

BASI GEODETICHE GEOMETRICHE DELLA GEOMATICA

Mattia Crespi ⁽¹⁾ – Luigi Mussio ⁽²⁾

⁽¹⁾ Università di Roma "La Sapienza" – Dip. di Ing. Civile, Edile e Ambientale – Via Eudossiana, 18 – 00184 Roma
Tel. 06-4458-5097 – Fax 06-4991-5097 – e-mail mattia.crespi@uniroma1.it

⁽²⁾ Politecnico di Milano – DICA – Piazza L. da Vinci, 32 – 20133 Milano
Tel. 02-2399-6501 – Fax 02-2399-6602 – e-mail luigi.mussio@polimi.it

RIASSUNTO

La conoscenza della Geomatica ed anche le stesse applicazioni geomatiche (se non commissionate ad altri, da parte di estranei alla Geomatica) sono una povera cosa, senza un'approfondita conoscenza delle basi geodetiche che fanno da supporto alla Geomatica stessa. Questo lavoro, quasi interamente ripreso dal libro, davvero ottimo (ma purtroppo oggi quasi introvabile), Topografia Generale, di Giuseppe Inghilleri (UTET, Torino, 1974), e rivisto nello stile dell'autore, vuole presentare una sintesi delle suddette basi.

PARTE I

SISTEMI E SUPERFICI DI RIFERIMENTO DELLA GEODESIA

1. Posizione dei problemi

1.1 Definizione della Topografia

La complessa attività dell'uomo sulla Terra ed ora anche sulla Luna (e su Marte), volta a realizzare opere, sistemare il territorio, compiere viaggi (e purtroppo anche a lanciare ordigni distruttori), richiede un documento, per conoscere, in maniera sintetica e metricamente valida, la superficie fisica su cui egli vive ed opera. Talvolta questo documento è una carta, ad una scala conveniente, ovvero una rappresentazione grafica ed in scala del terreno, altre volte (ed oggi sempre più) una rappresentazione puramente numerica del terreno, comunemente chiamato: terreno digitale, impiegato oggi in molti procedimenti automatizzati di progettazione, conservazione di dati, operazioni catastali, ecc., strutturato ed archiviato nelle basi di dati geotopografici dei moderni Sistemi informativi geografici e/o territoriali.

La Topografia generale, traendo le sue basi scientifiche dalla Geometria, per la definizione delle operazioni e degli schemi di misura, dalla Statistica Matematica, per l'uso critico dei risultati delle misure, dal Calcolo Numerico, per gli algoritmi più raffinati, e dalla Fisica, per i principi di funzionamento degli strumenti di misura, definisce un notevole complesso di tecniche per l'impianto, la misurazione, il calcolo, l'archiviazione, la rappresentazione, la visualizzazione ed il disegno, utili per definire metricamente e rappresentare il terreno, in maniera conveniente, ai vari scopi. La Topografia generale è una scienza applicata che potrebbe essere chiamata, più propriamente, Geometria Applicata.

1.2. Definizione teorica dei procedimenti atti a realizzare la rappresentazione del terreno

È necessario puntualizzare che, per realizzare una rappresentazione metrica del terreno, è inapplicabile tutta una serie di semplificazioni, concettuali ed operative, che rende facile la rappresentazione di un oggetto di piccole dimensioni e di forma geometricamente semplice. Infatti:

- la superficie fisica del terreno (anche con i manufatti costruiti dall'uomo) ha una forma molto irregolare;

- ❑ la superficie su cui sarebbe naturale rappresentare il terreno non è piana, né comunque semplice (anche prescindendo dalla terza dimensione);
- ❑ la dimensione del terreno eccede, in maniera decisa, le dimensioni dell'uomo e ciò rende complesse e raffinate le operazioni di misura, poste necessariamente alla base della rappresentazione metrica.

La superficie su cui il terreno dovrebbe essere rappresentato è il Geoide, superficie molto complessa (la Geodesia è la scienza che si occupa della determinazione del Geoide), in ogni punto della Terra, normale alla direzione della verticale, facilmente materializzata con un filo a piombo, oppure individuata, con grande precisione, con una livella od un pendolo. Questa superficie coincide con la superficie dei mari, prolungata opportunamente sotto le terre emerse, qualora l'acqua dei mari abbia la stessa temperatura, la stessa densità e non esistano perturbazioni, dovute alle correnti, alle maree, ai venti ed alle onde.

