato) l’uguaglianza tra rapporti di aree e rapporti di prodotti di lati, dove l’equivalente di conversione è proprio la metà del seno dell’angolo compreso [69].

Il caso illustrato da questo esempio geometrico introduce un’ultima varietà di relazioni di misura indiretta, nelle quali il valore dell'equivalente di conversione dipende da una grandezza appartenente ad una classe autonoma ed indipendente da quelle che compaiono nella relazione di proporzionalità. Nel caso dell‘area del triangolo l‘equivalente di conversione dipende dalla misura dell’angolo che appartiene ad una classe di grandezze definite e misurate direttamente. Qualcosa di analogo succede anche nell'equivalente di conversione, incontrato nella legge di Hooke, applicata alla flessione di una sbarra incastrata. Infatti l’inverso del modulo di flessione dipende dal materiale di costruzione della sbarra. Al variare del tipo di metallo con cui è costruita la sbarra, varia l’equivalente di conversione. Tuttavia la qualità del metallo non è una grandezza, come l’angolo del triangolo appena citato.

Una particolarità importante di queste grandezze che condizionano la misura indiretta di altre grandezze, attraverso l’equivalente di conversione, sta nel fatto che l’unità di misura rispetto alle quale queste grandezze sono misurate non influenza il valore dell'equivalente di conversione. Infatti a sua volta, il legame fra la grandezza, detta parametrica, ed il valore dell‘equivalente di conversione è rappresentato da una relazione analitica il cui valore numerico è indipendente dall'unità di misura usata. Se la grandezza parametrica è considerata solo come un elemento determinante del valore numerico dell'equivalente di conversione di una relazione di proporzionalità, allora ad ogni grandezza di questa classe corrisponde una particolare relazione di misura indiretta del tipo della proporzionalità ed una classe di grandezze da quella relazione definita e misurata.

Se invece la grandezza parametrica è considerata, come una delle grandezze determinanti della relazione di misura indiretta, allora la relazione stessa perde la caratteristica della proporzionalità. Le relazioni di misura indiretta che si presentano sotto questo particolare aspetto contengono funzioni di tipo trascendente. A volte poi le grandezze, dette parametriche, che intervengono nella relazione sono più di una. Un caso tipico è dato dalla relazione del moto di un pendolo che oscilla con oscillazioni libere smorzate. Le relazioni di misura indiretta di questo tipo (tutte derivate da leggi) sono numerose, in tutti i campi della fisica e della tecnica. Ad esse, si dà il nome di relazioni parametriche in generale. Caratteristica di queste relazioni è l’assoluta indipendenza della misura della grandezza, determinata dalle unità di misura, usate nelle classi delle grandezze determinanti (che hanno la funzione di parametri, in quelle relazioni).

---

[69] Se si costruisce un quadrato (avente area unitaria), con un lato comune ad una parte di un lato del triangolo dato e lungo quanto l’altezza relativa a quello stesso lato, essendo il triangolo stesso di area unitaria, si ha che:

- il suddetto lato del triangolo è uguale al doppio del lato del quadrato, ovvero al doppio dell’altezza relativa al lato del triangolo;
- il lato del quadrato, a sua volta, è uguale all’altro lato del triangolo, moltiplicato per il seno dell’angolo compreso (tra i due lati).

Pertanto il coefficiente pari alla metà del seno dell’angolo compreso permette di misurare indirettamente l’area di un triangolo qualsiasi (data la lunghezza dei due lati), fungendo da equivalente di conversione.

Classi di grandezze misurabili in maniera indiretta relativa

Le misure ottenute con i procedimenti indiretti descritti sono dette assolute, perchè ottenute facendo riferimento ad un sistema di unità di misura, legato a classi di grandezze, scelte come fondamentali. Inoltre queste classi di grandezze fondamentali sono le sole definite e misurate in maniera diretta e relativa. Le classi delle grandezze determinanti nelle relazioni di proporzionalità sono, in generale, diverse dalle classi cui appartiene la grandezza determinata. Tuttavia a volte, avviene che la determinata ed alcune delle determinanti appartengono a classi formalmente coincidenti. Ad esempio nella legge di Hooke, la classe del le lunghezze degli spostamenti del punto estremo della sbarra incastrata è la stessa classe delle lunghezze (rispettivamente lunghezza, larghezza ed altezza) della sbarra stessa. La medesima classe compare quattro volte (una volta come determinata e tre volte come determinante).

Tuttavia nell'esempio citato, la stessa classe è associata a caratteristiche del fenomeno ben distinte fra loro, tutte comunque concettualmente rappresentabili con un unico tipo di classe di grandezze. La coincidenza formale maschera una sostanziale differenza fra le caratteristiche rappresentate dalle classi stesse. Pertanto in questi casi, anche se sono presenti (fra le determinanti) grandezze misurate nella stessa classe della determinata, l'operazione può essere sempre chiamata una misura indiretta assoluta, giacché si ottiene la misura assoluta di una grandezza tipica del fenomeno diversa da quelle misurate direttamente. Esistono tuttavia casi che presentano nel gruppo delle determinanti grandezze non solo appartenenti alle stessa classe formale, ma altresì legate alle stesse caratteristiche fenomeniche cui si riferisce la classe della grandezza determinata.

Avviene così che per calcolare la misura della grandezza determinata, occorra misurare in maniera diretta o in maniera indiretta assoluta, un'altra grandezza della stessa classe e legata alla stessa caratteristica fenomenica, ma misurata in un altro istante ed in un altro luogo. Questo tipo di misura, pur essendo indiretta non può dirsi assoluta, giacché la determinata dipende dalla misura di una grandezza della stessa classe, associata ad identiche caratteristiche fenomeniche. Pertanto questo nuovo tipo di misura è detta giocoforza indiretta relativa. Le misure indirette relative occupano un ruolo assai importante, perché ad esse possono essere ricondotte tutte le classi di grandezze misurabili indirettamente, attraverso relazioni di proporzionalità che rappresentano fenomeni di tipo sperimentale, come ben evidente largamente diffusi nei vari campi della scienze e della tecnica.

Sia data infatti una relazione di proporzionalità che lega la misura di una grandezza alle misure di altre grandezze. Si vari adesso la condizione di misura, in modo che in questa seconda condizione siano rimaste uguali tutte le grandezze determinanti, escluso una di esse [70]. Facendo il rapporto fra le due relazioni si ha che il rapporto fra le due grandezze determinate è uguale al rapporto fra le sole due grandezze determinanti da variare, ciascuna moltiplicata per il proprio equivalente di conversione. Allora una delle due misure indirette assolute può essere espressa in funzione dell'altra, moltiplicata per il secondo membro della precedente uguaglianza di rapporti. Tuttavia in questo modo, una misura indiretta assoluta è trasformata in una misura indiretta relativa, essendo un fattore della nuova uguaglianza (a secondo membro): la misura di una grandezza esattamente della stessa classe della grandezza determinata [71].

Se il fenomeno, in una delle due situazioni, è assunto come riferimento fisso, a maggior ragione, questo tipo di misura indiretta è detta relativa, perché fa dipendere la misura di una grandezza legata ad un fenomeno,

[70] In effetti, nessuna limitazione, tranne complicazioni formali, è posta al numero di grandezze determinanti da variare.
[71] In seguito a questa operazione algebrica, la nuova relazione non si riferisce più ad un solo fenomeno, in una particolare situazione sperimentale, ma a due fenomeni, di tipo identico, in due situazioni sperimentali diverse.

dalla misura di una grandezza analoga, legata allo stesso fenomeno, in una situazione sperimentale di riferimento. La misura indiretta assoluta della grandezza (già considerata determinata) e la misura diretta della grandezza determinante (da variare), nella situazione di riferimento, devono essere già eseguite, perché la misura indiretta relativa sia possibile. Pertanto il loro rapporto è una costante parametrica della relazione di misura indiretta relativa e può essere considerato come un equivalente di conversione dell'unità di misura della misura diretta della grandezza determinante nell'unità di misura indiretta relativa della grandezza determinata (nella situazione della nuova misura [72]).

Il metodo di trasformare una misura indiretta assoluta in una misura indiretta relative è di notevole comodità. In tal modo infatti, si esegue la misura assoluta di una sola grandezza di quella classe e, di conseguenza, risultano notevolmente semplificate le operazioni di misura stesse. In molte condizioni sperimentali, il valore di una grandezza, determinata nella situazione di riferimento, può essere misurato in maniera indiretta assoluta, una volta per tutte, con opportune apparecchiature speciali e poi usato come valore parametrico, da introdurre nella relazione per la misura di una grandezza indiretta relativa (della stessa classe), a disposizione di tutti gli operatori che usano altri strumenti, per misurare una grandezza (della stessa classe), in altre condizioni sperimentali. Pertanto questi ultimi devono solo misurare, nelle due condizioni,le grandezze determinanti

Le condizioni sperimentali nelle quali è consentito limitare, ad una sola volta, la misura indiretta assoluta sono quelle in cui la grandezza determinata da misurare è una caratteristica ambientale che condiziona il fenomeno, ma non é strettamente dipendente da esso. Ad esempio, l’accelerazione di gravità, nel fenomeno dell’oscillazione del pendolo, è una grandezza che interviene, nel fenomeno, ma non è condizionata da esso, essendo una caratteristica propria dell’ambiente, dove avviene quel fenomeno. Come noto, nel fenomeno meccanico dell’oscillazione del pendolo semplice, una legge fisica lega la gravità del posto, ove avviene il fenomeno, al periodo d’oscillazione ed alla lunghezza ridotta dell’asta del pendolo, con il prodotto del quadrato del suddetto periodo per la cosiddetta lunghezza ridotta, a loro volta, moltiplicati per l’equivalente di conversione, pari all’inverso di due pi-greco.

Pertanto per ottenere la misura assoluta di gravità, si deve effettuare la misura diretta della lunghezza ridotta dell’asta del pendolo e del suo periodo d’oscillazione. Poiché è molto complicato riuscire a determinare la lunghezza ridotta dell’asta del pendolo, la misura della gravità assoluta è eseguita solo in poche località. La misura della gravita relativa, in altri punti della terra, è invece ottenuta mediante il metodo descritto [73]. Applicando la relazione di misura indiretta relativa di una grandezza alla formula della dinamica per l’oscillazione di un pendolo semplice, si ottiene, imponendo che la lunghezza dell’asta del pendolo rimanga costante. Con questo procedimento, l’unica grandezza da misurare, con la stessa apparecchiatura, in due punti distinti della superficie terrestre, sono i due periodi d’oscillazione del pendolo, misure che sicuramente richiedono operazioni piu semplici ed agevoli [74].

---

[72] Questa trasformazione delle relazioni di proporzionalità è possibile, quando il fenomeno rappresentato è un’esperienza. Infatti solo in tal caso, si può imporre che talune grandezze, presenti nel fenomeno, nella situazione di riferimento, risultino identiche a quelle presenti nel fenomeno, in un'altra situazione qualsiasi.

[73] Una misura indiretta relativa di gravità può essere calcolata, a partire da una misura indiretta assoluta di gravità, moltiplicata per il rapporto dei quadrati dei due periodi di oscillazione (misurati rispettivamente nel punto di riferimento e nel nuovo punto di misura). Del resto, anche oggigiorno e proprio per questo motivo, misure assolute di gravità sono effettuate, solo in pochi punti di riferimento, in condizioni altamente speciali (ad esempio, con la caduta nel vuoto di un grave), mentre la gravità è poi trasportata, da punto a punto (a partire dai suddetti punti di gravità assoluta nota), seguendo i rami, di reti gravimetriche, lungo i quali si eseguono misure relative di gravità (ad esempio, per mezzo di gravimetri).

[74] Questo metodo, notevolmente semplice, si fonda sull’ipotesi che le altre grandezze, interessate nelle relazioni di proporzionalità (cioè la lunghezza dell’asta del pendolo), siano rimaste effettivamente le stesse, nelle due operazioni di misura.

Classi di grandezze misurate indirettamente attraverso relazioni del tipo della somma

Le misure delle grandezze di una classe possono essere sommate fra loro, ma il risultato di questa somma fra numeri è la misura di una nuova grandezza, ottenuta mediante la somma delle grandezze, solo se la classe considerata è di tipo quantitativo. Pertanto se una grandezza è ottenuta come somma di più grandezze parziali, la sua misura può ottenersi come somma delle misure delle grandezze componenti, per la proprietà associativa della somma. Le misure delle grandezze parziali componenti possono essere ottenute con strumenti differenti, purché analoghi, a condizione che tutte le misure parziali siano riferite alla stessa unità di misura. Siano date alcune grandezze parziali, della stessa classe, misurate direttamente con strumentazioni analoghe, ma distinte e riferite a campioni diversi, che sommate danno luogo ad una nuova grandezza.

Inoltre siano dati i valori delle misure dirette e relative, eseguite con ciascuna delle strumentazioni, sulla quantità di riferimento (od unità di misura di quella classe). Pertanto il rapporto tra la grandezza somma e la sua unità di misura è uguale alla somma di tutti i rapporti, tra tutte le grandezze parziali componenti e le loro unità di misura. Questa relazione (che permette di ricavare il valore della misura della somma delle misure delle grandezze parziali componenti) non esce dal campo d’applicazione delle misure dirette, ma può essere interpretata in senso più generale. Infatti questa relazione è una relazione rappresentativa di un particolare fenomeno mediante il quale è definita e misurata una nuova classe di grandezze. Pertanto essa diventa la relazione d’una misura indiretta del tipo della somma. Ad esempio, siano dati un certo numero di conduttori le cui resistenze elettriche sono misurate in maniera diretta e relativa.

Se si dispongono queste resistenze, in serie, e s’inserisce questo conduttore così ottenuto, in un circuito, la resistenza di questo conduttore può essere ottenuta indirettamente, mediante l’applicazione di una legge fisica in base alla quale la resistenza totale dei conduttori, disposti in serie, è data dalla somma delle resistenze parziali dei conduttori. Allora la misura indiretta della resistenza totale (determinata) è ottenuta dalla somma delle misure delle resistenze parziali (determinanti). A sua volta, la relazione del tipo somma, interpretata come relazione di misura indiretta, permette una serie di interessanti estensioni. Infatti può essere esplicitata per una qualsiasi delle grandezze determinanti. Ad esempio, considerando la prima misura parziale, si ha la differenza tra la misura del tipo somma e la somma di tutte le altre misure parziali (a partire dalla seconda).

In questo modo, la misura indiretta della prima misura parziale avviene per mezzo di una relazione di somma algebrica di misure dirette di altre grandezze. Questa ultima relazione è una misura indiretta, a maggior ragione, essendo l'operazione algebrica della differenza delle misure non corrispondente ad un’operazione diretta sulle grandezze. Tuttavia non è necessario che le misure delle grandezze determinanti (comparse in queste relazioni) siano ottenute tutte per mezzo di misure dirette e relative delle grandezze. Alcune o tutte possono essere misurate indirettamente, con relazioni di proporzionalità dello stesso tipo o di tipo diverso. In questo ultimo caso ed in quello nel quale si sommano misure dirette relative con misure indirette, occorre postulare, per definizione o per verifica sperimentale, che tutte le classi di grandezze, misurate direttamente o indirettamente, siano classi di grandezze equivalenti e coincidenti, in pratica.

Inoltre occorre che tutte le misure, dirette ed indirette, risultino riferite alle medesima unità di misura. Anche per questo tipo di misura indiretta, per mezzo della relazione di somma algebrica, si hanno casi di misure derivanti da leggi fisiche di diversa origine. E' d’origine geometrica la relazione che lega gli angoli interni di un triangolo, dove la somma degli angoli interni è uguale a pi-greco. Allora si può ricavare indirettamente la

misura di uno di essi, nota la misura, diretta e relativa, degli altri due. Le grandezze determinanti sono tutte grandezze misurate direttamente. Un esempio di relazione geometrica in cui le grandezze determinanti sono misurate indirettamente è la lunghezza di un segmento rettilineo, compreso fra gli estremi di una spezzata piana (le cui proiezioni sono le lunghezze dei singoli segmenti, moltiplicati per i coseni degli angoli d'orientamento dei segmenti, a partire da assi paralleli all'asse delle ascisse).
I termini la cui somma permette di ricavare la somma algebrica sono misure indirette, con relazioni di proporzionalità, di tipo parametrico. Misure indirette, con relazioni del tipo della somma, d'origine fisica, sono derivanti da principi fisici fondamentali. Ad esempio, usando il principio di conservazione della massa, in chimica, è possibile misurare indirettamente la massa di un composto, risultante da una relazione, con la misura diretta della massa delle sostanze, messe a reagire, ed altri prodotti della reazione. Con lo stesso principio, si possono calcolare le masse dei prodotti, ottenuti da certe reazioni chimiche, per somma, come per somma algebrica. Invece il secondo principio di Kirchhoff dà luogo ad una relazione di misura indiretta del tipo della somma, originata da leggi fisiche nella quale parte delle misure delle grandezze determinanti è fatta, per via indiretta, con relazioni di proporzionalità.
Questo principio afferma che la somma algebrica di tutte le forze elettromotrici, attive lungo i rami successivi della maglia è uguale alla somma algebrica dei prodotti delle intensità di corrente, di ogni ramo della maglia, per le rispettive resistenze. Pertanto è possibile risalire indirettamente alla forza elettromotrice attiva, in un certo ramo, mediante la somma algebrica di tutte le forze elettromotrici e dei prodotti, in ogni altro ramo della maglia, delle intensità di corrente per le rispettive resistenze. La combinazione della relazione di misura indiretta del tipo della proporzionalità, con le relazioni di misura indiretta del tipo della somma algebrica, dà luogo ad una numerosissima schiera di relazioni di misura indiretta, di tipo misto. Un esempio è dato dal fenomeno di conduttori, posti in parallelo. Pertanto dati alcuni conduttori, posti in parallelo di conduttanze date, la conduttanza totale, è data dalla somma delle loro conduttanze [75].