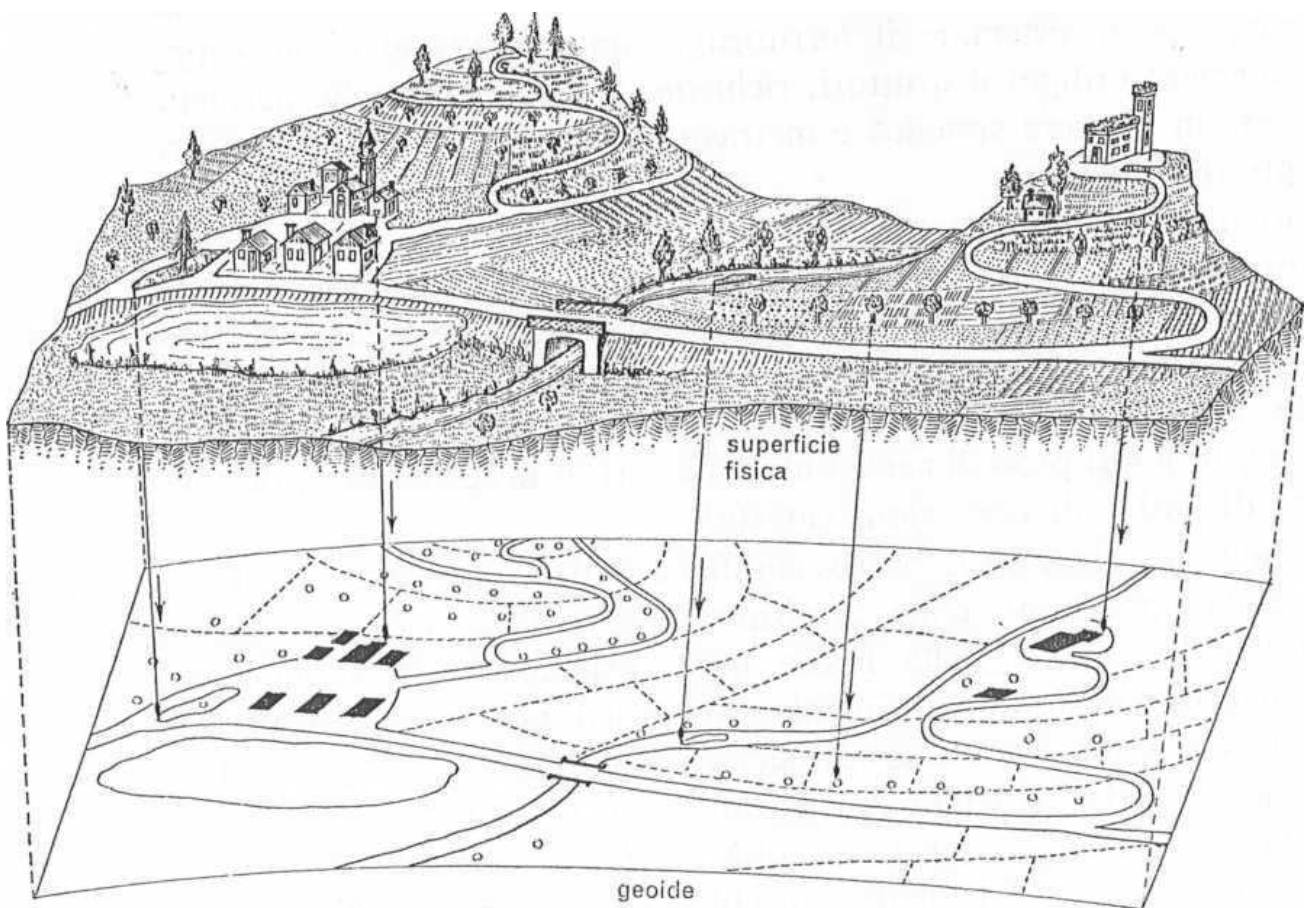


Fig. 1 – Superficie fisica del terreno, Geoide e rappresentazione del terreno

La relazione fra terreno, Geoide e rappresentazione del terreno è chiaramente mostrata nella fig. 1, anche se il procedimento illustrato, di rilevamento e rappresentazione, è puramente teorico, almeno in alcune sue parti, perché presuppone, come mostra la figura, la superficie fisica ridotta ad una sottile pellicola ed il Geoide concretamente esistente e percorribile al di sotto di essa.

- ❑ Allora data la complessità della forma del terreno, occorre individuarla, mediante la determinazione della posizione di un sufficiente numero di punti, anche in relazione alla natura dell'oggetto ed alla scala della

sua rappresentazione (ad es., un edificio rettangolare è individuato mediante i quattro punti di spigolo, una strada tortuosa mediante un punto del suo asse ogni 5 metri e così via).

- ❑ Inoltre ogni punto dovrebbe essere proiettato sul Geoide, secondo la direzione della verticale, ogni proiezione dovrebbe essere materializzata e la distanza fra ogni punto ed il Geoide, chiamata quota, dovrebbe essere determinata.
- ❑ Dopodiché percorrendo il Geoide, si dovrebbero misurare angoli e distanze fra le proiezioni dei punti, in modo da determinarne la posizione relativa (e poiché si suppone di operare su una superficie curva, gli angoli da misurare non sono ovviamente angoli fra rette, come pure le distanze non sono lunghezze di segmenti rettilinei, cosicché i tipi di angoli e distanze, oggetto di misura, dovrebbero essere ridefiniti).

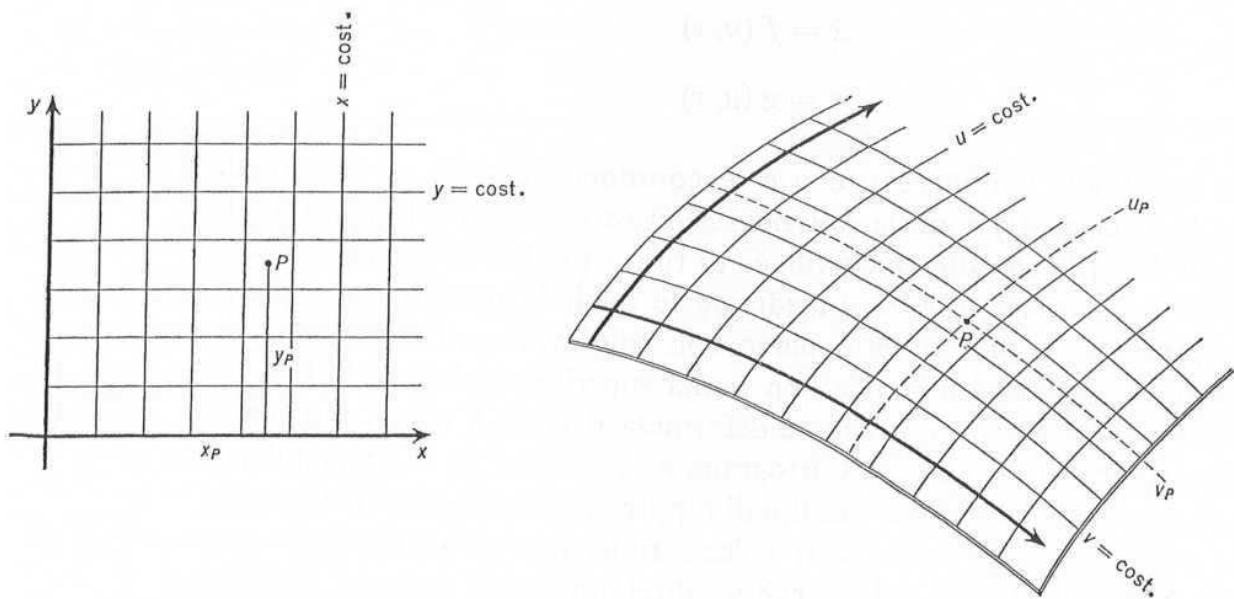


Fig. 2 – Coordinate ortogonali sul piano e coordinate curvilinee su una superficie