Classi di grandezze che sono variazioni di una grandezza fondamentale

Esiste un altro tipo di relazioni che consiste in una somma di grandezze, non più necessariamente della stessa classe, ma appartenenti a classi diverse. Per introdurre questa nuova classe di grandezze, occorre ricordare che ogni classe di grandezze può essere misurata in maniera classificatoria. Infatti anche le classi di grandezze misurabili direttamente, per mezzo della classe della divisibilità, possono essere ricondotte a classi di grandezze del tipo della distanza, introducendo in esse il concetto generale di maggiore o minore somiglianza ad una grandezza della classe, assunta come fondamentale. Questa nuova classificazione delle grandezze quantitative, in base alla somiglianza, rispetto alla grandezza fondamentale, può ottenersi mediante la differenza delle misure dirette quantitative delle grandezze di quella classe e la misura della grandezza fondamentale.
A riguardo, sia data una quantità con una certa grandezza, rappresentata da un oggetto reale che subisce variazioni per cui viene a possedere, in momenti diversi, grandezze diverse. Si richiede di conoscere e misurare le sole variazioni subite della grandezza posseduta, ad istanti diversi, della quantità esaminata. Il

[75] La conduttanza è legata anche alla resistenza dalla relazione in base alla quale essa è pari all'inverso della resistenza. Allora poiché la capacità totale è pari alla somma di tutte le conduttanze (dei conduttori posti in parallelo), l'inverso della resistenza totale è uguale alla somma dell'inverso di tutte le resistenze (degli stessi conduttori posti sempre in parallelo).
Da questa relazione, si ricava indirettamente l'espressione della misura indiretta della resistenza totale, ottenuto mettendo più conduttori di resistenza data, in parallelo, come il prodotto di tutte queste resistenze diviso per la somma dei prodotti di tutte le resistenze, avendone omessa una alla volta.
Un'espressione analoga vale anche per moltissime altre misure indirette.

problema è risolto misurando le grandezze successivamente possedute della quantità ed eseguendo la differenza dei valori delle misure ottenute, rispetto ad una delle grandezze successivamente possedute, presa come fondamentale. Queste differenze sono le misure delle grandezze di una classe che può essere detta classe delle grandezze di variazione della grandezza fondamentale. Essa è una grandezza, in quanto una variazione è maggiore o minore di un'altra; inoltre questa grandezza presenta le seguenti proprietà caratteristiche.

- Le grandezze di variazione possono essere sia negative che positive.
- La somma, di due o più grandezze di variazione, di una stessa grandezza fondamentale non ha significato, deducendo così che la classe di grandezze di variazione di una medesima grandezza fondamentale appartiene al gruppo di grandezze, misurate indirettamente, mediante il criterio classificatorio relativo alla descrizione operazionale della misura di una grandezza di distanza.

Questo si verifica anche quando la grandezza fondamentale è una grandezza misurabile direttamente di tipo quantitativo. Tuttavia quello che rende interessante questa classe di grandezze è il fatto che la misura di una grandezza di variazione può essere ottenuta, oltre che secondo la definizione stessa, dalla differenza di due grandezze della stessa classe, mediante strumentazioni ed operazioni apposite. In generale, ma non necessariamente, gli strumenti che misurano le grandezze di variazione sono basati sullo stesso principio e sul medesimo schema delle misure della grandezza fondamentale. Quando la classe cui appartiene la grandezza fondamentale è una classe riconducibile alle distanze, il fenomeno che serve a stabilire la classificazione fra le grandezze serve anche a misurare la grandezza di variazione rispetto alla grandezza fondamentale.
Infatti tutte le grandezze, associabili alla grandezza di distanza, possono essere considerate variazioni rispetto ad una grandezza fondamentale. Un esempio di queste classi è la temperatura, considerata variazione di una grandezza fondamentale, presa universalmente come riferimento (nella scala Celsius, la temperatura del ghiaccio fondente). Per misurare le variazioni della temperatura, si usa lo stesso fenomeno e lo stesso metodo (cioè dilatazione termica dei corpi e misura della lunghezza di una colonna di mercurio) usati per la misura delle grandezze di temperatura. Per questo, è sufficiente che lo zero della scala sia spostato alla nuova temperatura fondamentale. La variazione di una grandezza fondamentale, appartenente a classi misurate direttamente, con metodi quantitativi, può essere misurata con lo stesso strumento usato, per la misura diretta e relativa, delle grandezze cui appartiene la grandezza fondamentale [76].

Misure indirette per mezzo della somma fra la grandezza fondamentale e le sue variazioni

In base alle definizione operazionale di classe delle grandezze che sono variazioni di una grandezza fondamentale, si può scrivere un'altra qualsiasi grandezza, uguale alla grandezza fondamentale, più o meno la variazione intervenuta, nel passaggio dalla grandezza fondamentale alla suddetta seconda grandezza. Pertanto questa relazione può essere usata per la misura indiretta della sopraccitata seconda grandezza,

[76] In generale, siano date due quantità in possesso di grandezze diverse di cui la prima sia assunta come grandezza fondamentale e la seconda una qualsiasi grandezza delle classe. Si chiama misura della grandezza di variazione o semplicemente variazione della grandezza fondamentale, il numero di elementi del campione che devono essere sommati alla grandezza fondamentale, oppure alla seconda grandezza, per ottenere due quantità giudicate uguali, rispetto all'organo di giudizio strumentale. Nel primo caso, la misura diretta della grandezze di variazione è positiva, nel secondo caso negativa. Il valore ottenuto rappresenta la misura della grandezza di variazione posseduta dalla seconda grandezza, rispetto alla grandezza fondamentale.
Queste precisazioni sul criterio di misura delle grandezze di variazione sono necessarie, per rendere operazionalmente valida la definizione stessa di grandezza di variazione.

attraverso la misura della grandezza fondamentale e della sua variazione. Questa nuova misura risulta ottenuta per mezzo di una relazione di somma fra la misura di una grandezza appartenente alla medesima classe, detta grandezza fondamentale, e la misura della grandezza di variazione di questa grandezza fondamentale. Questo procedimento di misura, pienamente giustificato in sede logica ed operazionale, è diverso dal metodo di misura indiretta attraverso una generica relazione di somma.

La classe delle grandezze di variazione è definita come classe delle grandezze che sono variazioni di una certa grandezza fondamentale, cosicché quella grandezza fondamentale rientri nella stessa definizione della classe. Le grandezze di variazione non possono essere sommate fra loro, ma possono invece essere sommate alla rispettiva grandezza fondamentale e solo a quella. Dalla somma di ciascuna grandezza della classe delle variazioni, con la grandezza fondamentale di quella classe, si ottengono, tutte od in parte, le grandezze appartenenti alla classe cui appartiene la grandezza fondamentale. Si consideri ora la classe delle grandezze di variazione, indipendentemente dalla sua grandezza fondamentale, si può scegliere una grandezza di questa classe, assumerla come fondamentale e costruire la classe delle variazioni di questa grandezza fondamentale.

In questo modo, anche la variazione primaria può essere misurata dalla somma della misura della variazione primaria fondamentale e della variazione secondaria. Anche le variazioni secondarie, a loro volta, formano una classe di grandezze del tipo della distanza, misurabili con strumentazioni e modalità identiche a quelle usate per la misura della variazione primaria. Il processo di geminazione, così introdotto, può essere ripetuto un numero illimitato di volte. Ciascuna delle nuove classi di grandezze introdotte gode la proprietà che la misura di una sua grandezza è sommabile alla misura della rispettiva grandezza fondamentale, dando luogo alla misura di una grandezza appartenente alla classe cui appartiene la fondamentale. Alla fine, posto termine a questa scomposizione, si giunge all'espressione generale della misura indiretta, per mezzo della somma di tutte le variazioni successive ottenute.

Le variazioni successive sono rispettivamente le misure della variazione, se riferite alla misura della grandezza precedente, mentre sono misura della grandezza fondamentale, per il termine seguente nella serie delle variazioni successive. Allora risulta che nessun termine intermedio della somma di tutte le variazioni successive può essere eliminato o cambiato di posto nella serie, perché in tal caso, l'espressione perderebbe il suo significato reale. Si noti poi che la questa relazione è valida qualunque sia l'entità delle variazioni primarie, secondarie, ecc. Le grandezze delle variazioni successive sono grandezze appartenenti a classi, autonomamente misurabili, in base a metodi diversissimi, in parte, dipendenti dalla natura della grandezza fondamentale. Infatti le variazioni possono essere misurate con strumentazioni di tipo quasi diretto, oppure con procedimenti di tipo indiretto.

Tuttavia mentre il procedimento quasi diretto è applicabile, solo se la misura della grandezza fondamentale può eseguirsi direttamente, il procedimento indiretto è applicabile in tutte le circostanze. In particolare, per la misura indiretta, si possono usare fenomeni rappresentabili con relazioni di proporzionalità. A loro volta, le relazioni di proporzionalità da cui ricavare indirettamente le grandezze di variazione possono derivare da leggi teoriche o sperimentali, oppure in generale, da relazioni parametriche [77]. Quando la grandezza di variazione è misurata per mezzo di strumentazione analoga, ma distinta, da quella con cui si misura la grandezza fondamentale (ma sopratutto se la variazione è misurata indirettamente, per mezzo di relazioni di

[77] L'unica caratteristica, da aggiungere a quelle per la misurabilità indiretta di una grandezza, è esplicitare la grandezza fondamentale di cui la grandezza misurata è variazione, nella relazione adotata, in quanto solo così è possibile sommare le variazioni alla grandezza fondamentale.

proporzionalità), affinché sia possibile sommare la misura della variazione alla misura della grandezza fondamentale, occorre che entrambe siano riferite ad un'unica unità di misura.
In fisica, i casi nei quali sono usate relazioni di misura del tipo sopra descritto, sono assai frequenti. Uno dei più noti e significativi è quello della lunghezza di un segmento metallico alle diverse temperature, rappresentata da una semplice relazione lineare. Infatti la misura della grandezza di lunghezza, posseduta dal segmento metallico, è data dalla somma della misura della grandezza di lunghezza, posseduta dal segmento metallico, alla temperatura zero, presa come grandezza di lunghezza di riferimento, più la misura della grandezza della variazione della grandezza fondamentale, alla temperatura dell'esperimento. La misura della grandezza di variazione è eseguita indirettamente, attraverso la relazione di proporzionalità diretta semplice che lega la misura della grandezza di lunghezza fondamentale alla misura delle grandezza di temperatura.
Il coefficiente (di dilatazione termica del materiale metallico) è l'equivalente di conversione della relazione di proporzionalità. Come per le misure indirette relative, anche le misure indirette, per mezzo della classe delle grandezze di variazione, possono offrire notevoli vantaggi pratici. Infatti la misura delle grandezze di una certa classe può essere ridotta alla semplice misura di variazioni, essendo già nota la misura della grandezza fondamentale. Pertanto la misura della grandezza fondamentale, in generale più complicata da misurare, può essere eseguita un'unica volta, mentre è più facilmente ripetuta la misura delle grandezze di variazione. Inoltre è assai frequente, nella tecnica, che interessino solo le variazioni della grandezza fondamentale e non il suo valore assoluto. Allora è possibile limitarsi alla misura delle variazioni, senza curare la misura della grandezza fondamentale.

Trasformazione di una relazione di proporzionalità in una relazione di somma [78]

Sia data una relazione di proporzionalità (nel seguito, detta determinata globale), atta alla misura indiretta assoluta di una grandezza e si supponga che una delle misure sia eseguita indirettamente per mezzo di una relazione, dove la misura della grandezza fondamentale è sommata alla misura della sua grandezza di variazione. Sostituita l'espressione della determinante (parziale) di questa misura nella suddetta relazione di proporzionalità, è d'interesse verificare, se sia possibile esprimere anche la determinata (globale), in modo tale che risulti misurata dalla somma d'una misura fondamentale più una variazione della stessa misura fondamentale. Se l'esponente della misura della grandezza determinante (parziale) della relazione di proporzionalità è uguale all'unità, allora la sopraccitata trasformazione é immediata e la relazione di proporzionalità si trasforma nella somma di due termini complementari:

- il primo contenente la grandezza fondamentale;
- il secondo contenente la grandezza di variazione, rispetto al primo termine, assunto come grandezza fondamentale.

Casi più generali si hanno invece, quando l'esponente della misura della grandezza determinante (parziale) è un numero intero positivo (diverso dall'unità), oppure addirittura un numero reale positivo (non intero).

- Se l'esponente della misura della grandezza determinante (parziale) è un numero intero positivo qualsiasi, la relazione di proporzionalità si trasforma facilmente in una somma di termini con potenze

[78] Gli addendi della relazione di somma sono una grandezza fondamentale le sue variazioni

crescenti, da zero al suddetto intero positivo, in forza dello sviluppo binomiale (altrimenti noto come binomio di Newton). Ciascuno dei termini, a partire dal secondo, può essere considerato la variazione dei termini che lo precedono, cosicché la misura indiretta, espressa dalla relazione di proporzionalità, risulti trasformata in una misura indiretta, per somma di variazioni successive.

- Se l'esponente della misura della grandezza determinante (parziale) è un numero reale positivo qualsiasi, occorre imporre una condizione restrittiva, alla grandezza della variazione, in base alla quale la sua misura sia minore della misura della corrispondente grandezza fondamentale. Sotto questa condizione, la relazione di proporzionalità (indicata come determinata globale) è scritta introducendo la determinante parziale (elevata all'esponente della misura), come prodotto i cui fattori sono:

    - la determinante parziale stessa;
    - un binomio, costituito dall'unità più il quoziente tra la grandezza di variazione e la determinante parziale.

  Sviluppato in serie di Taylor questo binomio (elevato all'esponente della misura), l'espressione ottenuta permette di trasformare la misura indiretta (indicata nella relazione di proporzionalità, come determinante parziale) in una somma di variazioni successive. Infatti proprio per il procedimento con cui i termini successivi sono ricavati (cioè mediante l'operazione derivazione, con uno sviluppo in serie di Taylor), essi sono da considerarsi variazioni delle misure dei termini che le precedono (mentre sono misura della grandezza fondamentale, per il termine seguente nella serie delle variazioni successive).

Allora si può generalizzare l'applicazione dello sviluppo in serie di Taylor, alle funzioni di proporzionalità, quando tutte le misure determinanti sono misurate, per mezzo di relazioni di somma tra una grandezza fondamentale e la sua variazione, laddove la sopraccitata condizione restrittiva imponga sempre che la misura della variazione sia minore della misura della corrispondente grandezza fondamentale. Pertanto l'intera relazione di proporzionalità, relativa alla misura della grandezza determinata (globale), è trasformata attraverso sviluppi in serie di Taylor, come il prodotto di tutte grandezze determinanti (parziali), a loro volta, composte dalla somma della funzione fondamentale più tutte le loro derivate [79] (spinte fino ad un certo grado di derivazione, opportunamente scelto), dove il residuo dello sviluppo tende a zero, al crescere della lunghezza dello sviluppo, se lo sviluppo stesso è convergente.

Sensibilità e precisione di una misura indiretta

L'espressione che trasforma una relazione di proporzionalità in una relazione di somma, dove gli addendi della relazione di somma sono una grandezza fondamentale le sue variazioni successive, è giustificata non solo in senso analitico, ma anche operazionale. L'applicazione, assai frequente nella tecnica, degli sviluppi in serie ed il loro uso, anche per operazioni di misura indiretta, ricevono da questa trattazione una piena giustificazione. Pertanto essi devono essere intesi come il risultato della trasformazione di una misura indiretta, attraverso una qualsiasi reazione di proporzionalità, nella misura indiretta mediante la relazione di somma di una grandezza fondamentale più le sue variazioni dei diversi ordini. Sulla base di queste

[79] Se la relazione non è di proporzionalità, è necessario procedere ad eseguire tutte le derivate parziali della funzione data, fino all'ordine prescelto, prendendo in considerazione non solo le derivate pure, ma anche quelle miste.

considerazioni, la sopraccitata espressione può servire anche per definire la sensibilità di una misura indiretta.
Infatti in una misura indiretta le grandezze determinanti sono misurate direttamente e, mediante gli stessi strumenti, si possono misurare sia le grandezze fondamentali che le variazioni, se le determinanti sono espresse come somme di una grandezza fondamentale più le sue variazioni successive. Questi strumenti hanno ovviamente una soglia di sensibilità la cui grandezza é la stessa di quella posseduta dall'elemento del campione. Pertanto se, nei termini degli sviluppi in serie precedenti, alle variazioni successive, si sostituiscono le misure delle grandezze rappresentanti le soglie di sensibilità degli strumenti di misura diretta delle singole grandezze determinanti, si ottiene una relazione di somma di derivate parziali (pure e miste), moltiplicate per le potenze o i prodotti (se del caso, elevati a potenze opportune [80]) delle correzioni delle misure delle grandezze, in perfetta corrispondenza all'ordine di derivazione cui si riferiscono [81].
Inoltre come mostrato da questa relazione e contrariamente alle misure dirette delle grandezze di una classe dove la sensibilità è costante al variare della grandezza misurata, la sensibilità di una misura indiretta è funzione della grandezza misurata. Dato poi lo stretto legame tra sensibilità e precisione, anche la precisione di una misura indiretta è variabile al variare della grandezza misurata. Allora per analogia con le misure dirette, la relazione trovata è anche la misura della grandezza che l'elemento del campione possiede, qualora la grandezza determinata sia misurata direttamente, in maniera univoca. Di conseguenza, si può definire una precisione assoluta delle misure indirette, data dal rapporto tra il valore numerico della misura indiretta, ottenuto introducendo nella funzione le precisioni delle singole misure dirette determinanti, e la sensibilità della misura ricavata per mezzo della suddetta relazione trovata.
Quando il residuo della relazione é minore della sensibilità, allora il resto della serie è trascurabile, non avendo più alcun significato, per quanto riguarda la misura. Limitando notevolmente il campo di variabilità delle variazioni, si può fare in modo che tale condizione sia verificata rapidamente. Pertanto nel caso sia valida già al primo ordine di derivazione, una sola somma di tutte le variazioni, ciascuna riferita ad una grandezza determinante, presenta la suddetta relazione trovata (per la grandezza determinata), in forma particolarmente semplice. Questa ultima relazione esprime il principio dell'indipendenza delle piccole variazioni secondo cui la variazione della grandezza determinata, dovuta alla variazione di una qualsiasi delle grandezze determinanti, è indipendente da ogni variazione dovuta alle variazioni di ciascuna delle altre grandezze determinanti.

Osservazioni indirette e condizionate

L'espressione generale della misura indiretta di una grandezza si presenta sotto forma di una somma di monomi, ciascuno rappresentante una relazione di proporzionalità fra grandezze misurate direttamente [82].

- Se l'espressione della relazione trovata è nota, dati tutti gli altri parametri numerici o misure di grandezze caratteristiche (che in essa compaiono), è possibile ricavare indirettamente la misura della grandezza determinata, misurando le grandezze determinanti ed introducendo le corrispondenti misure.

---

[80] In ogni caso, la somma di tutti gli esponenti dei prodotti delle correzioni deve corrispondere all'ordine di derivazione cui si riferiscono.
[81] La nuova relazione, così ottenuta, rappresenta anche la sensibilità della misura indiretta di una grandezza.
[82] In questa espressione, oltre alle misure delle grandezze determinanti ed alle loro variazioni, compaiono anche gli equivalenti di conversione, propri di ciascuna relazione di proporzionalità, gli esponenti delle misure delle grandezze determinanti, le grandezze fondamentali, rispetto alle quali sono misurate le variazioni delle determinanti, e le grandezze di riferimento, nel caso di misure indirette relative.

- Se l’espressione della relazione trovata rappresenta una relazione di misure indiretta di tipo definizionale, tutti gli elementi costitutivi della relazione risultano sempre prefissati,a priori, perché ottenuti da deduzioni teoriche.
- Se invece l’espressione della relazione trovata rappresenta una legge, allora non tutti i parametri numerici, ecc. (che in essa compaiono) sono noti, a priori. Nella prima fase delle indagini scientifiche o tecniche, su un fenomeno legato a quella legge fisica, il problema da risolvere si presenta in modo differente. Allora misurate tutte le grandezze, misurabili direttamente, compresa la determinata, e stabilito il tipo di relazione (che esprime il fenomeno), occorre ricavare il valore numerico dei parametri che compaiono nell’espressione della relazione trovata.

Ad esempio, con l'espressione per la misura indiretta della lunghezza di una sbarra metallica, derivata della legge di dilatazione dei corpi, al variare della temperatura, si può determinare il valore della misura della lunghezza della sbarra metallica ad una data temperatura, direttamente misurata, note la lunghezza fondamentale ed il coefficiente numerico (od equivalente di conversione). Tuttavia prima ancora di essere applicata alla misura indiretta di lunghezze, questa espressione ha subito una lunga fase sperimentale. Infatti uno sperimentatore, posto davanti al fenomeno fisico della dilatazione dei corpi, con la temperatura, e constatando la presenza del fenomeno in più grandezze eterogenee, si pone il problema di determinare le relazioni che, in questo fenomeno, legano fra loro le grandezze in esso contenute. Nel caso in esame, le due grandezze correlate sono la temperatura e la lunghezza.
Pertanto in seguito ad induzioni, anche di carattere intuitivo o derivate da esperienze preliminari:

- si stabilisce che la temperatura non determina la lunghezza complessiva della sbarra, ma provoca le sue variazioni (allora l‘espressione cercata deve essere del tipo della somma fra una grandezza fondamentale e le sue variazioni);
- si deduce, per mezzo di prove sperimentali, che la temperatura determina variazioni di lunghezza della sbarra, per mezzo di una relazione di proporzionalità semplice e diretta.

Poste queste due fondamentali proposizioni, lo sperimentatore si trova davanti al problema di determinare il valore della grandezza di riferimento ed il valore della costante che esprime la proporzionalità lineare. In generale, non si può ricavare indipendentemente i due valori, a meno di operare in condizioni sperimentali non convenienti. Allora il problema può essere risolto misurando la grandezza posseduta della sbarra, a due diversi valori di temperatura, e risolvendo poi un sistema di due equazioni in due incognite. A sua volta, questo procedimento può essere generalizzato. Pertanto data la relazione espressiva di un certo fenomeno che lega, fra loro, misure di grandezze, di classe diversa (nella quale siano contenuti parametri, di vario tipo, tutti od in parte incogniti), è possibile determinare i valori numerici delle incognite, misurando tutte le grandezze, presenti nel fenomeno in differenti condizioni sperimentali.
In questo modo, si ottengono alcune relazioni, fra grandezze misurate (cioè le misure eseguite) ed i parametri incogniti, che possono inoltre contenere anche i valori numerici di altri parametri già noti.

- Se il numero di relazioni è esattamente uguale al numero di parametri, il sistema è consistente e direttamente risolubile.
- Se invece il numero di relazioni eccede il numero di parametri, nel sistema occorre far uso di un qualche criterio di optimum delle discrepanze presenti fra le grandezze misurate, rispetto al modello ipotizzato.

Ritrovati tutti i valori numerici, inizialmente incogniti, contenuti nella relazione cercata, allora la stessa relazione può essere nuovamente considerata come un metodo di misura indiretta e la relazione stessa definisce la classe delle grandezze che sono così misurate. Si supponga ora che i parametri di definizione della relazione cercata siano invece noti e risultino direttamente misurate, in una particolare condizione ambientale, ad un certo istante, tutte le grandezze (determinanti e determinata) presenti. Inoltre si supponga che la relazione cercata sia già verificata teoricamente e sperimentalmente, in modo tale da non ammettere dubbi, sulla sua realtà od almeno applicabilità, nel campo d'indagine soggetto ad esame. In tal caso, la relazione cercata/trovata assume il compito di controllo delle misure dirette, eseguite su quel particolare fenomeno.

Allora le relazioni cercate, funzioni di più parametri incogniti, possono essere dette osservazioni indirette (oppure con un'espressione più recente, osservazioni di condizione con parametri incogniti [83]). Invece le relazioni trovate, usate per il controllo di un gruppo di misure dirette (relative a tutte le grandezze contenute, in un determinato fenomeno, noto nel suo comportamento e codificato in una serie di relazioni), sono dette osservazioni condizionate o misure condizionate. Il problema, legato a questa serie di misure, è la loro verifica e la ricerca, secondo criteri opportuni di optimum, delle variazioni da apportare alle misure stesse, affinché soddisfino, il più rigorosamente possibile, l'insieme delle relazioni trovate. Questo ultimo problema è simile alla sopraccitata adozione, nel caso delle osservazioni indirette, di un qualche criterio di optimum delle discrepanze presenti fra le grandezze misurate, rispetto al modello ipotizzato [84].

La presentazione di problemi, dove sono presenti sistemi composti da equazioni ed incognite, qualunque oggetto essi rappresentino (osservazioni, cioè misure dirette od indirette, dei vari tipi, come pure parametri incogniti e vincoli), conclude la metrologia ed apre alla statistica. In questo contesto, i problemi d'interesse appartengono principalmente alla teoria della stima ed all'inferenza statistica. Infatti sono teoria della stima: il principio dei minimi quadrati, lineari e non lineari, con tutte le sue generalizzazioni ed estensioni, così come le procedure robuste, i processi stocastici ed i controlli numerici (sul condizionamento dei sistemi da risolvere e sull'affidabilità degli schemi di misura). Invece sono inferenza statistica: la validazione dei dati e dei modelli (con i test statistici della normalità e non parametrici, la cluster analysis, l'analisi di varianza, la regressione multipla e l'analisi fattoriale).

Problemi complementari sono presentati dalla statistica computazionale e dall'analisi dei dati. Infatti la statistica computazionale presenta i metodi numerici per la soluzione di grandi sistemi (con metodi diretti ed iterativi, nonché con le strutture della regolarità) ed il calcolo di matrici inverse cui affiancare tecniche di matematica discreta, quale la teoria dei grafi. Invece l'analisi dei dati, oltre a quanto già noto dalla teoria della stima e dall'inferenza statistica, presenta altre opportunità con le trasformazioni elementari, gli elementi finiti ed i filtri. A riguardo, occorre precisare come l'antico legame tra metrologia e statistica sia davvero particolarmente importante, perché il cammino dalla metrologia alla statistica è a testimonianza d'una tappa notevole, nello sviluppo del trattamento delle osservazioni, da un lato, mentre d'altro canto, proprio l'antico legame dà fondamento alle osservazioni della statistica, presentandole come misure e/o dati.

[83] I parametri incogniti possono, a loro volta, essere legati tra loro da relazioni di vincolo. In tal caso, le equazioni del problema sono dette osservazioni indirette condizionate (oppure con un'espressione più recente, osservazioni di condizione con parametri incogniti e vincoli).

[84] Sotto condizioni abbastanza larghe, è poi possibile trasformare un problema in un altro. D'altra parte, ogni classificazione, così come ogni legge fisica e/o geometrica (addirittura anche i riferimenti nello spazio e nel tempo) sono, quasi sempre, largamente arbitrari e convenzionali.

Digressione sugli strumenti di misura
Lo strumento per le misura diretta delle grandezze non è solo un'astrazione logica, ma è operazionalmente efficiente. Tuttavia la struttura dello strumento attuale, pur risultando dallo strumento logico, solo eccezionalmente si avvicina agli schemi originari. Per alcuni tipi, lo scostamento è tale che se ne è perso il contatto deduttivo ed è giustificato chiedersi, se la continuità evolutiva, da quei primi schemi scarni, agli attuali, esista veramente. Spesso anzi questo legame è reciso con l'intento di affermare l'indipendenza degli strumenti moderni e negare ogni derivazione da schemi logici, ritenendo utile vedere nello strumento un semplice indicatore che collega i numeri alle grandezze, in una maniera ignota od almeno che non è necessario conoscere. Infatti la definizione di misura non prescrive nessuna condizione particolare, circa il modo con cui si provoca la relazione univoca fra grandezze e numeri.
Pertanto potrebbe bastare soddisfare la definizione di misura di una grandezza. Infatti in un certo senso, si è tentati di ricondurre gli strumenti attuali, cioè quelli che sono usati per misurare, allo schema di misura detto indiretto. Lo strumento consiste in un fenomeno la cui intensità è condizionata della grandezza da misurare in quel fenomeno inserito. In base alla indicazione ricevuta, le grandezze sono serializzate e misurate. Non si può disconoscere che gran parte degli strumenti, in uso, si può ricondurre allo schema semplice, sussistendo zone particolari, della scienza e della tecnica, per le quali strumenti di tale natura possono bastare per la misura classificatoria delle grandezze in esame. Tuttavia considerando il problema della misura non settorialmente, ma nella sue totalità, occorre porre a fondamento della misurazione la misura detta diretta, qualificabile come di seguito riportato [85].

- ❑ I sistemi di unità di misura fondamentali hanno significato, solo se si applicano ad operazioni di misura diretta. Per gli strumenti, usati come puri e semplici indicatori, bisogna istituire sistemi di riferimento per i quali perde significato la locuzione grandezza doppia, tripla, ecc. di una grandezza di riferimento.
- ❑ I principi di conservazione, attualmente enunciati per alcuni tipi di classi di grandezza, richiedono che si dia un particolare significato all'operazione di somma delle grandezze. Tale significato, valorizzato dalla misura diretta, svanisce completamente, qualora le misure delle grandezze siano tutte di tipo indiretto e classificatorio.
- ❑ I principi di conservazione possono ancora essere enunciati nella forma attuale, semplice e lineare, qualora gli strumenti di misura indiretta siano in possesso di scale lineari, cioè tali che l'indicazione fornita risulti proporzionale alla grandezza misurata. Scale così fatte possono ottenersi dopo opportuna taratura, per confronto con strumenti di misura diretta.
- ❑ Infine in realtà molti strumenti di misura attuali, se analizzati attentamente. si rivelano perfettamente allineati con lo strumento logico per la misura diretta. Anzi gli strumenti che hanno uno struttura più vicina a quella dello strumento logico sono anche quelli che permettono misure più precise di ogni altro strumento

Schema di genealogia dello strumento di misura attuale
L'indagine sugli strumenti attuali ha lo scopo di mostrare, pur nella varietà di tipi, che la successione genealogica dallo strumento logico non è interrotta. A tale scopo. non è inutile ricapitolare la struttura iniziale. L'operazione fondamentale, eseguita nello strumento logico per la misura diretta, è quella di mettere a confronto due quantità:

- ❑ a quantità in possesso di una grandezza che si vuole misurare;
- ❑ la quantità di riferimento ottenuta per costruzione, mediante l'operazione di somma degli elementi del campione ed alla quale, oltre ad una grandezza della stessa classe cui appartiene quella da misurare, è associata una grandezza di divisibilità, cioè un numero.

Gli organi essenziali sono:

- ❑ l'organo necessario per costruire la grandezza di riferimento;
- ❑ l'organo che permette di emettere giudizi di uguaglianza sulle quantità messe a confronto.

Il primo organo comprende in sé i due primi organi già individuati nello strumento logico e cioè il campione e l'organo per reiterare l'evento mediante il quale si esegue la somma degli elementi del campione. In tutti gli strumenti di misura diretta, questi due organi sono presenti; tuttavia non sempre risulta semplice isolarli ed individuarli nella intricata struttura degli strumenti attuali. Infatti accanto allo strumento per la misura diretta delle grandezze si è affiancato e diffuso lo strumento fondato sulla misura indiretta delle grandezze. La struttura di questo è notevolmente diversa dallo strumento logico, ma si fonda comunque sull'esistenza e sulla ripetibilità di un fenomeno che lega la grandezza da misurare (detta determinata) ed altre grandezze (dette determinanti), in numero di una o più, a loro volta, misurate direttamente. Lo strumento misuratore risulta così costituito nelle sue parti essenziali:

- ❑ dall'organo che genera il fenomeno, quando esso è portato in presenza della grandezza da misurare
- ❑ dagli organi atti alla misura dirette delle grandezze determinanti.

Pertanto tra lo strumento di misura diretta e lo strumento di misura indiretta sembra debba in teoria esistere una differenza netta, anche se il secondo, per la misura delle grandezze determinanti, deve presupporre l'esistenza dello strumento di misura diretta. Invece nella pratica, si è davanti una quasi continuità nella gamma delle strutture strumentali, passando dagli schemi di misura diretta prossimi allo schema dello strumento logico, fino agli schemi di misura indiretta prossimi allo schema di misura di tipo classificatorio, senza variazioni repentine e discontinuità evidenti. I due tipi di strumenti si compenetrano l'uno nell'altro via, via che lo schema si complica. Per cercare di vedere più chiaramente entro la struttura dello strumento e comprendere, in quale misura esso dipenda dall'uno o dall'altro tipo di misura, occorre costruire un diagramma a blocchi, individuando tutte le sue intricate ramificazioni.

MISURA DIRETTA

Organo per giudicare delle quantità messe a confronto

Verifica sensoriale diretta, con l'uso della proprietà transitiva dell'uguaglianza

Uso diretto del senso (come per le scale, i colori ed i segnali acustici)

Uso di amplificatori che non alterano la classe delle grandezze confrontate

Verifica sensoriale indiretta, con l'uso della proprietà transitiva dell'uguaglianza

[85] A riguardo, si veda: Qualità, quantità, grandezze, di Ercole Bottani (Libreria editrice Tamburini, Milano, 1962).