- ❑ Successivamente sulla base degli elementi misurati occorre determinare la posizione dei punti proiettati mediante coordinate curvilinee sulla superficie di riferimento. Infatti (come mostra la fig. 2), in perfetta analogia con il piano, dove la posizione di un punto P è individuata dalle due coordinate ortogonali rettilinee: (x_p, y_p) , la posizione di un punto P , su una superficie curva, può essere individuata mediante i valori di due coordinate curvilinee: (u_p, v_p) (a questo scopo, è necessario conoscere la forma di questa superficie, ovvero l'equazione del Geoide, definire un sistema di coordinate curvilinee, su questo, ed eseguire calcoli, per permettere, sulla base delle misure fatte, di ricavare le coordinate curvilinee dei punti proiettati).
- ❑ A questo punto, in scala, si può costruire la porzione di Geoide, interessata al rilievo, riportare su questa, in scala, il sistema di coordinate curvilinee e la posizione di ogni punto, mediante le coordinate curvilinee note, di ognuno (cosicché congiungendo opportunamente con linee i punti proiettati, si evidenzino tutte le particolarità del terreno), e scrivere la quota, accanto ad ogni punto, per ottenere la rappresentazione completa del terreno (laddove unendo i punti di eguale quota, si hanno le curve di livello).
- ❑ Infine poiché la rappresentazione del terreno, così ricavata, è disposta su un supporto curvo, mentre un supporto piano è più adatto, per gli usi pratici, si ricorre ad una rappresentazione cartografica, in quanto,

per ogni punto, definito mediante le due coordinate curvilinee: (u, v) , e la quota q , si può stabilire una corrispondenza biunivoca:

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}$$

fra le coordinate curvilinee e quelle cartesiane ortogonali: (x, y) . Le relazioni della corrispondenza biunivoca sono le equazioni della carta, mediante queste, si trasformano le coordinate curvilinee di tutti i punti e si ottengono coordinate cartografiche in base alle quali la posizione dei punti è determinata (su un supporto piano, con riferimento ad un sistema di assi ortogonali). A riguardo, poiché il Geoide (come già la sfera) non è una superficie sviluppabile sul piano, senza deformazioni, la rappresentazione piana ottenuta è deformata, rispetto a quella disegnata, sul supporto curvo, come mostra fig. 3 (la Cartografia è la scienza che si occupa della definizione e dello studio dei vari tipi di rappresentazioni piane).

Occorre poi notare che, anche volendo rinunciare al Geoide, come superficie di riferimento, e riferire direttamente la rappresentazione ad una superficie piana, convenientemente disposta, l'iter teorico della formazione della rappresentazione sarebbe analogo a quello delineato, dato che gli strumenti di misura operano con riferimento alla verticale e perciò al Geoide. Infatti è concettualmente possibile, modificando i metodi di misura, definire un iter in cui si prescinde dalla considerazione del Geoide ¹, ma questo è un argomento discusso in sede scientifica e che, almeno per il momento, non conduce ad applicazioni pratiche.

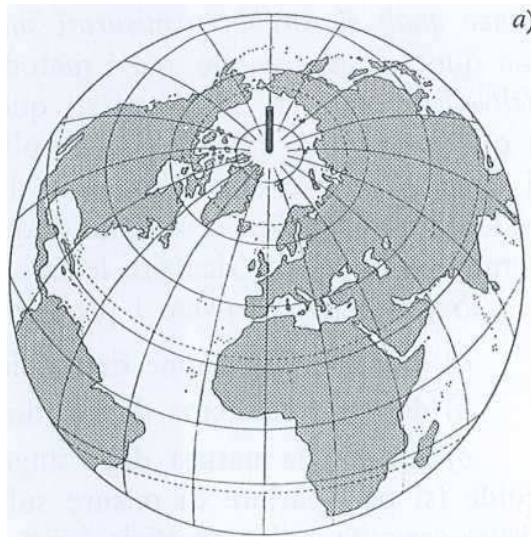


Fig. 3.a – Rappresentazione cartografica su un supporto curvo simile alla superficie di riferimento (un esempio di siffatta rappresentazione è fornito dal mappamondo)

1.3. Definizione dei procedimenti pratici atti a realizzare la rappresentazione del terreno

In pratica, le operazioni descritte al secondo e terzo punto dell'elenco precedente non possono essere eseguite, dato che tutte le operazioni di misura possono ovviamente svolgersi solo sulla superficie fisica.

¹ In effetti, le moderne tecniche di posizionamento GPS definiscono coordinate ellissoidiche 3D, ma le quote ellissoidiche differiscono dalle quote ortometriche e la definizione di queste non è tuttora possibile, prescindendo da funzionali del campo della gravità.