Uso del metodo della sostituzione delle grandezze da confrontare (come per i termometri)

Uso del metodo cosiddetto dello zero e dell'equilibrio di un fenomeno (come con i piatti di una bilancia)

<u>Organo per la costruzione delle grandezze di confronto di misura nota</u>

Le quantità di confronto sono ottenute mediante la somma degli elementi campione

Il numero degli elementi del campione è illimitato, così da richiedere un organo per contare gli elementi sommati (come con gli orologi)

Il numero degli elementi del campione è molto limitato (solo uno o due) e richiede l'uso di procedimenti iterativi

Gli elementi del campione sono ottenuti per via diretta (come con i cosiddetti misurini)

Gli elementi del campione sono ottenuti per via indiretta

La successione delle quantità di confronto è costruita e misurata in precedenza

La successione delle quantità costruite è completa e contiene tutte le grandezze di confronto necessarie (come con una scala graduata)

Le quantità precostituite formano una successione discontinua di grandezze, cosicché da esse si possono ricavare, con un numero esiguo di operazioni di somma, tutte le grandezze della classe (come per i misuratori di variazioni)

Le quantità precostituite formano una successione discontinua, ma regolare, di grandezze

Le grandezze intermedie sono ottenute per interpolazione direttamente, mediante la somma di un numero limitato di campioni (come per i pesi di una bilancia)

Le grandezze intermedie sono ottenute per interpolazione con metodi indiretti (come con la bilancia cosiddetta a stadera)

La successione delle quantità di confronto è ottenuta e misurata indirettamente

MISURA INDIRETTA

<u>Organo per la produzione del fenomeno usato per la misura indiretta</u>

La grandezza determinate, presente nel fenomeno, è una sola (come per i micrometri)

Le grandezze determinati, presenti nel fenomeno, sono più di una

Ad ogni ripetizione della misura indiretta, una sola grandezza determinante è effettivamente misurata

Le altre grandezze determinati non sono mai misurate e sono mantenute costanti (come con gli strumenti tarati)

Le altre grandezze determinanti sono misurate inizialmente, in maniera diretta, e poi mantenute costanti (come per le operazioni di taratura)

Le altre grandezze determinanti sono misurate inizialmente, in maniera indiretta, e poi mantenute costanti

Ad ogni ripetizione della misura indiretta, le grandezze determinanti sono tutte effettivamente misurate (come per le misure di alta precisione)

<u>Organo per la misura delle grandezze determinanti</u>

Lo strumento contiene in sé gli organi per misurare le grandezze determinanti

Lo strumento esegue la registrazione delle misure delle grandezze determinanti (come per gli strumenti tecnici)

La misura delle grandezze determinanti avviene mediante lettura della posizione di un indice su una scala

Il valore della misura della grandezza determinante è letto direttamente sulla scala (come per i termometri)

Il valore della misura della grandezza determinante è ottenuto, mediante una curva di taratura, a partire dalla lettura sulla scala (come per le misure ambientali di un tempo)

Il valore della misura della grandezza determinante è ottenuto, mediante relazioni analitiche, a partire dalla lettura sulla scala (come per le misure ambientali odierne)

Le grandezze determinanti sono misurate mediante l'uso di strumenti esterni indipendenti

Gli strumenti usati sono di tipo diretto (come per quasi tutte le misure di un tempo)

Gli strumenti usati sono di tipo indiretto

La statistica: procedimento di indagine di tipo induttivo
I risultati di un’operazione di misura, intesa nel suo significato più vasto, possono essere numeri o quantità:

- numeri, quando si vuole misurare la grandezza posseduta da una quantità data;
- quantità, quando si vuole particolarizzare una grandezza di misura nota, cioè costruire una quantità.

In entrambi i casi, i risultati sono individualità ben precise, eventi concreti, conseguenza di determinate operazioni, dipendenti dal processo, dalla storia di tutte le azioni precedenti e dalle condizioni iniziali dell’operazione stessa. Ogni misura ed ogni quantità ottenuta contiene in sé un cumulo di notizie della quale è il risultato anche se non è accessibile per la via deduttiva ed analitica. Tuttavia tutto quello che risulta nascosto, quando si è di fronte ad un individuo solo (numero o quantità), diventa invece accessibile almeno parzialmente ad un’indagine, quando l'oggetto dell’analisi è una popolazione, assai numerosa di individui, omogenea per quanto riguarda il processo generativo, ma eterogenea per quanto riguarda alcune caratteristiche somatiche degli individui, ottenuti da quel processo. L'indagine su questa popolazione, il confronto fra gli individui, può far risalire alla conoscenza di importanti notizie:

- sulla uniformità del processo generativo;
- sulla stabilità delle caratteristiche esaminate;
- sulle variazioni delle condizioni ambientali.

Di conseguenza, queste notizie, ricavate dall'insieme degli individui, hanno carattere globale, in quanto non possono arrivare a stabilire e ricostruire, nelle sue condizioni e nel suo processo evolutivo, ogni individuo. Tuttavia danno indicazioni utili sulla tendenza generale dell’operazione, permettendo così d’associare, al processo produttivo degli individui, indici significativi per il confronto con popolazioni derivate da processi analoghi. Il problema proposto è tipico del metodo induttivo, posto a fondamento d’ogni indagine scientifica di tipo naturalistico e/o antropico. Induzione significa argomentare, risalire dal particolare al generale, dalla conoscenza dei fatti alla conoscenza delle leggi che li regolano. Inoltre pur non mirando a scopi cosi alti, l’indagine da fare per mettere in evidenza informazioni più significative, contenute nelle popolazioni il cui esame interessa, richiede un procedimento dialettico dello stesso tipo di quello induttivo.
Questo metodo consta di un primo stadio di natura solo classificatoria nel quale si ordina la popolazione, secondo criteri intrinseci, procedendo ad una fase di ricerca sulla popolazione, per definirne le caratteristiche principali, in maniera completa, ma sintetica. L'indagine continua poi in una ricerca della struttura del gruppo, sempre più intima, ma in generale questa ultima fase non interessa in modo molto preminente. Esiste una metodologia, ormai codificata, detta statistica, per eseguire l’indagine induttiva. La nascita della disciplina risale al ‘600/‘700; all’inizio, ha carattere puramente applicativo ed il nome stesso deriva da una delle sue prime applicazioni: la scienza degli stati. A poco a poco, questa scienza si libera dalle applicazioni che ne mascherano il contenuto indipendente e si va codificando in una scienza autonoma il cui compito consiste proprio nell’indagine induttiva, sui dati accumulati dall’esperienza [86].

[86] Oggigiorno la statistica metodologica è definibile come la disciplina che studia la variabilità, intesa come l’attitudine di una grandezza al variare, cioè un ramo delle matematiche che studia questo campo del tutto nuovo, rispetto alla matematica deterministica (come ad esempio, la geometria, l’aritmetica. ll’algebra., ecc.): della attitudine a variare, e ne mette in evidenza l'importanza, concettuale e pratica. Per l'indagine induttiva sulla struttura della popolazione composta dalle quantità prodotte o dalle misure ottenute, si fa riferimento alla metodologia statistica, così come si è costruita, in oltre tre secoli del suo sviluppo, dalla statistica descrittiva all’inferenza statistica, come pure dalla teoria della stima alla statistica computazionale, ecc.

Le variabili statistiche e le variabili casuali

Data una popolazione, composta da un certo numero di individui, di qualsiasi tipo essi siano e qualunque sia il processo generativo comune che li ha formati, la statistica insegna come classificare questa popolazione in relazione ad un unico suo aspetto, quello che interessa l'indagine e come descriverla o rappresentarla sinteticamente in tutte le sue particolarità somatiche, attraverso una serie di indici significativi. Innanzitutto è importante, prima di qualsiasi indagine statistica, delimitare con precisione la popolazione che si vuole esaminare. Questo si ottiene mediante la definizione delle caratteristiche comuni, in maniera indifferenziata, a tutti i componenti la popolazione e tale che non ammetta ambiguità o indeterminatezza nel tracciare la separazione tra individui interni alla popolazione e gli individui esterni. Dopodichè una volta definita la popolazione, si può esaminare la sua struttura.

Tuttavia gli individui della popolazione possiedono altre caratteristiche alcune delle quali non più in maniera uniforme per tutti gli individui. Anzi gli individui nella popolazione si distinguono proprio in base alle differenze tra alcune caratteristiche possedute da ciascuno di essi. Si chiamano attributi di una popolazione particolari caratteristiche degli individui, della popolazione stessa, che si manifestano in essi con forme differenti. Studiare una popolazione significa esaminare, come si distribuiscono le varie forme degli attributi sugli individui della popolazione, ovvero classificare gli individui secondo le varie forme degli attributi. Infatti classificare la popolazione, secondo un determinato attributo o argomento, significa individuare la forma che spetta a ciascun individuo della popolazione. Per questo, occorre che ciascun attributo, in relazione al quale si vuole effettuare l'organizzazione della popolazione possegga i seguenti requisiti.

- L'attributo può assumere forme distinte tra loro incompatibili, perché ogni individuo deve possedere una sola forma dell'attributo.
- Ogni forma rappresenta un concetto di classe, in quanto è possibile che più individui possano possedere la stessa forma.
- In ogni individuo della popolazione è presente una delle forme e l'attributo deve essere presente, pur sotto diverse forme, in ciascun individuo della popolazione.
- Almeno due individui nella popolazione, ma non necessariamente tutti, sono in possesso di diverse forme dell'attributo, cosicché la popolazione stessa non si presenta totalmente omogenea.

Allora per avviare un'indagine statistica su un attributo di una popolazione, preso in considerazione un certo individuo, si deve sempre decidere quale forma dell'attributo sia presente nell'individuo. La successione delle diverse forme non sempre può rappresentarsi con numeri, in maniera immediata; tuttavia questa possibilità esiste sempre nei casi che interessano la trattazione delle misure. Inoltre l'argomento può assumere un numero finito di forme e, in tal caso, è detto discreto, oppure può presentarsi con un numero infinito di forme (tutte contenute con continuità in un intervallo limitato) e allora è detto continuo. Tuttavia nella pratica, si hanno sempre argomenti di tipo discreto, perché ogni risultato di misurazioni, per sensibile che sia lo strumento con cui si effettuano le misure, è sempre una serie discreta, anche se numerosa, di valori che differiscono tra loro di quantità finite.

La rappresentazione grafica della variabile statistica (con l'istogramma ed il cumulogramma), pur essendo spesso assai espressiva da un punto di vista qualitativo, fornisce solo scarse indicazioni quantitative. Di conseguenza, spesso è necessaria una descrizione matematica più accurata e, a questo scopo, sono introdotti alcuni indici che, usando tutti i dati, ne precisano le caratteristiche essenziali. Come noto, per la variabile statistica ad una dimensione, queste caratteristiche sono riferite al centro, alla dispersione, alla simmetria ed alla curtosi (ovvero al comportamento delle code). Invece per la variabile statistica a due dimensioni, le stesse caratteristiche sono presentate per ciascuna delle due componenti marginali, come per ciascuno degli elementi delle due famiglie condizionate. Tuttavia per questa variabile statistica, una nuova caratteristica gioca un ruolo fondamentale: la dipendenza tra le due componenti.

La dipendenza ha un campo di variazione delimitato dall'indipendenza stocastica e dalla perfetta dipendenza funzionale. Casi intermedi, in un crescere progressivo del grado di dipendenza, sono dati dalla connessione (o dipendenza vaga), dalla regressione (o dipendenza funzionale) e dalla correlazione (o dipendenza lineare). A riguardo, altre rappresentazioni grafiche (ovvero la tabella di contingenza/connessione, le curve di regressione e di variabilità, e le rette di regressione lineare) sono di grande interesse, proprio perché essenziali per mettere in evidenza la dipendenza. In particolare, la curva di regressione permette di controllare la presenza di fattori che perturbano sistematicamente il centro di una popolazione, spostandolo progressivamente. Invece la curva di variabilità permette di controllare l'eventuale presenza di cause perturbanti di carattere accidentale.

Formalmente analoghe alle variabili statistiche sono le variabili casuali che tuttavia, anche se rappresentate dagli stessi numeri, sono invece diverse per il loro contenuto concettuale. Infatti la variabile statistica è il risultato di una classificazione effettiva, già eseguita su individui concreti, mentre la variabile casuale è solo una classificazione ipotetica, caratterizzata da una nuova grandezza, detta dalla probabilità matematica [87]. A sua volta, questa grandezza, formalmente analoga alla frequenza relativa (cioè al rapporto tra la frequenza assoluta o presenza degli eventi sulla totalità dei dati presenti), è definita come il rapporto fra il numero degli individui di una popolazione, aventi valore identico a quello atteso (che costituiscono l'insieme degli ipotetici [88] casi favorevoli), ed il numero di tutti gli individui di quella stessa popolazione che possono essere estratti completamente a caso (costituenti l'insieme di tutti i casi possibili).

Per completezza, si riprende il confronto tra variabili statistiche e variabili casuali. Infatti la variabile statistica è un evento ormai concluso e fissato in una forma concreta e definita. Invece per quanto riguarda la variabile casuale [89], si suppone di non essere gli ordinatori di una popolazione, ma di trovarsi nella posizione di coloro che intendono eseguire delle prove su questa popolazione, comunque già ben organizzata ed inquadrata. Le prove in questione sono l'estrazione a caso dal gruppo della popolazione complessiva di uno o più individui, ovvero osservare i valori (argomentali) che essi possiedono. Per estrazione a caso si deve intendere un'operazione che abbia tutti gli attributi opposti a quelli della scelta. Dell'individuo estratto, non si deve sapere nulla, nella sua prima estrazione, salvo che sia uno degli individui della popolazione [90]. Infatti l'operazione dell'estrarre a caso deve risultare indipendente dal valore argomentale dell'individuo estratto.

---

[87] In sede teorica, non è ancora formulata una definizione del concetto di probabilità universalmente accettata.; tuttavia il senso del concetto è ben noto e familiare a tutti. Da un punto di vista psicologico, si può associare il concetto di probabilità alla giustificazione dell'attesa di un evento casuale. A riguardo, occorre inoltre notare come la definizione assiomatica di Kolmogorov (che Cunietti non prende in considerazione) individui una classe di funzioni matematiche più estesa della probabilità, comunemente intesa.

[88] Proprio il carattere ipotetico delle variabili casuali fa sì che queste possano essere non solo discrete, dove l'analogia con le variabili statistiche è completa, ma anche continue, cosa che introduce, nella statistica, le caratteristiche proprie dell'analisi matematica.

[89] L'operazione (ipotetica) sulla variabile casuale si compone di tre fasi:

- estrazione a caso di un individuo;
- notazione del valore dell'attributo posseduto;
- reintroduzione dell'individuo nella popolazione.

[90] In altre parole, in rapporto all'operazione dell'estrazione a caso, gli individui della popolazione devono comportarsi come se fossero tutti esattamente identici. Pertanto non deve esistere nessun elemento di scelta, neppure di natura inconscia o inconsapevole, ma deve invece essere possibile, con i medesimi atti e con le medesime operazioni di estrazione a caso, prendere l'uno o l'altro degli individui, in maniera assolutamente indipendente dalla caratteristica posseduta.

Se si eseguono, sempre sulla medesima popolazione, una serie di estrazioni a caso, ciascuna delle quali composta da un numero sempre maggiore di individui, si possono costruire altrettante variabili statistiche, con queste stesse serie. Dall'analisi empirica delle variabili statistiche che formano la suddetta successione, risultano alcune evidenze sperimentali, all'aumentare del numero di estrazioni (cioè del numero di individui che compongono ciascuna prova), e l'insieme di questi risultati prende il nome di legge empirica del caso. Si badi tuttavia come questa tendenza, risultato di un'indagine empirica/sperimentale, non vada mai intesa nel senso stretto e rigoroso dell'analisi matematica (quasi si tratti del limite di una funzione), ma in senso più lato e vago, senza nessuna legge precisa di convergenza. Allora le suddette evidenze sperimentali possono così essere riassunte.

- La serie dei valori argomentali delle variabili statistiche, a partire da un certo numero in poi (tuttavia non definibile esattamente), risulta pressoché identica alla serie dei valori argomentali della popolazione sulla quale si eseguono le prove.
- La serie dei valori numerici delle frequenze relative, di ciascun valore argomentale, tende verso la serie degli stessi valori della popolazione (originaria), qualunque sia la successione di gruppi (sempre più numerosi) di estrazioni che si esamini.
- La serie dei valori limiti verso cui tende la serie delle frequenza relative, al crescere del numero delle prove, coincide numericamente con la serie delle frequenze dei corrispondenti valori argomentali nella popolazione originaria, cioè quella sulla quale (ipoteticamente) si sono eseguite le prove.

Di conseguenza, i risultati di prove o estrazioni a caso, eseguite su una popolazione, formano una variabile statistica che, per un numero di estrazioni molto grande, ha gli stessi valori argomentali della popolazione originaria. A questi dati, corrispondono valori numerici delle frequenze relative che, al crescere del numero delle estrazioni, tendono a differire sempre meno dagli stessi valori posseduti dei medesimi elementi della popolazione originaria. Pertanto all'atto di eseguire l'estrazione a caso di un individuo, due sono gli atteggiamenti soggettivi possibili: assoluta indifferenza (rispetto al risultato dell'estrazione), oppure attesa preferenziale (verso un individuo in possesso di un particolare argomento). In questo secondo caso, una domanda pertinente si chiede quale sia la probabilità di soddisfare l'attesa, ovvero che l'individuo estratto possegga il valore argomentale preferito.
Questa giustificazione, fin qui basata su elementi soggettivi, deve essere rifondata su elementi oggettivi di giudizio, così da poter guardare le cose dall'esterno, giudicando della validità o meno dell'attesa. Su questi elementi oggettivi di giudizio, va basata, non tanto la definizione di probabilità, quanto piuttosto una sua misura. A riguardo, l'esperienza condensata nella legge empirica del caso afferma che esiste un valore limite verso cui tende sperimentalmente la frequenza relativa di un certo valore argomentale, in una serie sempre più numerosa di estrazioni da una popolazione data. Se il valore limite della frequenza è alto, il valore argomentale corrispondente è pù frequentemente estratto e più frequentemente è esaudita l'aspettativa. Viceversa se il valore è basso, il valore argomentale corrispondente è meno frequentemente estratto e meno frequentemente è esaudita l'aspettativa.
Pertanto la serie dei valori limite (la cui esistenza è stabilita dalla legge empirica del caso) può essere presa come misura della probabilità, giustificando così che il risultato di un'estrazione a caso sia un individuo in possesso di un dato valore argomentale. Allora la misura della probabilità matematica di un dato valore argomentale è rappresentata dallo stesso numero della frequenza relativa (limite) del medesimo valore

argomentale nella popolazione originaria sulla quale si eseguono le prove. In questo modo, dicesi probabilità matematica il rapporto fra il numero degli individui aventi il valore argomentale identico a quello atteso (casi favorevoli) ed il numero di tutti gli individui della popolazione che possono essere estratti a caso (casi possibili). In base a questa definizione, la frequenza relativa di un evento si riveste del concetto di probabilità senza variare il suo valore [91].

L'importanza della legge empirica offre anche la possibilità di eseguire indagini su popolazioni di composizione non nota. Infatti data una popolazione alla quale non si può (o non si è ancora potuto) associare una variabile statistica, la sua composizione può essere studiata mediante una serie di prove od estrazioni a caso da eseguirsi sulla stessa popolazione. La variabile statistica, costruita con i risultati delle prove, costituisce una rappresentazione della popolazione su cui si eseguono le prove, tanto più significativa e tanto più fedele all'originale, quanto maggiore il numero delle prove. Naturalmente deve essere supposto che l'operazione di estrazione sia pienamente rispondente alla definizione di estrazione casuale. Infatti la variabile statistica, costruita sulle prove ripetute, può considerarsi una rappresentazione empirica della variabile casuale, legata alla popolazione (detta teorica) [92].

---

[91] Con questa definizione, la popolazione, con le operazioni da farsi su di essa, si proietta in un mondo ipotetico, diventando una variabile casuale. Pertanto malgrado nell'apparenza le serie numeriche delle variabili statistiche e delle variabili casuali siano formalmente identiche, il loro contenuto concettuale è completamente diverso. Infatti la variabile statistica, come già detto in precedenza, è il risultato di una classificazione effettiva su individui concreti, mentre le variabili casuali sono solo classificazioni ipotetiche che, a sua volta, rimanda a possibili operazioni concrete da cui ricavare successive variabili statistiche. Resta da segnalare, come tutta la costruzione di Cunietti della variabile causale e del concetto di probabilità si rifaccia alla definizione frequentista di Ludwig von Mises e non a quella assiomatica di Andrej Nikolaevič Kolmogorov che intende le variabili casuali e la probabilità come modelli matematici astratti, dati a propri, prescindendo da una qualsiasi loro possibile costruzione.
D'altra parte, lo stesso Cunietti scrive che la genesi descritta della variabile casuale può non essere l'unica logicamente accettabile (implicitamente rifacendosi non solo alla sopraccitata definizione assiomatica, ma anche sottintendendo la definizione geometrica di Pierre Simon Laplace o quella soggettiva di Bruno De Finetti). Tuttavia è vero che tutte le variabili casuali possono essere costruite, partendo da una opportuna popolazione. Sotto questo punto di vista operativo, la variabile casuale è sempre legata ad un'operazione di estrazione, semplice o complessa, da eseguirsi su una popolazione. Pertanto nella pratica, si può sempre parlare di variabile casuale solo in presenza di una precedente popolazione di individui, comunque già ben organizzata ed inquadrata.
Di seguito, sono elencate le successive tappe di questo processo di derivazione. Infatti organizzata ed inquadrata la popolazione, in base all'attributo scelto, si può intendere questa stessa popolazione come una (più ampia) variabile statistica. Allora il passo successivo è porsi, davanti ad essa, con l'intenzione di eseguire prove, ovvero estrazioni a caso. In questo modo, la sopraccitata variabile statistica è proiettata nell'aspettativa e diventa una variabile casuale con gli identici attributi cui corrispondono, come probabilità, i valori numerici delle frequenza relative. Da questa derivazione concettuale della variabile casuale, da una popolazione (intesa come una variabile statistica), e dalla loro coincidenza numerica deriva la possibilità di trasferire i criteri di rappresentazione grafica e sintetica dalla variabile statistica alla variabile casuale. Rimane poi, come già detto in precedenza, la possibilità di estrarre a caso, dalla variabile casuale, alcuni elementi, costruendo così una o più variabili statistiche, su cui operare concretamente.

[92] Le scienze naturali si trovano spesso, nel loro compito d'indagine della natura, di fronte a variabili statistiche, ovvero a popolazioni, delle quali si deve analizzare la composizione che, a loro volta, si possono considerare risultati di precedenti prove, più o meno complesse. Proprio in questo vedere e cercare in ogni gruppo di individui attuali, formanti una popolazione con caratteristiche particolari, il risultato di prove, in senso statistico (eseguite su popolazione più semplici e di tipo più originario), sta la motivazione all'indagine scientifica, tentativo dopo tentativo, riconducendo così il sapere ad elementi sempre più semplici, ma con schemi di portata sempre più vasta. In questa direzione, una spinta notevole è data dalla constatazione che molti fenomeni (fisici, biologici, economici e sociali), pur sotto la loro apparente instabilità, non si presentano all'indagine sotto l'aspetto, labile ed indefinito, di una variabile statistica, ma si rivelano, a lungo andare, dotati di una rigidità di comportamento, propria di fenomeni il cui rapporto di causalità risulti ben definito. Questa rigidità di comportamento si manifesta nella persistenza della struttura statistica delle popolazioni esaminate.
Infatti in natura, esistono fenomeni, rappresentati da variabili statistiche la cui composizione rimane fondamentalmente identica anche al variare del tempo e di alcune condizioni ambientali, ovvero fenomeni di natura statistica che si manifestano sempre con le medesime caratteristiche di variabilità. Ad esempio, l'indagine statistica su una popolazione, sia in maniera diretta che mediante prove indirette, può rilevare una certa distribuzione delle frequenze dei valori argomentali, rappresentabile con una curva di frequenza. Un'indagine analoga, avendo di mira il medesimo argomento, ripetuto su altre popolazioni (prodotte da un processo generativo analogo al precedente, ma in differenti condizioni temporali ed ambientali), potrebbe portare alla formulazione di altre curve di frequenze che, pur essendo numericamente diverse, formano tuttavia una famiglia di curve dello stesso tipo. In questo caso, le differenze sono dovute alle variazioni di alcuni parametri caratteristici che rispecchiano diversità non sostanziali, ma contingenti. Questa tendenza di una certa caratteristica fenomenica a variare sempre con le medesime modalità è detta variabilità strutturale.
Quasi tutte le scienze presentano casi di variabilità strutturale, cioè una fondamentale stabilità della loro variabilità naturale, nel senso che questa stabilità rappresenta una caratteristica intima e profonda dei fenomeni osservati. Allora ciascuno di questi casi possiede un suo proprio modo di comportarsi cui corrisponde una particolare famiglia di curve di frequenza. In questi casi, il problema fondamentale è determinare la struttura della loro variabilità, stabilendo il tipo di famiglia di curve di frequenze che meglio li rappresenta. Una volta assodata sperimentalmente la permanenza di questa struttura intima, con mezzi logici ed analitici, da poche prove occorre ricavare i valori dei parametri caratteristici della curva di frequenza propria della distribuzione statistica della popolazione su cui si sono eseguite le prove. Tuttavia la statistica non si arresta di fronte alla classificazione di fenomeni, mediante curve di frequenza, ma vuole studiare il problema, fino in fondo, il perché di questa persistenza del modo di variare. Infatti un teorema di convergenza stocastica rende ragione della persistenza della variabilità di fenomeni di tipo elementare, semplice e perfettamente schematizzabili.

Lo schema d'inquadramento, adottato nel calcolo delle probabilità, collega la variabile casuale e la variabile statistica, mediante una specie di derivazione casuale l'una dall'altra. Ogni variabile casuale può essere associata ed anzi derivata da una popolazione reale, organizzata secondo una variabile statistica, purché su questa popolazione si eseguono estrazioni a caso, più o meno complesse, al risultato delle quali sia associato uno stato d'attesa, da parte di uno o più individui. Tuttavia questo processo generativo può essere anche invertito. Infatti ogni popolazione è formata da individui ciascuno dei quali è stato ottenuto, attraverso un processo produttivo, a volte noto, altre volte totalmente ignoto e spesso noto solo parzialmente. Pertanto si può ritenere la popolazione stessa, come formata da un gruppo di oggetti od individui, ottenuti da prove od estrazioni, a loro volta, effettuate su un'altra o su più altre popolazioni antecedenti.
L'intima derivazione stabilita tra variabile casuale e variabile statistica porta a ritenere puramente fittizie le variabili casuali continue. Infatti in queste ultime, il concetto di popolazione di individui si perde e svanisce la possibilità di descrivere l'operazione di estrazione a caso, elementi entrambi posti a base dell'esistenza di ogni variabile casuale. Pertanto dalla non operazionalità della variabile casuale continua deriva che ogni variabile casuale (sulla quale si possono eseguire estrazioni) porta sempre sperimentalmente a risultati di tipo discontinuo, se non altro per effetto delle misure (discontinue, per loro propria natura), eseguite su questi risultati od individui estratti. Tuttavia malgrado la non operazionalità delle definizioni di variabile casuale continua, non si può non riconoscere l'utilità pratica di trattare le variabili casuali con mezzi matematici, validi solo al continuo [93].
Collegato alla definizione ed all'utilizzo di variabili casuali continue, il sopraccitato teorema di convergenza stocastica stabilisce il limite verso cui tende, nel senso del calcolo della probabilità [94], una somma di variabili casuali, indipendenti ed equiponderate (od una loro combinazione lineare, a coefficienti positivi), quando il numero di queste variabili casuali cresce indefinitamente. Infatti il risultato fondamentale degli studi sulla convergenza stocastica è sintetizzato dal teorema di Laplace – Chebyshev, dove la distanza geografica e temporale è spiegata dall'intuizione del primo e dalla dimostrazione [95], del secondo (ovvero di Pafnuty Lvovich Chebyshev) e della sua scuola. Nella pratica, l'importanza di questo teorema sta nel fatto che essa può ritenersi sufficientemente approssimata anche per valori finiti del numero di variabili casuali, prese in considerazione, purché questo numero sia abbastanza alto.
Allora il suddetto teorema può essere così enunciato. Se una variabile casuale è data dalla somma (o da una combinazione lineare, a coefficienti positivi) di un numero rilevante di altre variabili casuali, indipendenti e dello stesso ordine di grandezza, che variano secondo leggi ignote, intorno ai rispettivi valori medi, gli scostamenti della variabile casuale primitiva dal proprio valore medio (o dal proprio valore medio ponderato) ubbidiscono alla legge normale della probabilità. Pertanto le valutazioni quantitative di un fenomeno, derivate da un gran numero di piccole cause, di efficacia compatibile, nella loro piccola oscillazione attorno al valore medio (od al valore medio ponderato), seguono la legge normale [96] (queste operazioni giustificano l'uso comune della media aritmetica e della media ponderata, per rappresentare il valore centrale di una variabile casuale, purché ammetta queste statistiche, e di una qualsiasi variabile statistica).

[93] La convenienza di assimilare il comportamento discontinuo di una variabile casuale al comportamento di una funzione continua porta ad accettare, entro questi limiti restrittivi di validità, la definizione e l'utilizzo di variabili casuali continue.
[94] Castelnuovo G.: Calcolo della probabilità. Zanichelli, Bologna, 1926.
[95] Ballarin S.: Lezioni di matematiche complementari. CEDAM, Padova, 1949
[96] La variabile casuale normale o di Gauss è una variabile casuale di tipo continuo. Oltre che dal/i valore/i centrale/i, è caratterizzata dalla/e misura/e di precisione (collegata/e all'apertura della campana ed il/i cui inverso/i misura/no la/e dispersione/i ed è/sono detto/i varianza/e). Nel caso di variabili casuali a due o più dimensioni (cui si riferisco i plurali precedenti) la dipendenza è modellata dal/i solo/i indice/i di dipendenza lineare/i (comunemente detto/i coefficiente/i di correlazione).

Errori di misura

Dalla definizione di misurazione, discende la definizione di misura, come quel numero univocamente correlato a ciascuna grandezza di una certa classe, in un certo modo prefissato. Nella definizione citata, l'unico attributo esplicitamente formulato per le misure è quello dell'univocità. Ogni altro requisito non è fondamentale o concettualmente essenziale. Grandezze e misure devono corrispondersi univocamente: ad ogni grandezza deve corrispondere una ed una sola misura, ad un numero deve corrispondere una ed una sola grandezza di una data classe. Pertanto la misura "vera" di una grandezza è quella che possiede i requisiti della univocità, con riferimento al metodo prescelto per stabilire la correlazione. Tuttavia i risultati pratici, delle molte misure fatte, dicono invece che il metodo di correlazione non sempre si manifesta come univoco.

In generale, l'esame del modo con cui si manifesta questa carenza di univocità porta a questa semplice constatazione: solo una o due delle ultime cifre, ottenute del procedimento di misura, variano al ripetersi della operazione. Se con decisione drastica, si taglia via l'estrema propaggine del numero, l'operazione di misura torna a dare risultati univoci e conseguentemente una misura "vera". Tuttavia a questa resezione numerica, occorre far coincidere una resezione concettuale, cioè occorre volutamente rinunciare alle cifre al di là dell'ultima cifra rimasta, a resezione avvenuta. Infatti non occorre concepirla come un'approssimazione numerica, ma come un'approssimazione concettuale, per necessità di cose, attribuita non tanto alla misura, quanto alla grandezza misurata.

Al di là dell'ultima cifra misurata, occorre riconoscere l'esistenza di una zona indefinita delle grandezze nella quale è inutile entrare per misurare. Una misura "vera" ottenuta con una tale resezione, pur essendo legittima, non è soddisfacente, da un punto di vista economico,in quanto il prezzo pagato, per l'univocità, è eccessivo. Infatti con questa drastica soluzione, si provoca un'evidente limitazione delle precisione della misura, annullando lo sforzo sia tecnico che economico, del costruttore, per ottenere uno strumento di precisione elevata. Pertanto prima di giungere a questo soluzione estrema, conviene studiare più a fondo le cause della variabilità delle misure, alla ricerca di quella univocità di correlazione che permette di ottenere una misura "vera" (in ogni caso, facendo ben attenzione al significato, insieme empirico e convenzionale, di misura "vera", usato da Cunietti, qui ed altrove).

Lo strumento logico per lo misura diretta può presentare imperfezioni che limitano il campo entro il quale provoca correlazioni univoche fra numeri e grandezze. A loro volta, queste imperfezioni sono dovute agli organi che nello strumento adempiono ai vari compiti. Tuttavia i difetti degli organi dello strumento logico non sono mai essere tali da provocare carenze di univocità, nelle misure, quali sono quelle constatate al ripetersi di ogni operazione di misura. Infatti è sperimentalmente accertabile che più lo schema dello strumento attuale si avvicina, per semplicità allo strumento logico, meno dispersa risulta la serie dei risultati. Al contrario, quanto più complesso è lo schema dello strumento attuale di misura, scostandosi dello schematismo logico (e così adottando catene sempre più numerose di passaggi intermedi che rendono indiretta la correlazione), tanto più dispersi risultano i valori delle misure ripetute.

Sembra quasi che quanto più il legame, stabilito fra grandezza e numero, si frantuma in successivi passaggi intermedi, quasi allungandosi e disperdendosi, nello spazio e nel tempo, tanto più sia attaccabile ed alterabile dalla variabilità dell'ambiente. Infatti mentre lo schema teorico della misura avviene in un universo isolato, del tutto autonomo e sufficiente, composto dalle sole classi di grandezze, intervenute nell'operazione di misura, la realtà presenta invece un'operazione, immersa in un ambiente con il quale interagisce, in molti modi. A riguardo, è detto ambiente: l'universo del quale l'evento misura è solo una delle tante manifestazioni che possiede prerogative, proprietà e necessità non ancora completamente indagate. Pertanto il risultato della misura è una produzione anche dell'ambiente, inteso in questo senso amplissimo, come l'insieme di tutte le proprietà della realtà che interagiscono e agiscono con le misure.