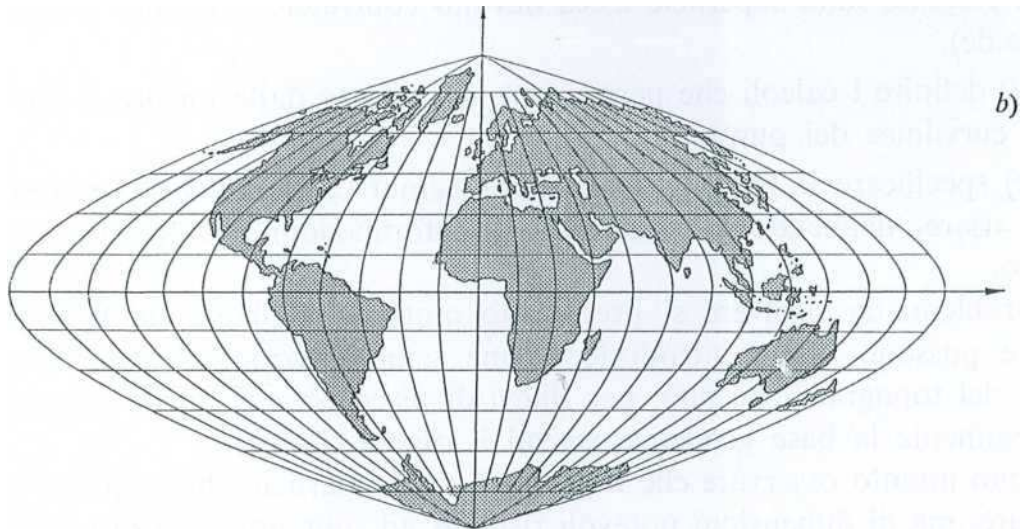


Fig. 3.b – Rappresentazione cartografica su un supporto piano

Tuttavia si supera la difficoltà, poiché i metodi di misura di angoli e distanze, tra punti della superficie fisica, sono tali da fornire angoli e distanze, quali si sarebbero misurati sul Geoide. Anche la misura diretta di una quota è impossibile, ma i metodi di misura permettono di ricavare i dislivelli, ovvero le differenze di quota fra punti della superficie fisica. Le quote sono poi definite, collegando i punti, mediante operazioni di livellazione che determinano le differenze di quota, ed è sufficiente che, tra i punti collegati, ne esista uno di quota nulla (cioè sul Geoide o di quota comunque nota), per ricavare le quote di tutti gli altri. Date queste premesse, per risolvere i problemi delineati occorre:

- ❑ definire l'equazione del Geoide;
- ❑ definire il sistema di coordinate curvilinee: (u, v) ;
- ❑ definire la natura degli angoli e delle distanze da misurare sul Geoide (si può parlare di misure sul Geoide poiché, come già detto in precedenza, le misure eseguite sulla superficie fisica equivalgono a misure eseguite sul Geoide);
- ❑ definire i calcoli che permettono di dedurre, dalle misure, le coordinate curvilinee dei punti;
- ❑ specificare le equazioni della carta, in base alle rappresentazioni cartografiche usate, nel contempo, definendo le loro deformazioni.

I problemi da risolvere presentano notevoli difficoltà, ma fortunatamente, per facilitare l'opera, si possono introdotte alcune semplificazioni e si può anche ignorare completamente la base geodetica (su cui si fonda), per il rilevamento di piccole zone. Infatti si può innanzitutto osservare che il Geoide è una superficie chiusa piuttosto irregolare, ma di dimensioni notevoli, rispetto ad una piccola porzione di terreno (della dimensione di qualche chilometro). Allora una piccola porzione del Geoide si discosta poco da un piano tangente, in un suo punto centrale. Pertanto si può verificare che porzioni di Geoide, limitate a un paio di centinaia di chilometri, si discostano poco da una calotta sferica, di raggio opportuno, tangente nel centroide della stessa porzione, presa in esame. Tuttavia la semplificazione maggiore deriva dal fatto che le migliaia di punti necessari, a definire una carta, possono essere distinti in due grandi classi: i punti di inquadramento ed i punti di dettaglio.

I punti di inquadramento sono una piccola percentuale del totale e la loro posizione sul Geoide è definita mediante operazioni geodetiche ² di triangolazione, trilaterazione, poligonazione ed altro eseguite secondo quanto specificato. I punti d'inquadramento formano una rete di punti, ogni maglia della quale si riferisce ad una porzione di Geoide che può, in un senso specificato più oltre, ritenersi piana. Tutte le operazioni di infittimento dei punti di inquadramento e di rilevamento dei punti di dettaglio, svolte nell'ambito di una maglia, possono essere concepite, sia per le misure che per i calcoli, come riferite ad una superficie piana.

Per i punti di inquadramento, sono calcolate le coordinate curvilinee e le coordinate cartografiche; questi punti sono poi riportati su un supporto piano, mediante le coordinate cartografiche, ridotte in scala, con riferimento ad un unico sistema. In effetti, la carta di un territorio consta di parecchi fogli, di dimensioni opportune, ma ogni foglio è parametrato, cioè sono disegnati gli incroci delle rette: $x = cost$, $y = cost$, con intervallo grafico, in generale, pari a 10 cm, cosicché ogni incrocio corrisponde ad un valore della coppia: x, y , riferito ad un'unica origine, come mostrato dalla fig. 4.

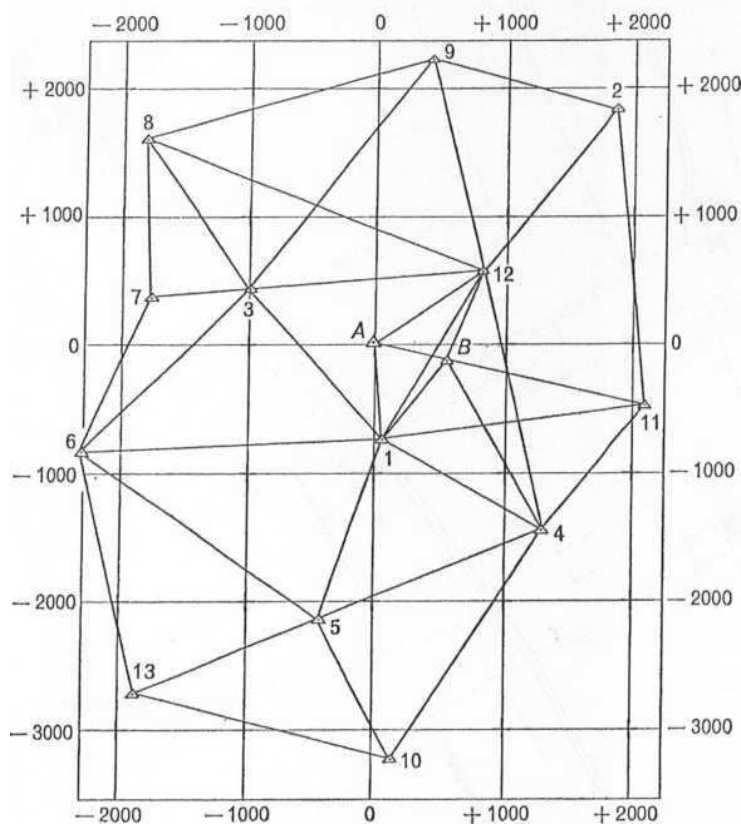


Fig. 4 – Punti di inquadramento riportati in scala su foglio di carta parametrato

I punti di dettaglio (che sono la maggioranza) sono rilevati con riferimento ad un minimo di due punti di inquadramento e, se riportati solo graficamente sulla carta, in generale, non si calcolano le loro coordinate. Per esemplificare quanto detto, nella fig. 5, è riportata una porzione di un rilevamento in cui sono evidenziati i punti di inquadramento con il simbolo ▲ ed i punti di dettaglio con un punto più marcato (in effetti, all'atto della costruzione della carta i punti di dettaglio sono individuati con punti, ma questi sono poi riassorbiti nelle linee che descrivono, con continuità, le particolarità del terreno).