Ambiente è una condizione esterna, come i diversi campi in cui si trova immersa la misura, oppure interna, come le proprietà della materia degli organi degli strumenti e della grandezza da misurare. L'ambiente può essere sintetizzato in un certo numero di grandezze, caratterizzati le sue proprietà. Tuttavia in generale, non si conoscono misura, tipo ed entità di queste grandezze, oltre che il modo con cui avviene la relazione con la grandezza da misurare, talvolta addirittura la definizione concettuale. Le poche conoscenze sull'ambiente portano solo a supporre sia instabile, tanto nella struttura più fine, quanto in quella più grossolana. Anche la sua interazione con l'operazione di misura è variabile, variando così i risultati numerici. L'ambiente reale ha un'influenza fondamentale sulle misure che si fa tanto più grave, quanto più lo strumento, distaccandosi dallo schema logico, si avvicina al tipo di misura indiretta [97].

La misura "vera" nell'ambiente reale e la popolazione delle misure possibili

La presenza dell'ambiente reale e la constatazione che ciascuna misura non costituisce mai un universo isolato ripropone nuovamente un problema di base, estremamente importante.

- Cosa è la misura "vera", se ogni misura, a causa dell'ambiente, porta sempre a risultati discrepanti?
- Occorre ritenere ogni misura "vera", in se stessa, ed accettare il risultato di una serie di misure come un documento della variabilità ambientale?

Necessità tecniche impongono di ricercare nuovamente un'univocità, in questa disparità, e di ricondurre, sia pure per via puramente ipotetica, la misura reale allo schema ideale (pertanto al di là di queste molteplicità, occorre ricercare l'univocità). Tuttavia anche così la misura "vera", cioè quella univocamente correlata con la grandezza deve essere definita, accettando la presenza ingombrante dell'ambiente e senza uscire dai limiti dell'operazione stessa. Infatti secondo le premesse fatte, non si conosce proprio nulla delle grandezze che caratterizzano l'ambiente oppure, se anche si conosce qualcosa, ad esso non si attribuisce alcun particolare valore prestabilito. Allora l'unica possibilità, per riportare l'univocità della misura, è considerare, come misura "vera", la misura fatta in un ambiente tipo, caratterizzato da grandezze di definizione e misura incognite, ma comunque stabili nel tempo.

L'ambente tipo prescelto deve essere reale, inerente alla misura e compreso entro le possibilità locali della misura stessa. Questo ambiente tipo é l'ambiente caratterizzato da valori delle grandezze, medi fra quelli che può assumere, nell'ambito della sua variabilità locale e temporale. Pertanto misura "vera" di una grandezza è quella misura che si ottiene, ripetendo le misure con quello strumento, nell'ambiente stabilizzato sui valori medi delle sue grandezze caratteristiche, in quel periodo di tempo ed in quell'intervallo. Questa definizione soddisfa ai requisiti operazionali richiesti. Ogni misura che non avviene in condizioni di stabilità, nell'ambiente medio; non è una misura "vera", mentre l'insieme di tutte le misure, ciascuna corrispondente a tutte le possibili situazioni dell'ambiente, seppure instabile, intorno alle sue condizioni medie, costituisce la popolazione delle misure possibili.

---

[97] Questa influenza è tale che, nella maggior parte dei casi, si può ritenere che la variabilità della misura ripetuta sia lo specchio della variabilità dell'ambiente, inteso nel senso più lato possibile, in cui essa è eseguita e ripetuta.

Ogni misura effettiva eseguita nell'ambiente reale può considerarsi come una estrazione a caso di un valore della popolazione delle misure possibili. Accolta questa definizione di misura attuale e la corrispondente definizione di misura "vera", si può introdurre il concetto di errore, come differenza algebrica fra la misura attuale e la misura "vera" corrispondente. A riguardo, è bene ricordare che, ogni qual volta, si parla di errori si deve intendere la differenza fra due elementi intrinseci della misura stessa, nel senso che non è lecito parlare d'errore, se il riferimento, cioè la misura "vera", non è insito nello stesso procedimento misurativo. Pertanto occorre confrontare qualcosa di reale (la misura attuale), con qualcosa che può esistere (la misura "vera") ed è legato alle stesse condizioni del reale dalle quali deriva la misura effettuata, nello stesso ambiente, nello stesso spazio e nello stesso tempo [98].
Se dopo aver eseguito una misura [99], si effettua una seconda misura della stessa grandezza [100], gli eventi, che si possono presentare, giocoforza non contemporanei, sono sostanzialmente di due tipi.

- La popolazione delle misure possibili non ha mutato la sua composizione, con il trascorrere del tempo, e le due estrazioni successive sono eseguite sulla stessa popolazione o variabile casuale.
- Le condizioni ambientali sono così mutate, nel lasso di tempo intercorso, fra l'una e l'altra misura, da far supporre che si sia modificata la composizione strutturale delle popolazione, cosicché le due estrazioni successive risultano eseguite su due popolazioni diverse cui corrispondono due variabili casuali diverse.

In conseguenza del fatto che necessariamente le due estrazioni non possono essere contemporanee, i due tipi di eventi conducono, in generale, ad ipotesi di realizzazione differente.

- La prima ipotesi è generalmente ammessa quando non avvengono cambiamenti macroscopici, ambientali e strumentali, durante il periodo della misura (in generale, condizione assai frequente, quando le misure si susseguono in un breve intervallo di tempo).
- La seconda ipotesi deve, per forza, essere supposta vera, quando un lungo intervallo di tempo è trascorso, tra una misura e la successiva.

Nei casi in cui sia ritenuta valida la prima ipotesi, l'esecuzione di misure successive porta a risultati numerici, considerati derivati da estrazioni a caso, eseguite su una stessa popolazione delle misure possibili. A loro volta, l'insieme dei risultati, di queste estrazioni a caso, rappresenta una popolazione, detta popolazione dei risultati di estrazioni a caso, corrispondenti alle misure eseguite. Nei casi in cui sia ritenuta valida la seconda ipotesi, ovvero quando la popolazione è variata ad ogni ripetersi delle estrazioni, allora i risultati delle misure non formano un'unica popolazione derivata e devono essere trattati diversamente, secondo altri e più complessi procedimenti di tipo statistico – probabilistico che fanno riferimento alla modellazione della suddetta dipendenza delle misure dal tempo ed alle mutate condizioni ambientali. In ogni caso, la statistica ed il calcolo delle probabilità forniscono tutti i mezzi utili per rispondere.

[98] Parlare invece di misura "vera", facendo riferimento a qualcosa di ideale, non ha significato pratico. Infatti l'ambiente medio, qui definito, e la misura "vera", ad esso legata, pur essendo un'astrazione, è strettamente connesso e dipendente dell' ambiente reale e da fattori contingenti concreti, anche se non entrambi conosciuti.
[99] Da un punto di vista statistico, eseguire una misura significa effettuare un'estrazione a caso.
[100] Sempre da un punto di vista statistico, eseguire una seconda misura significa effettuare una seconda estrazione a caso, riguardo alla quale è opportuno fare un'importante precisazione.
Infatti andando oltre quanto affermato dal testo di Cunietti, le due estrazioni possono essere fra loro indipendenti, oppure dipendenti, con pro e contro dovuti a situazioni concrete, legate allo scopo delle misure, al loro trattamento ed alla validazione delle stesse e dei risultati ottenuti, per mezzo di esse. In ogni caso, trattandosi di questioni fini e delicate, proprie del trattamento delle osservazioni e ritenute estranee agli scopi del presente lavoro, si rinvia alla letteratura specialistica.

Errori accidentali e sistematici nelle misure dirette

Si supponga di essere nella condizione in cui le misure sono ottenute tutte per estrazione a caso dalla stessa popolazione delle misure possibili. Allora la ripetizione della misura di una grandezza può permettere la ricostruzione empirica della struttura della variabile casuale, rappresentativa di quel procedimento di misura. Naturalmente, la ricostruzione empirica si limita a fornire i valori empirici dei due indici fondamentali descrittivi della popolazione delle misure possibili: la media e lo scarto quadratico medio. Lo scopo precipuo dello sperimentatore, non è indagare sulla struttura della popolazione delle misure (salvo casi speciali nei quali interessa conoscere le cause agenti sulla misura ed il comportamento della popolazione), ma di giungere, per mezzo della ripetizione delle misure, alla misura "vera" della grandezza, posseduta dalla quantità misurata, ed all'errore quadratico medio della misura stessa [101].

D'altra parte, la presenza dell'errore pone il problema di come raggiungere la misura "vera" che si nasconde entro la popolazione delle misure possibili e, a riguardo, esistono due possibilità.

- La misura "vera", cioè la misura nelle condizioni ambientali medie, coincide con la media statistica di tutte le misura possibili.
- La misura "vera" non coincide con la media statistica delle misure possibili.

Allora per questa via, si può giungere (o non giungere affatto) ad un valore della misura in possesso della prerogativa dell'univocità, tendenzialmente coincidente (o meno) con la misura "vera".

- Nel primo caso, per quanto insegna il calcolo delle probabilità e, in particolare, la legge empirica del caso è possibile, se non raggiungere, almeno avvicinare, quanto si vuole, il valore "vero". Infatti la media dei valori estratti, cioè delle misure, è una rappresentazione empirica della media teorica generale della popolazione delle misure possibili e, di conseguenza, della misura "vera" [102]. Quando si è in presenza di popolazioni di misure, in possesso di queste caratteristiche, gli errori di misura sono accidentali.
- Nel secondo caso, quando si è in presenza di una popolazione delle misure possibili la cui media non coincide con il valore della misura nelle condizioni ambientali medie, cioè la misura "vera" (ma presenta una deviazione, detta *bias*), per definizione, perde ogni significato l'operazione di ripetere più volte la misura. Infatti i risultati di questa serie di estrazioni portano ad una media che non rappresenta la misura "vera". In questa condizione, gli errori di misura sono di natura sistematica.

Pertanto quando una popolazione non può essere ritenuta composta da misure, affette dai soli errori accidentali, la presenza di errori sistematici rende inutile la ricerca del valore "vero", attraverso prove ripetute. A riguardo, pur nella limitata applicabilità di un procedimento a carattere deterministico (come osservare non piccoli e non trascurabili i quadrati di uno sviluppo in serie del *bias*), è importante rilevare che ogniqualvolta le misure in esame sono eseguite in ambienti, con ampiezza di variazione accentuata, l'ipotesi sull'accidentalità degli errori è assai precaria (questa constatazione è ben nota anche sperimentalmente). Di conseguenza, una misura può essere buona solo se è curata la sua preparazione, in modo da rendere minimo il suo bias (infatti solo in questo caso, data l'ignoranza sulla variabilità ambientale, si può supporre che abbia significato ripetere le misure).

[101] Per questa via, si può giungere ad un valore della misura in possesso .della prerogativa dell'univocità.
[102] Il calcolo delle probabilità insegna a ricavare anche altri indici, caratteristici della popolazione delle misure, ed a determinarne il rispettivo grado di attendibilità. Pertanto anche la media delle misure (rappresentativa della misura "vera") ha un significato euristico.

Riassumendo e concludendo, si può affermare che gli errori di misura si ripartiscono in due grandi categorie.

- La prima classe è costituita dagli errori accidentali e comprende tutti gli scostamenti delle misure di una grandezza dal valore "vero" che si distribuiscono, in modo pressoché simmetrico. intorno a quel valore "vero". La variabile casuale, costruita su tutti i valori possibili della misura, ha un valore medio coincidente con il valore "vero". In questo caso, la ricerca del valore medio, ovvero del valore "vero", avviene usufruendo dei normali mezzi offerti dal calcolo delle probabilità.
- La seconda classe è costituita dagli errori sistematici e comprende tutti i casi in cui le perturbazioni danno luogo ad una popolazione di misure possibili la cui media non coincide con il valore vero della misura. In queste circostanze, non si dispone di alcun mezzo che, a posteriori, permetta di ridurre l'influenza dannosa degli errori sistematici sui risultati delle misure dirette. Pertanto l'azione può essere solo preventiva, agendo direttamente sull'operazione stessa e, in particolare sull'ambiente.

Infatti evitare totalmente gli errori sistematici è impossibile, ma si può limitarne la dannosità, innanzitutto e soprattutto, con una più accurata determinazione e limitazione della variabilità ambientale. Infatti in molti casi, la maggiore limitazione, all'applicabilità del ragionamento deterministico analitico, è il carattere non reversibile del tipo d'interazione fra ambiente e misura, ovvero l'ambiente, con la sua variabilità, induce variazioni permanenti sulla misura. La storia stessa dell'operazione di misura lascia traccia sul risultato (allora è vivente che l'operazione di media perde ogni valore euristico). Si può schematizzare questo fatto, dicendo che l'operazione di misura, pur restando individualmente un'estrazione a caso dalla popolazione delle misure possibili, lascia la popolazione stessa, ad estrazione avvenuta, non invariata nella sua struttura (come richiesto dalla regola del gioco), ma interamente alterata.
Dopodichè l'estrazione successiva avviene su una popolazione diversa, non solo nella distribuzione dei valori argomentali, ma anche nella posizione del valore medio. Pertanto si può concludere che, anche per queste misure (dove un elemento indiretto è costituito dalla presenza non indifferente dall'ambiente, ignoto nelle sue caratteristiche e nel suo modo d'agire), è valido il principio del valore medio, purché si tengano presenti le limitazioni accennate. Infatti proprio il variare delle caratteristiche ambientali mette in gioco il concetto di dipendenza (delle misure dall'ambiente), da modellare secondo le modalità specifiche della dipendenza, come già detto in precedenza. Allora lo studio della connessione, l'analisi della dipendenza funzionale (altrimenti detta regressione) ed il calcolo della correlazione sono strumenti principe, per poter modellare, in modo deterministico, la suddetta dipendenza [103].
Diverse sono le modalità di modellazione deterministica e, tra queste, si possono elencare le interpolazioni polinomiali e l'interpolazione con il metodo degli elementi finiti, nei suoi vari e differenti modi d'impiego (ad esempio, facendo uso di funzioni *spline*). Altri approcci deterministici trasferiscono l'analisi dal dominio dei valori argomentali al dominio delle frequenze, studiando queste con le armoniche di Fourier, oppure con le cosiddette ondine (in inglese, *wavelet*). Infine passando da modellazioni deterministiche a modellazioni stocastiche, così da assumere l'ambiente stesso come un parametro ordinatore di un gruppo d'invarianza per le misure eseguite, il filtraggio di un segnale stocastico (correlato) da un rumore residuo (aleatorio) può essere una strada alternativa, per un trattamento fine, quando si siano stabilite certe stazionarietà ed una precisa condizione distribuzionale.

[103] Quanto segue è oltre quanto scrive Cunietti, ma un suo naturale prosieguo, tenuto anche conto del tempo intercorso.

Costruire un’identità

Alla naturale conclusione della presentazione dei principali aspetti metrologici, contenuti nel libro: *Corso teorico e pratico sulle misur*e (del Prof. Mariano Cunietti) e sulla base dell’autorevole lezione ricevuta, è d’interesse individuare strade percorribili per costruire un’identità. Infatti l’identità può essere:

- un’uguaglianza matematica,
- una sentenza legale;
- un puzzle culturale.

A giudizio di chi scrive, la terza possibilità è meglio massimamente, perché garantisce le strutture della libertà, senza rifarsi a verità precostituite, accettando il rischio di sbagliare, con mitezza, modestia ed umiltà, e desiderosa sempre e comunque di migliorarsi, per ovvie ragioni di dignità.

I libri sono pieni delle parole dei saggi, degli esempi degli antichi, dei costumi, delle leggi, della religione. Vivono, discorrono, parlano con noi, ci insegnano, ci ammaestrano, ci consolano, ci fanno presenti ponendole sotto gli occhi cose remotissime nella nostra memoria. Tanto grande è la loro dignità, la loro maestà, e infine la loro santità che se non ci fossero i libri noi saremmo tutti rozzi e ignoranti, senza alcun ricordo del passato, senza alcun esempio; non avremmo conoscenza alcuna delle cose umane e divine; la stessa urna che raccoglie i corpi, cancellerebbe anche la memoria degli uomini (da una lettera del cardinale Basilio Bessarione [104] al doge di Venezia Cristoforo Moro, Viterbo, 31 maggio 1468).

Fig. III.1 – Giuseppe Arcimboldo, Il Bibliotecario (Skoklosters Slott, Stoccolma)

E’ probabilmente vero in linea di massima che della storia del pensiero umano gli sviluppi più fruttuosi si verificano spesso ai punti d’intersezione tra due diverse linee di pensiero (Werner Karl Heisenberg).

Non si è artisti se non si è dilettanti, se non si supera la parte faticosa dell’arte, se non si arriva al diletto (Alberto De Chirico, detto Alberto Savinio) [105].

[104] Basilio Bessarione (detto anche Giovanni Bessarione), filologo umanista ed filosofo neoplatonico, è d’origine balcanica, scuola greco-bizantina ed a lungo ha vissuto in Europa occidentale, per missioni diplomatiche, svolte con spirito conciliatore ed unitario.

[105] La citazione da Alberto Savinio offre lo spunto per presentare questo lavoro nell’occasione del 70° compleanno del Prof. Carlo Monti, ordinario di Topografia al Politecnico di Milano, insigne fotogrammetra, esperto nel rilievo (geometrico) e nella rappresentazione (metrica) di beni culturali ed ambientali, persona eccellente, squisita e di vasta cultura. Tra le opere più importanti, svolte dal Prof. Carlo Monti, sono da ricordare i rilievi per il Cenacolo Vinciano, la Basilica di San Marco a Venezia, la Torre di Pisa ed il Duomo di Milano.

Commiato ed auguri [106]

Il ricordo del Prof Mariano Cunietti è grande in chi, come chi scrive, ha avuto modo di conoscerlo, a fondo ed a lungo, e ne ha apprezzato grandemente capacità, cultura ed umanità. Allora la conclusione naturale di una citazione critica non è il rimpianto, ma l'invito a guardare oltre. Infatti questo atteggiamento è sicuramente quello che oggigiorno sarebbe auspicato dal Prof. Mariano Cunietti. In questo contesto, l'affresco strappato del *Mondo Novo* di Giandomenico Tiepolo, con le persone di schiena, su una nave, aggrappate a parapetto e rivolte verso il mare, è un invito doveroso a guardare curiosamente lontano, mantenendo salda l'attenzione anche alla realtà presente. Giandomenico Tiepolo precede di una sola generazione Wolfgang Amadeus Mozart, l'autore musicale preferito dal Prof. Mariano Cunietti, ed in entrambi si può notare un misto, insieme interessante e divertito, di razionalità illuminista e gioia cortese. Quale miglior augurio per tutti, per la Scuola di Milano, negli anni a venire, e per chiunque voglia intraprendere questo cammino che tante soddisfazioni ha offerto a molti: non bisogna aver paura, ma saper osare criticamente (disse, anni fa, proprio il Prof. Mariano Cunietti: anche la fisica moderna di Via Panisperna – un vanto italiano – è iniziata così!).

Fig. III.2 – Gianndomenico Tiepolo, Mondo Novo (Ca' Rezzonico,Venezia,
affresco strappato dal portico della Villa di Zianigo, Mirano)

Certo, tutti vorremmo essere liberi da colpe; ma l'autoassoluzione non può lasciarci tranquilli … Solo degli imbecilli che si credono onniscienti possono proclamarsi mondi da ogni errore e colpa, limitandosi ad accusare i nemici della parte opposta o gli amici che sono stati al loro fianco (Indalecio Prieto, leader socialista moderato, ministro della Spagna repubblicana, durante guerra civile spagnola).

Se tu cambi, si cambia anche il volto del mondo (Carl Gustav Jung).

Piuttosto diffidente con questo imperativo della creatività … per prima cosa ci vogliono delle basi di esattezza, metodo, concretezza, senso della realtà. E' soltanto su una certa solidità prosaica che può nascere una creatività: la fantasia è come la marmellata, bisogna che sia spalmata su una solida fetta di pane. Se no, rimane come una cosa informe, come una marmellata, su cui non si può costruire niente (Italo Calvino, aforisma).

[106] Alcune parole di precisazione devono doverosamente essere scritte a proposito del Prof. Mariano Cunietti, della sua memoria e della sua eredità scientifica. L'autore ha avuto modo di conoscerlo ed apprezzarlo, per oltre venti anni, a partire dal suo ingresso nell'allora Istituto di Topografia Fotogrammetria e Geofisica del Politecnico di Milano, appena dopo la sua laurea in questo stesso ateneo, fino al suo ritorno al Politecnico di Milano, nella Sezione Rilevamento del DIIAR, proprio sulla cattedra che fu del prof. Mariano Cunietti e, prima ancora, del Prof. Gino Cassinis. Gli anni passati, l'età attuale, poco superiore a quella del suo primo incontro con il Prof. Mariano Cunietti, e l'occasione di un lavoro sulla Scuola di Milano, i suoi aspetti metodologici e, in particolare, il trattamento delle osservazioni, suggeriscono di riprendere i capitoli, relativi alla metrologia, del suo ancora preziosissimo libro (purtroppo ormai fuori catalogo, esaurito e pressoché introvabile), ponendoli come terza parte, del lavoro stesso, quale pietra miliare.

APPENDICE D – Le formule per la misura di grandezze

Il testo di Cunietti è ricco di formule, sia nella sua prima parte, dedicata alla misura delle grandezze, sia nella seconda parte, rivolta all'analisi critica dei risultati. In questa appendice, sono riportare le più importanti della prima parte, opportunamente corredate dalla documentazione didascalica necessaria, mentre tutte quelle della seconda sono omesse, in quanto facenti riferimento a ben note espressioni della statistica.

Le misure dirette non hanno bisogno di formule, per la misura delle loro grandezze, fornendo direttamente le quantità osservate, in termini di conteggi, ovvero di numeri interi e razionali (in pratica, decimali finiti), se rapportate ai conteggi relativi alle loro unità di misura. Invece le misure indirette appartengono al campo dei numeri reali (anche se la loro rappresentazione effettiva è sempre data da numeri decimali finiti) [107].

L'espressione matematica di una generica misura indiretta y è una funzione, a più variabili, funzione di misure dirette x_i (od eventualmente indirette per le quali, a loro, volta occorre riferirsi ad altre espressioni matematiche):

$$y = F(x_i) \qquad \text{con} \qquad i = 1, n$$

Una prima classe particolare di grandezze esprime relazioni di proporzionalità:

$$y = \Lambda \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda(i)}$$

dove le misure dirette x_i sono quozienti tra le misure effettive e le misure relative alle loro unità di misura, $\lambda(i)$ sono gli esponenti in gioco per ciascuna misura diretta, e Λ è l'equivalente generale di conversione, a sua volta, definito dall'espressione:

$$\Lambda = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{u_{x(i)}}{u_y} \right)^{\lambda(i)}$$

A riguardo, occorre notare come l'equivalente generale di conversione sia strettamente necessario, perché un termine, uguagliato ad un prodotto, può essere sostituito da un quoziente, uguagliato al prodotto di quozienti con lo stesso divisore, mentre è necessario far uso dell'equivalente generale di conversione (pena falsare l'uguaglianza), se i divisori sono diversi.

Una seconda classe particolare di grandezze esprime relazioni del tipo della somma:

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

dove le misure dirette x_i sono quozienti tra le misure effettive e le misure relative alle loro unità di misura. A riguardo, occorre altresì notare come le relazioni del tipo della somma non richiedano l'uso dell'equivalente generale di conversione (per la differente aritmetica della somma, rispetto al prodotto).

[107] I numeri reali sono sempre frutto di una qualche trasformazione matematica (ad esempio, l'estrazione di una radice qualsiasi). Del resto, anche i numeri razionali sono ottenuti tramite un'operazione aritmetica, ovvero quozienti qualsiasi di numeri interi, se non limitati a numeri decimali finiti (che un'opportuna moltiplicazione riporta a numeri interi).

Un caso particolare di grandezze, appartenenti alla classe di grandezze esprimibili con relazioni del tipo della somma, sono le grandezze determinate dalla relazione di somma fra la grandezza fondamentale e le sue variazioni successive (la cui interpretazione generalizzata apre la strada alla trasformazione delle relazioni di proporzionalità in relazioni del tipo della somma):

$$y = y_0 - \sum_{i=1}^{n} \Delta y_{(i)} = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(-\Delta y_{(i)}\right) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$ [108] con $x_i = \left(-\Delta y_{(i)}\right) \quad \forall i$

dove y_0 è la grandezza fondamentale e x_i sono le sue variazioni successive.
Pertanto la trasformazione delle relazioni di proporzionalità in relazioni del tipo della somma fa ricorso allo sviluppo in serie di Taylor delle suddette relazioni di proporzionalità. Dopodichè se questo sviluppo in serie è arrestato al primo ordine, allora le espressioni ottenute sono proprio relazioni del tipo della somma:

$$y = y_0 + \Lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{y_0}{x_i}\right) \delta x_i + \frac{1}{2} \Lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\lambda_i - 1) \left(\frac{y_0}{x_i^2}\right) \delta x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} \lambda_i \lambda_j \left(\frac{y_0}{x_i x_j}\right) \delta x_i \delta x_j \right) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \Lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\lambda_i - 1)(\lambda_i - 2) \left(\frac{y_0}{x_i^3}\right) \delta x_i^3 + 3 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} \lambda_i (\lambda_i - 1) \lambda_j \left(\frac{y_0}{x_i^2 x_j}\right) \delta x_i^2 \delta x_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} \sum_{k=1 (k \neq j \neq i)}^{n} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \left(\frac{y_0}{x_i x_j x_k}\right) \delta x_i \delta x_j \delta x_k \right) + \ldots$$

$$y = y_0 + \Lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{y_0}{x_i}\right)^{\lambda(i)-1} \delta x_i$$

Ovviamente espressioni di questo tipo sono molto più generali di quelle capaci di trasformare relazioni di proporzionalità in relazioni del tipo della somma, bastando scrivere la generica funzione F, togliere gli esponenti e l'equivalente generale di conversione, adottando tutti gli accorgimenti del singolo caso specifico, per scrivere corretto il suddetto sviluppo in serie.

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \delta x_i \delta x_j \delta x_k + \ldots$$

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i$$

Un'osservazione marginale rileva la relativa lunghezza delle relazioni sviluppate in serie di Taylor, seppure arrestate a poche derivate. D'altra parte, il voler compattare tutti gli ordini di derivazione, con un'ulteriore sommatoria, renderebbe poco leggibile l'espressione (che già contiene insieme derivate pure e miste).
Un'osservazione conclusiva sottolinea la particolare importanza dell'arresto al primo ordine, in quanto essa forma sistemi lineari che, purché di rango pieno, sono gli unici sempre risolubili, con il solo limite della

[108] Le seconda e terza uguaglianze non hanno finalità pratiche e servono solo ad introdurre le considerazioni successive.

capacità di calcolo attuale. D'altra parte, sono note varie procedure iterative [109] che permettono di risolvere sistemi non lineari, opportunamente linearizzati.
Per contro, la linearizzazione ha notevoli vantaggi, da un punto di vista statistico. Infatti tutto quello che può essere considerato lineare può avere una distribuzione normale e, come noto, questa condizione porta alla statistica della normalità che gode di proprietà ottimali.
Tutto ciò non significa che i dati debbano sempre essere legati da relazioni lineari, ma che l'ambito della linearizzazione è capace di contenere tutta la dispersione dei dati stessi cui fa riferimento la suddetta distribuzione normale ipotizzata.
Allora il problema della non linearità è ricondotto ad un problema di analisi matematica, dove opportune procedure iterative fanno sì che si possa ricavare una sufficiente approssimazione all'interno della quale valgono linearità e normalità [110].
Inoltre la linearità è proprio necessaria, quando si voglia valutare la dispersione, accanto ai valori centrali, propagando la stessa, dai dati acquisiti (o stimati da precedenti trattamenti) alle stime attese, tenuto conto anche dell'eventuale dipendenza presente tra i dati stessi.
A riguardo, nell'immediato prosieguo, si riporta la legge di propagazione (della varianza e della covarianza) e le loro formule ridotte, nel caso di assenza di correlazioni tra i dati (che esprimono la dipendenza lineare), non infrequente nelle acquisizioni dirette.

$$\sigma_{y_i}^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_{x_k}^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\sigma_{x_k x_l} \quad \forall\, i$$

$$\sigma_{y_i}^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_{x_k}^2 \quad \forall\, i$$

$$\sigma_{y_i y_j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\sigma_{x_k}^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_l} + \frac{\partial y_j}{\partial x_k}\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\right)\sigma_{x_k x_l} \quad \forall\, i, j \geq i$$

$$\sigma_{y_i y_j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\sigma_{x_k}^2 \quad \forall\, i, j \geq i$$

La normalità è altresì richiesta per svolgere i test statistici più potenti, cioè più capaci di discriminare tra ipotesi relativamente vicine tra loro. In alternativa, si possono essere usati test non parametrici (in inglese: *distribution free*), più generali, ma molto meno potenti dei primi.
Infine resta da osservare come la normalità non goda della proprietà della robustezza e che, in presenza di dati anomali (spesso veri e propri errori grossolani), sia necessario far uso di procedure robuste, per la loro identificazione ed eliminazione.
Tuttavia anche in questo caso, la combinazione opportuna di procedure robuste e di un'analisi statistica, tipica della normalità, permette di raffinare il risultato, riacquisendo così, al grosso buono dei dati, altri dati inizialmente sospettati anomali e successivamente non dimostratisi tali.

---

[109] A riguardo, classica è la procedura iterativa di Newton-Fourier.
[110] Qualche volta, la normalità è ottenuta dopo una trasformazione delle variabili, come nel caso delle parti piccole e degli eventi rari.

APPENDICE E – Fondamenti della misurazione [111]

Come è utile che vi siano differenze d'opinione, così lo è che vi siano differenti esperimenti di vita, che le diverse personalità siano lasciate libere d'esprimersi, purché gli altri non ne vengano danneggiati, e che la validità di modi di vivere sia verificata nella pratica quando lo si voglia (John Stuart Mill, Saggio sulla libertà).

I concetti stessi dell'operazione, detta misurazione, e del suo risultato, detto misura, sono ora soggetti ad estensione per:

- Il possibile utilizzo di sensori a distanza e non solo a contatto;
- la definizione di nuovi simboli non solo numerici;
- l'avvento di nuove discipline con nuove cose da misurare;
- la volontà collettiva di comunicare intersoggettività tramite la misurazione.

Misurare è effettuare, nell'ordine:

- una classificazione, stabilendo classi d'equivalenza per indistinguibilità;
- un'etichettatura, assegnando un nome (ovvero un simbolo),

dove le due operazioni possono scambiarsi, se la classificazione avviene, per tentativi ed approssimazioni successive, durante l'etichettatura.

E' compito di ogni conoscenza trovare il limite e la misura delle cose (Platone, Filebo). Il numero è una proprietà della qualità: voglio dire che i numeri sono nel mondo (Keplero, Lettera la maestro Maestlin, 1595).

Pertanto effettuare una misura ha due significati:

- estensionale e formale, per riconoscere un nome (cioè assegnare un simbolo);
- operazionale e empirico, per effettuare una misura (cioè determinare un valore con un'operazione).

Quello che si misura è il valore di un attributo, qualitativo (che può essere semplicemente classificatorio, oppure più ambiziosamente comparativo) o quantitativo, di una qualsiasi cosa, indicata con un nome (ovvero un simbolo). A sua volta, l'attributo può essere definito come:

- una proprietà;
- un'operazione di misura,

accettando, senza inutili radicalismi, classi d'equivalenza per indistinguibilità operativa (d'altra parte, ben esistono proprietà, in sé evidenti, che non richiedono operazioni di misura).

Il vero significato di un termine va cercato esaminando come un uomo lo usa, non cosa dice (Percy Williams Bridgman). Il significato di una proposizione è il metodo della sua verificazione (Moritz Schlick).

Da un punto di vista prettamente formale, occorre notare che l'operazione che collega le cose ai nomi (cioè ai simboli) non è necessariamente iniettiva (in quanto due o più cose possono avere lo stesso nome), né

[111] Fondamenti della misurazione: un punto di vista operazionale – rappresentazionale, è la Tesi di Dottorato di Ricerca in Metrologia: Scienza e Tecnica delle Misure, di Luca Mari (oggigiorno professore ordinario di Misure elettriche all'Università Carlo Cattaneo di Castellanza – VA), svolta sotto la tutela del prof. Mariano Cunietti ed ultima seguita dallo stesso, in ordine di tempo. Proprio per questo motivo, una breve esposizione della stessa serve a documentare il punto d'arrivo della riflessione metrologica di Cunietti.

suriettiva (in quanto un nome può non avere riferimento ad alcuna cosa). Inoltre non è impossibile trovare cose senza nome che portano alla definizione di nuove classi, con l'attribuzione di nuovi nomi (cioè di nuovi simboli). Invece la relazione che collega le cose alle loro classi d'equivalenza è suriettiva (essendo inutile definire classi vuote), mentre la relazione che collega le classi d'equivalenza ai loro nomi è iniettiva (per l'univocità richiesta nella definizione di classi d'equivalenza). A questo si aggiunga che, nella metrologia classica, la relazione che lega nomi e numeri naturali è biettiva ed invertibile. Infatti proprio i numeri naturali sembrano storicamente derivati, dall'antichità remota, da classi d'equivalenza. Infine per quanto riguarda le operazioni sui valori degli attributi, non tutte le misure sono additive e, ancora meno, sono quelle moltiplicative (in pratica, solo per alcune misure di spazio e di tempo).
In ogni caso, le misure sono i termini di un linguaggio alla cui grammatica devono sottostare.

La scienza, sebbene ricerchi aspetti di realtà indipendenti dal linguaggio, non può agire senza il linguaggio, e nemmeno può aspirare alla neutralità linguistica. Non di meno, lo scienziato può aumentare l'oggettività e diminuire l'interferenza del linguaggio proprio attraverso la scelta del linguaggio (Willard van Orman Quine).