² Le moderne tecniche di posizionamento GPS, relativamente a misure speditive ed alla navigazione, danno l'impressione di superare il concetto di rete che tuttavia esiste come intersezione distanziometrica spaziale, tra i satelliti connessi e l'antenna del ricevitore.

Nel rilevamento di una grande estensione di terreno, si distingue un momento geodetico (in cui, secondo i procedimenti descritti, si determinano le coordinate cartografiche dei punti di inquadramento) da un secondo momento topografico (in cui, operando in una stretta zona limitata da alcuni punti di inquadramento, si opera con molta più facilità di misura, calcolo e rappresentazione). Infatti tutte le deformazioni, introdotte dalla rappresentazione cartografica, sono evidenti, se si considera il complesso di punti di inquadramento, mentre nell'ambito di una maglia della rete di inquadramento si può operare, con alcune precauzioni, evidenziate più oltre, come se le deformazioni non esistessero ³.

Le dimensioni della maglia in cui si può operare, con semplicità, sono dell'ordine di poche decine di chilometri. Quanto detto si riferisce solo alla rappresentazione planimetrica del terreno, mentre per le quote la superficie di riferimento non si può mai considerare piana, dato che per definizione queste rappresentano le distanze, secondo la verticale, fra i punti della superficie fisica ed il Geoide, e gli scostamenti, in senso altimetrico, fra il piano tangente (in un punto) ed il Geoide sono sempre sensibili, anche già in un ristretto intorno. Infatti nell'intorno ristretto dell'approssimazione piana in planimetria, solo un'approssimazione sferica può essere adottata in altimetria, mentre nell'ambito esteso dell'approssimazione sferica in planimetria, nessuna approssimazione può essere adottata in altimetria (che deve sempre essere riferita al Geoide).

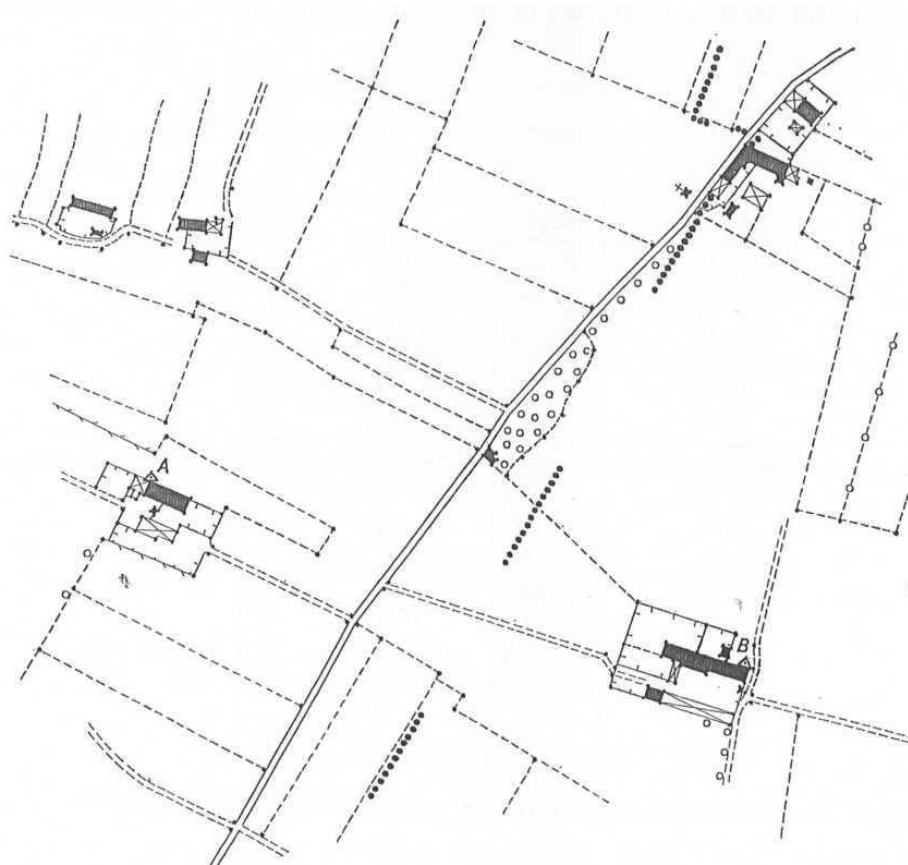


Fig. 5 – Punti di dettaglio

³ Le moderne tecniche di posizionamento GPS possono portare al superamento della distinzione tra punti di inquadramento e punti di dettaglio (quando questi non derivino da misure speditive), tranne comunque per quanto riguarda la precisione del rilevamento. Infatti con il GPS, a parte pochi rilievi, molto specialistici, in zone chiuse (lunghe gallerie o miniere), si lavora su grandi estensioni e solo con il GPS, cosicché non è più necessario ridurre le misure ad una superficie di riferimento. Inoltre si può limitare l'applicazione delle tecniche terrestri solo su piccole estensioni, ove necessario, per esigenze logistiche (perché non si riceve il segnale GPS) o di precisione (in quanto, su piccole estensioni, le tecniche terrestri possono essere più precise). D'altra parte, anche in questo caso, si possono scrivere le equazioni di osservazione in ambito 3D, tenendo conto, a diversi livelli di approssimazione, del campo della gravità, cosicché la superficie di riferimento non ha più una particolare utilità.