Da Euclide a Galileo avviene il passaggio dalla misura assoluta delle cose, descritta dalla geometria, alla misura relativa delle relazioni tra le cose misurate ed il loro riferimento, studiata con la fisica (liberamente tratto da Ernst Cassirer, La teoria della relatività di Einstein). Pertanto una misura è:

- una scoperta falsificabile, con la determinazione di un valore convenzionalmente "vero", mettendo in evidenza gli errori di misura;
- un'invenzione non-falsificabile (ma adeguata o non adeguata, in senso pragmatico), con l'assegnazione di un giudizio di merito adeguato o meno,

dove i due aspetti sono complementari tra loro. Infatti anche se la seconda definizione segue linee recenti della ricerca epistemologica e metrologica, le odierne, più accurate, precise ed affidabili, misure della fisica invitano a non trascurare anche gli aspetti operazionali della misurazione. Pertanto una forma moderna della teoria della misurazione è rappresentazionale, dove i numeri assegnati alle cose rappresentano le relazioni percepite tra le loro proprietà.
Un breve excursus storico, tra '800 e '900, dà ragione di quanto affermato, a partire dalla riformulazione degli assiomi della geometria e dell'aritmetica.

Gli assiomi della geometria non sono poposizioni date a priori, ed esse anzi devono essere provate o confutate dall'esperienza (Hermann von Helmholtz).

Dobbiamo scegliere, tra tutti i possibili sistemi, quello che deve darci una base alla quale si possono riferire i fenomeni naturali. L'esperienza ci guida in questa scelta; tuttavia non ce ne impone una determinata: essa non ci fa riconoscere quale geometria sia la più vera, ma quale sia la più comoda (Jules Henri Poincaré).

Il modo di concepire la geometria e la fisica moderna è caratterizzato dal fatto che s'impara sempre di più, in entrambi i casi, a vedere il processo di misurare come un problema logico ed epistemologico, … ed il loro contenuto particolare (mossi) da ragioni d'opportunità. Ciò che prima si usava praticamente costantemente nella geometria e nella fisica è visto ora in una nuova luce, appena si tenta di chiarire, in modo rigoroso, quali siano le premesse alle quali è sottoposto il processo di misurazione (Ernst Cassiser).

Un fenomeno non contiene nulla di numerico, ma solo le nostre sensazioni. Possiamo introdurre un concetto numerico fissando una procedura per misurarlo: siamo noi che assegniamo numeri alla natura, dato che i fenomeni esibiscono solo qualità che osserviamo (Rudolph Carnap, I fondamenti filosofici della fisica).

Una delle prime conseguenze dell'estensione del concetto di misurazione è la generalizzazione del concetto di scala. Infatti una scala può essere di tipo:

- nominale (ovvero un elenco),
- ordinale (ovvero un elenco ordinato);
- ad intervalli (ovvero un elenco ordinato e quantificato);
- a rapporti ed additiva (ovvero un elenco ordinato e quantificato metricamente);
- assoluta (ovvero eseguito con un conteggio).

Pertanto la misurazione può essere considerata un morfismo tra sistemi relazionali, ovvero tra le relazioni empiriche delle proprietà delle cose e le relazioni formali delle proprietà dei numeri (non solo scalari) oppure, più in generale, dei nomi (ovvero dei simboli), adottati e dei loro operatori. Allora secondo un punto di vista rappresentazionale, una moderna teoria della misurazione richiede:

- la descrizione di un sistema relazionale empirico;
- un teorema rappresentazionale, per dimostrare l'esistenza di omomorfismo (anche se non tutti gli omomorfismi sono misurazioni), dove è sufficiente che l'insieme cose-nomi/simboli sia un gruppo archimedeo ordinato;
- un teorema di unicità, per definire il tipo di scala, fissando la classe delle trasformazioni ammissibili.

Ogni tipo di scala di misura stabilisce una differente teoria, cioè un linguaggio (definito a livello sintattico e non semantico, provvisto di un alfabeto ed un grammatica) e le regole d'inferenza, con gli assiomi ed i teoremi della teoria definita. Ogni sistema relazionale, in un certo tipo di scala, costituisce un modello per la teoria relativa a quel tipo.
In particolare, il caso in cui la misurazione porta ad un conteggio è giustamente enfatizzato dal metrologo Percy Williams Bridgman, perché la scoperta che il numero ottenuto contando le volte in cui un bastone può essere applicato su un oggetto si può usare semplicemente nel descrivere i fenomeni naturali è stata una delle scoperte più importanti e fondamentali compiute dall'uomo.

La classificazione sta a mezza strada tra la concretezza immediata delle cose e la totale astrazione dei concetti matematici. Nel processo che connette concetti matematici ai fatti della natura, mediante il calcolo, la misurazione, le relazioni geometriche e le relazioni d'ordine, la contemplazione razionale si eleva dalle astrazioni parziali comportate dalla classificazione alle astrazioni totali della matematica. La classificazione è necessaria, ma se non si procede alla classificazione della matematica, il ragionamento non porterà molto lontano (Alfred North Whitehead).

Una prima obiezione all'approccio costituito dal punto di vista rappresentazionale suggerisce di sostituire l'isomorfismo all'omomorfismo, introducendo le grandezze, come enti intermedi tra cose e nomi-simboli, al fine di salvaguardare l'iniettività, proprietà richiesta dall'isomorfismo (tuttavia una contro-obiezione invita a non moltiplicare gli enti, se questi non sono proprio necessari). Una seconda obiezione verte invece sulla possibilità stessa di effettuare le misure, perché non esistono cose, come sensazioni o percezioni, che non siano costruiti su teorie, come affermato dall'epistemologo Karl Raimund Popper.
Allora è necessario prendere in considerazioni i vari sistemi di misura adottati ed interpretarli come capaci di realizzare operativamente gli omomorfismi che mappano i sistemi relazionali empirici nei sistemi relazionali simbolici. Queste considerazioni portano a definire un punto di vista operazionale – rappresentazionale, del

tutto nuovo e ben capace di quanto richiesto, perché particolarmente attento alle metodologie e procedure specifiche delle misurazioni. Infatti un sistema di misura è composto sì dalle sue regole d'applicazione, ma richiede anche il vero e proprio regolo di misura.
A sua volta, prescindendo dalla descrizione semantica di un qualsiasi sistema di misura, questo regolo è dotato non solo di un selettore nella lista: nomi-simboli, per quantificare la misura, ma anche di un apparato comparatore che determina la misura stessa. Infine per il corretto funzionamento del comparatore è proprio necessario affiancare al dispositivo di comparazione, anche la definizione di opportuni standard per tutte le operazioni di taratura e, di conseguenza, per altre misurazioni ed altre misure (cui si rimanda per ottenere la necessaria certificazione).

La validità dei procedimenti dell'analisi non dipende dall'interpretazione dei simboli che sono impiegati, ma solo dalle leggi che regolano la loro combinazione. Ogni sistema di interpretazione che non modifichi la verità delle relazioni che si suppone esistano tra tali simboli è ugualmente ammissibile (George Boole).

Pertanto le misurazioni sono attività prevalentemente empiriche, anche se possono essere ben descritte in termini di operazioni simboliche, che provvedono insieme alla determinazione – assegnazione dei valori di certi attributi delle cose misurate (proprio con le misure effettuate). I risultati ottenuti, a causa della presenza inevitabile di errori di misura, richiedono sempre di precisare anche l'incertezza di ogni misura che, ricavata direttamente o indirettamente (a seguito della nota legge di propagazione), può essere diversamente intesa:

- valore convenzionalmente "vero" con un certo grado di imprecisione;
- misura per intervalli (all'interno del quale il risultato è probabile, all'esterno no)

in entrambi i casi, con una piccola regione (cosiddetta del dubbio) di passaggio graduale, rispettivamente dal vero al falso, oppure dall'adeguato all'inadeguato (a loro volta, stabiliti rispettivamente dalla conservazione delle relazioni o dal loro venir meno). A rigore, la definizione della regione del dubbio porta alla definizione di nuove regioni del dubbio, ecc. e, di conseguenza, ad adottare una logica fuzzy.
Invece dal punto di vista metrologico, occorre contrapporre un'incertezza epistemologica, connessa agli aspetti simbolici della misurazione (cioè cosa si misura), ad un'incertezza statistica, connessa agli aspetti empirici della misurazione (cioè come si misura). Riguardo questa ultima, incertezza è un temine generico che raccoglie in sé più termini.
Un termine è l'accuratezza che stabilisce la distanza tra un valore centrale (ottenuto) ed il cosiddetto valore "vero"; un altro termine la ripetitività che documenta la concentrazione/dispersione dei valori ottenuti ed loro valore centrale; un terzo la risoluzione che individua la distanza minima per diversificare due valori (altrimenti detta affidabilità, se trattasi rispettivamente del cosiddetto valore "vero" e di un dato anomalo).
Da ultimo, il problema dell'incertezza delle misurazioni e delle misure si lega con la definizione dei sistemi di misura, con la costruzione di sistemi relazionali empirici mappati nei sistemi relazionali simbolici e con l'adozione di un punto di vista operazionale – rappresentazionale. Pertanto anche il problema dell'incertezza è oggigiorno centrale nella chiarificazione delle tendenze moderne della metrologia.

Alcune attività umane apparentemente hanno una perfetta nettezza e tra queste per eccellenza la matematica e la logica. Queste hanno una sì/no nettezza. (D'altra parte) tale sì/no nettezza si rileva solo nel regno delle cose che diciamo, in quanto distinto dal regno delle cose che facciamo. (In particolare) la fisica della misurazione non ha una sì/no nettezza della matematica, e nondimeno utilizza della matematica convenzionale come strumento indispensabile (Percy Williams Bridgman).

Fig. E.1 – Pace Prosperità e Progresso (Domenica del Corriere – 7 gennaio 1900)

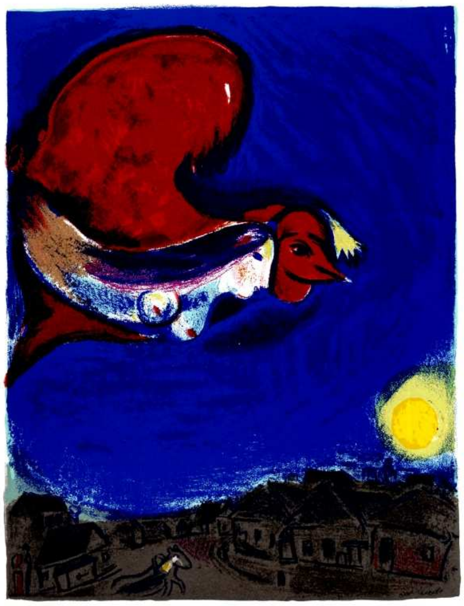


Fig. E.2 – Marc Chagall, Le Coq Rouge (Lithograph 1957)

L’immagine pura di tutte le quantità innanzi al senso esterno è lo spazio, e di tutti gli oggetti del senso in generale è il tempo. Tuttavia lo schema puro della quantità, come concetto dell’intelletto, è il numero, il quale è una rappresentazione che comprende la successiva addizione di uno a uno. Cosicché il numero non è altro che l’unità della sintesi del molteplice. Tutte le intuizioni sono quantità estensive. Chiamo estensiva quella quantità, nella quale la rappresentazione delle parti rende possibile la rappresentazione del tutto e perciò necessariamente la precede. In tutti i fenomeni il reale, che è oggetto della sensazione, ha una quantità intensiva, cioè un grado. Or, una tale quantità, che è appresa soltanto come unità, e in cui la molteplicità può essere rappresentata solo per approssimazione alla negazione (cioè allo zero), io la chiamo quantità intensiva (Immanuel Kant, Critica della ragion pura, parte prima).

(Alcune) grandezze … non sono misurabili, ben sappiamo dire se una di queste grandezze sia maggiore di un’altra, ma non se esse sia due o tre volte maggiore. Mi sono in effetti preoccupato finora solo dell’ordine, nel quale i termini sono disposti. Tuttavia ciò non basta per la maggior parte delle applicazioni. Bisogna imparare a paragonare l’intervallo che separa due termini qualunque. A questa condizione solo il continuo diviene una grandezza misurabile e gli si possono applicare le operazioni dell’aritmetica. Ciò può farsi con l’aiuto di una nuova e speciale convenzione (Jules Henri Poincaré, La scienza e l’ipotesi).

Esistono tre tipi di rapporti tra oggetti qualificati e, di conseguenza, tre tipi di quantità … C'è anzitutto la quantità intensiva, per riprendere un termine di cui Kant ha fatto un uso classico: essa semplicemente definisce i rapporti di parte e di tutto, e si limita ad affermare che il tutto è più grande della parte, ma senza paragonare una parte qualsiasi ad un'altra parte. … Supponiamo ora che, invece di enunciare semplicemente che A+A'=B si possano uguagliare i termini A=A'; avremo allora B=2A e C=3A ecc., vale a dire una serie di numeri o di segmenti: donde il secondo tipo di quantità o quantità metrica o numerica, fondata sulla costituzione di unità A. Tuttavia c'è una terza possibilità: senza uguagliare le parti, si possono stabilire tra di esse delle relazioni di differenze che obbediscono ad una qualsiasi legge di costruzione, per esempio una serie di differenze crescenti o decrescenti, delle proporzioni, dei rapporti numerici armonici, ecc. Si ha allora una quantificazione che, senza essere metrica, oltrepassa quella della semplice logica. Tutto ciò si basa su questo tipo di quantità, che chiameremo estensiva (Jean Piaget e Bärbel Inhelder, Lo sviluppo delle quantità fisiche del bambino – Conservazione e atomismo).

Nel suo aspetto più generale, la misurazione può essere considerata come una descrizione mediante numeri. Possiamo descrivere degli oggetti o degli eventi, o, in generale, delle situazioni. Il criterio per riconoscere una descrizione adeguata, di un oggetto o di un evento, è che noi si sia in grado di riprodurlo, o almeno di riconoscerlo quando si ripete. Il criterio, con cui si stabilisce che il riconoscimento o la riproduzione è riuscita, è spesso intuitivo, ma in casi più difficili può essere basato sul fatto che l'operazione di misura applicata alla supposta riproduzione dà lo stesso numero che dava la misurazione dell'originale. Il processo di assegnare dei numeri, cioè di misurare, viene compiuto secondo certe regole che ovviamente presuppongono una qualche relazione tra operazioni e l'oggetto su cui si opera. I numeri risultanti da misurazione sono, in quanto numeri, soggetti a tutte le operazioni della matematica. Le operazioni di misurazione fisica con cui si ottengono i numeri permettono spesso delle combinazioni che vanno di pari passo e hanno la stessa forma delle operazioni matematiche eseguibili sui numeri (Percy Williams Bridgman, La logica della fisica moderna).

BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE [112]

Bordoni A. (1859): Geodesia elementare. Tipografia degli Eredi Bazzoni, Pavia.
Schiavoni F. (1880): Principi di Geodesia. Stabilimento tipografico dell'Unione, Napoli.
Pucci E. (1883): Fondamenti di Geodesia. Vol. I e II. Ulrico Hoepli, Milano.
Jadanza N. (1895): Elementi di Geodesia. Tip. lit. CV. Giorgis, Torino.
Reina V. (1901): Corso di Geodesia. A cura di C. De Caroli e D. Benedetti. Università degli Studi di Roma – La Sapienza, Roma.
Ciconetti G. (1927): Geodesia e Topografia. Stabilimento tipo – litografico del Genio Civile, Roma.
Cassinis G. (1928): Calcoli numerici grafici e meccanici. Mariotti – Pacini, Pisa.
Pizzetti P. (1928): Trattato di Geodesia teoretica. Nicola Zanichelli, Bologna.
Cassinis G. (1938): Lezioni di Topografia con elementi di Geodesia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
Cicconetti G. (1938): Trattato di Geodesia e Topografia. Vallardi, Milano.
Boaga G. (1943): Elementi di Geodesia e Topografia. CEDAM – Casa Editrice Dott. Antonio Milani, Padova.
Cassinis G. (1955): Complementi di Topografia e Geodesia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
Solaini L. (1956): Topografia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
Marussi A. (1957): Corso di Geodesia. Università degli Studi di Trieste, Trieste.
Dore P. (1960): Geodesia e Topografia. Casa Editrice del Prof. Riccardo Pàdron, Bologna.
Aquilina C.F. (1963): Lezioni di topografia. CEDAM – Casa Editrice Dott. Antonio Milani, Padova.
Cunietti M. (1964): Corso Teorico Pratico sulle Misure. Libreria Cortina Ed., Milano.
Mazzon C (1970): Lezioni di Geodesia. Istituto Idrografico della Marina, Genova.
Solaini L., Inghilleri G. (1972): Topografia. Levrotto e Bella, Torino
Inghilleri G. (1974): Topografia Generale, UTET, Torino.
Cunietti M. (1977): Le misure e il loro trattamento. CLUP, Milano.
Birardi G. (1978): Corso di Topografia. Pitagora Editrice, Bologna.
Folloni G. (1982): Principi di Topografia. Ed. Patron, Bologna.
Tomelleri V., et al. (1991): Algoritmi Topografici Unificati. Edizioni Metria, Padova.

[112] Il presente lavoro è, nelle sue due prime parti, una versione ridotta, della relazione dell'autore, intitolata Boscovich – L'attività geodetica e cartografica, svolta al Convegno dedicato a Boscovich: astronomo, uomo di scienza e di cultura a trecento anni dalla nascita, organizzato congiuntamente dall'Istituto Lombardo – Accademia di Scienze e Lettere, e dall'Istituto Nazionale di Astrofisica – Osservatorio Astronomico di Brera, e tenutosi a Milano, presso la sala adunanze del suddetto istituto, il giorno 18 maggio 2011.