2. Definizione della superficie di riferimento

2.1 Equazione del Geoide

La base di partenza per la soluzione dei problemi posti è la determinazione dell'equazione del Geoide, cioè di una superficie normale, in ogni punto, alla direzione della verticale. La verticale è la direzione della forza di gravità, definita in direzione e modulo in ogni punto, collegato alla Terra. In effetti, si può parlare di forza o di accelerazione di gravità indifferentemente, dato che si riferisce alla forza cui è soggetta una massa unitaria, cosicché la gravità costituisce un campo di forza, con la caratteristica di essere un campo conservativo, cioè di ammettere un potenziale (detto potenziale gravitazionale terrestre).

In questo campo, si possono individuare le linee di forza, cioè le linee tangenti, in ogni punto, alla direzione delle forze. Nella fattispecie, queste linee sono curve gobbe e prendono il nome di verticali e la direzione della gravità, in un punto, è la tangente alla linea verticale, passante per quel punto. Il luogo dei punti aventi lo stesso valore del potenziale (gravitazionale terrestre) costituisce una superficie equipotenziale e queste superfici equipotenziali (del campo della gravità) sono infinite (in dipendenza degli infiniti valori assunti dal suddetto potenziale). Come noto, le superfici equipotenziali sono normali alle linee di forza del campo, allora una superficie equipotenziale, opportunamente scelta, definisce il Geoide. Pertanto il Geoide è la superficie equipotenziale del campo della gravità che passa per un determinato punto della superficie terrestre (cui si deve ovviamente attribuire quota nulla), individuato determinando il livello medio del mare, in un punto di posizione planimetrica stabilita.

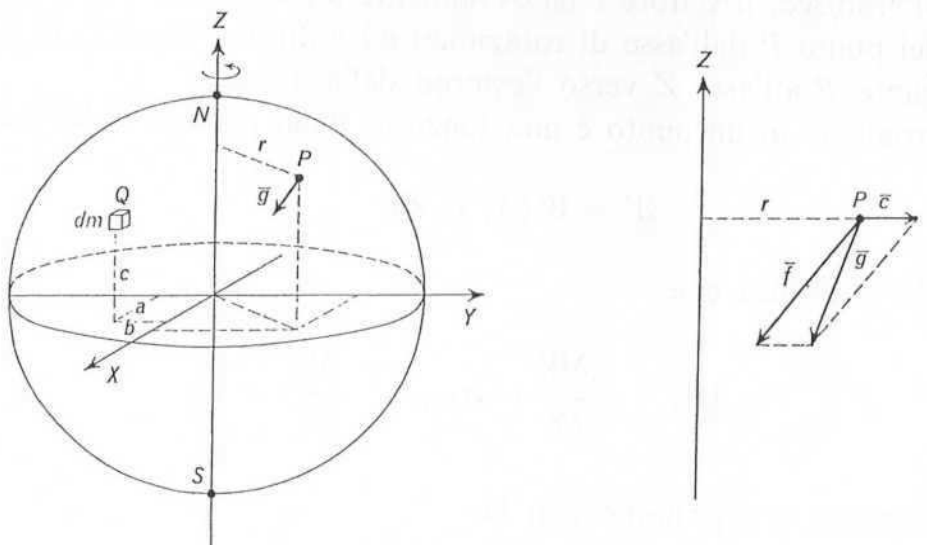


Fig. 6 – Campo gravitazionale.

Per la determinare l'equazione del Geoide, si riferisce il corpo terrestre ad un sistema di coordinate cartesiane (X, Y, Z) , avente l'origine O nel baricentro della Terra, l'asse Z coincidente con l'asse di rotazione, e gli assi X e Y coincidenti con gli assi principali d'inerzia (come mostrato in fig. 6). Il vettore gravità \vec{g} , in un punto generico P , è funzione della posizione del punto, ovvero delle sue tre coordinate.

$$\vec{g} = \vec{g}(X, Y, Z)$$

e si può considerare composto da due forze:

- la forza \vec{f} di attrazione newtoniana, risultante di tutte le forze elementari che ogni elemento di massa della Terra esercita sull'unità di massa, posta in P ;
- la forza centrifuga sull'unità di massa: $\vec{c} = \omega^2 \vec{r}$ (perché il punto P è rigidamente collegato alla Terra), dovuta alla rotazione della Terra, attorno al suo asse polare Z , con velocità angolare, pressoché costante: $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/sec}$ (dove il vettore \vec{r} ha un modulo: $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$, pari alla distanza del punto P dall'asse di rotazione terrestre, ed è diretto secondo la normale dal punto P all'asse Z , verso l'esterno della Terra).

Il potenziale gravitazionale terrestre W , in un punto, è funzione della posizione del punto:

$$W = W(X, Y, Z)$$

per la quale si verifica: $\partial W / \partial X = g_x$, $\partial W / \partial Y = g_y$ e $\partial W / \partial Z = g_z$ (che sinteticamente si esprimono con l'espressione: $\vec{g} = \text{grad } W$), ovvero le derivate parziali del potenziale danno le componenti della gravità (g_x, g_y, g_z) , secondo i tre assi coordinati.

In generale, indicando con dP uno spostamento infinitesimo si ha: $dW = \vec{g} \times dP$, cioè la derivata del potenziale, secondo una direzione dP , dà la componente del vettore gravità in quella direzione (in particolare, se la direzione individuata da dP è tangente alla superficie equipotenziale, passante per il punto P , risulta: $dW = 0$, cioè: $\vec{g} \times dP = 0$, da cui si deduce l'ortogonalità di \vec{g} rispetto alla superficie equipotenziale).

In quanto funzioni scalari, i potenziali possono essere sommati aritmeticamente. In questo modo, il potenziale W è la somma del potenziale V , relativo alla forza di attrazione universale, e del potenziale v , relativo alla forza centrifuga, ovvero: $W = V + v$.

- Il potenziale v è pari a:

$$v(X, Y) = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

- Per il potenziale V (facendo ancora riferimento alla fig. 6), si considera un elemento di massa dm della Terra, posto nel punto Q , di coordinate generiche (a, b, c) e, se $\delta(a, b, c)$ è la densità in tale punto, per questo elemento di massa, si ha: $dm = \delta(a, b, c) da db dc$. In questo modo, l'elemento di massa determina sulla massa unitaria, posta nel punto P (ed avente distanza: $PQ = l$, dal punto Q), una forza di attrazione di modulo:

$$dF = G \frac{dm}{(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2} = G \frac{dm}{l^2}$$

e diretta da P verso Q , dove G è la costante di attrazione universale (pari a $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$, in unità del Sistema Internazionale). Di conseguenza, il potenziale dV , dovuto alla massa dm , risulta:

$$dV = G \frac{dm}{\sqrt{(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2}} = G \frac{dm}{l}$$

ed il potenziale, dovuto a tutte le masse della Terra ed avendo esteso l'integrale a tutto il volume terrestre, è funzione di (X, Y, Z) , dato che le variabili di integrazione sono (a, b, c) , ovvero:

$$V(X, Y, Z) = G \iiint \frac{dm}{l}$$

Di conseguenza, l'equazione del geode ha espressione:

$$V(X, Y, Z) + v(X, Y) = W_0.$$

La fig. 7 mostra il planisfero dell'ondulazione del Geode rispetto ad un ellissoide terrestre geocentrico.

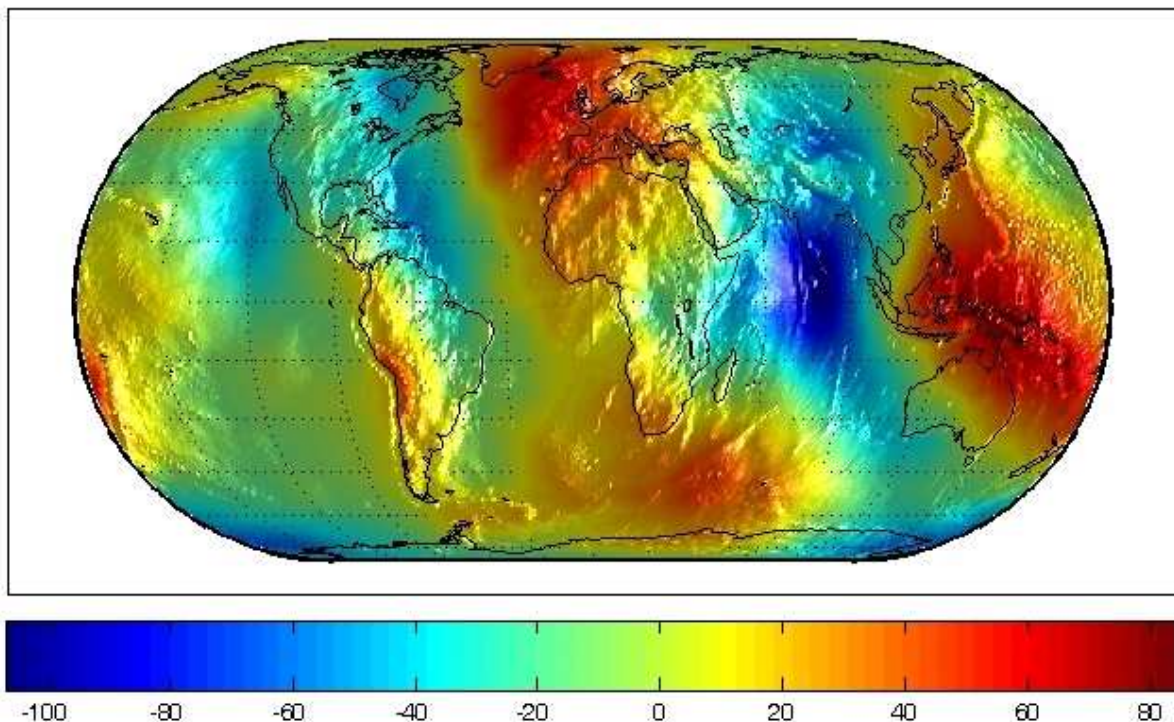


Fig. 7 – Planisfero dell'ondulazione del Geode rispetto ad un ellissoide terrestre geocentrico

2.2 Superfici che approssimano il geode

Per eseguire l'integrazione a secondo membro dell'equazione del potenziale, relativo alla forza di attrazione universale, occorrerebbe conoscere la densità di ogni punto della Terra, cioè la funzione $\delta(a,b,c)$ la cui conoscenza, nell'interno della Terra, è piuttosto vaga. Infatti i dati attendibili sono solo globali: la densità media è di 5.52 gr/cm^3 , mentre in superficie è di 2.67 gr/cm^3 (e necessariamente è molto più alta nel nucleo). Allora anche se le indagini forniscono dati, abbastanza attendibili, sulla variazione della densità, dalla superficie al nucleo, questi stessi dati sono dati comunque insufficienti, per una conoscenza dettagliata della distribuzione delle masse, rendendo impossibile determinare rigorosamente l'equazione del geode.

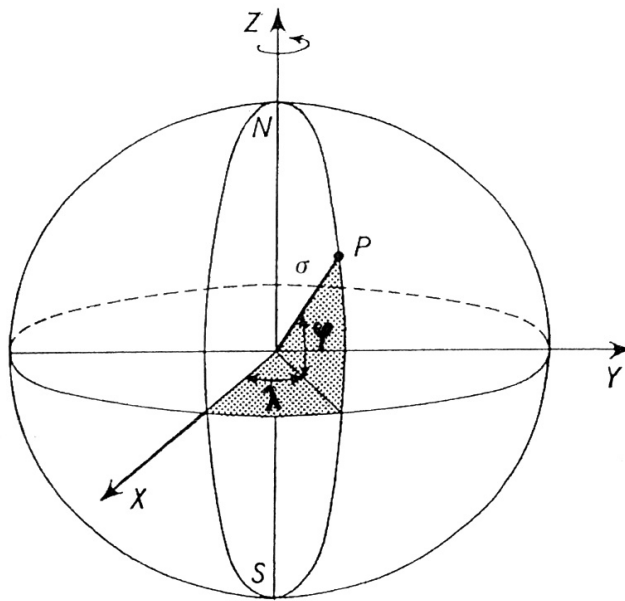


Fig. 8 – Coordinate polari geocentriche

Pertanto il suddetto integrale è sviluppato in serie di funzioni armoniche sferiche, introdotte le coordinate polari (σ, ψ, λ) , come illustra la fig. 8, invece delle coordinate cartesiane e legate a queste dalle relazioni:

$$X = \sigma \cos \psi \cos \lambda \quad Y = \sigma \cos \psi \sin \lambda \quad Z = \sigma \sin \psi$$

cosicché, a meno di termini dell'ordine di $1/\sigma^4$, si ricava l'espressione approssimata di V :

$$V(\sigma, \psi, \lambda) = \frac{GM}{\sigma} \left(1 + \frac{1}{2\sigma^2 M} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \psi) + \frac{3}{4\sigma^2 M} (B - A) \cos^2 \psi \cos 2\lambda \right)$$

ove M è la massa totale della Terra, e (A, B, C) i suoi momenti di inerzia rispetto agli assi (X, Y, Z) .

Si possono poi determinare altri termini importanti, per lo studio del geode, ma di scarsa rilevanza, per la determinazione di una superficie di riferimento per il rilevamento. Inoltre poiché una grande quantità di

osservazioni mostra che la figura della Terra è molto prossima a quella di un solido di rotazione, si può supporre: $A = B$, ed assumere un'espressione ulteriormente approssimata di V :

$$V(\sigma, \psi, \lambda) = \frac{GM}{\sigma} \left(1 + \frac{1}{2\sigma^2 M} (C - A)(1 - 3 \sin^2 \psi) \right)$$

cosicché l'equazione approssimata del geoide diventa:

$$\frac{GM}{\sigma} \left(1 + \frac{1}{2\sigma^2 M} (C - A)(1 - 3 \sin^2 \psi) \right) + \frac{1}{2} \omega^2 \sigma^2 \cos^2 \psi = W_0 \quad \text{dove: } r^2 = \sigma^2 \cos^2 \psi$$

2.3 Sferoide ed ellissoide

La superficie definita dall'equazione approssimata del geoide è una superficie di rotazione, dato che la coordinata λ non è più presente, ed è chiamata sferoide. Le costanti GM e $C - A$ (che definiscono lo sferoide) sono di natura meccanica e possono essere sostituite con parametri geometrici che, trattandosi di una superficie di rotazione, sono il semiasse equatoriale a e quello polare c , ottenendo così, con alcune trasformazioni, l'equazione dello sferoide in coordinate polari:

$$\sigma = a(1 - \alpha \sin^2 \psi)$$

dove: $\alpha = (a - c)/a = 1 - c/a$, è chiamato schiacciamento. Volendo poi esprimere questa equazione in coordinate cartesiane, si ottiene:

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = a \left(1 - \alpha \frac{Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \right)$$

Considerato ora un ellissoide di rotazione avente gli stessi semiassi dello sferoide:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

e dato lo schiacciamento, si ricava: $c = a(1 - \alpha)$, da cui trascurando α^2 , dopo averlo elevato al quadrato: $c^2 = a^2(1 - 2\alpha)$. L'errore commesso, assumendo tale espressione, equivale ad ammettere su c un errore pari a circa $1/90000$ di a e, dato che lo schiacciamento è dell'ordine di $1/300$, con tale approssimazione l'equazione dell'ellissoide di rotazione diventa:

$$X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{1 - 2\alpha} = a^2$$

da cui, sviluppando in serie binomiale $(1 - 2\alpha)^{-1}$, trascurando i termini in α^2 e superiori, e ricordando che $X^2 + Y^2 + Z^2 = \sigma^2$, si ottiene: $\sigma^2 = a^2(1 - 2\alpha Z^2/a^2) = a^2(1 - 2\alpha \sin^2 \psi)$, poiché a e σ sono dello stesso ordine di grandezza e si può porre con la stessa approssimazione: $Z/a = Z/\sigma = \sin \psi$. Infine con uno sviluppo in serie binomiale operato su $\sqrt{1 - 2\alpha \sin^2 \psi}$, trascurando i termini in α^2 e superiori, si ha:

$$\sigma = a(1 - \alpha \sin^2 \psi)$$

che coincide con la precedente equazione dello sferoide.

In conclusione, si può stabilire che l'equazione dell'ellissoide coincide, a meno di termini in α^2 , con l'equazione dello sferoide (avente gli stessi semiassi) e, poiché la geometria dell'ellissoide è più semplice e conosciuta di quella dello sferoide (oltreché per ragioni storiche, connesse a studi teorici sulla forma dei pianeti ruotanti), si è convenuto internazionalmente di assumere l'ellissoide di rotazione come superficie di riferimento. Non devono meravigliare le semplificazioni apportate per giungere a tale conclusione; si tratta infatti di determinare una superficie valida per i rilievi che non si scosti troppo dal geoide e non di studiare a fondo il geoide. Per contro, la forma del geoide può essere determinata con riferimento proprio all'ellissoide.

3. L'ellissoide terrestre

3.1. Dimensioni dell'ellissoide

E' compito dei geodeti determinare i parametri a e c , ovvero a ed α , con metodi basati su misure geometriche (misure di archi di meridiano e di parallelo), su misure di gravità (data una relazione fra lo schiacciamento e la variazione di gravità tra i poli e l'equatore) e su studi, molto accurati, delle traiettorie dei satelliti artificiali. Tuttavia pur d'accordo nell'assumere l'ellissoide di rotazione, come equazione della superficie di riferimento per il rilevamento, i vari geodeti che hanno lavorato su questo problema, utilizzando informazioni metriche diverse ed in diversa quantità, hanno determinato ed assunto valori diversi di a ed α . I valori più importanti, perché impiegati nel rilevamento di vaste zone del globo, si riferiscono al nome dei geodeti che li hanno calcolati:

BESSEL (1841)	$a = 6.377.397 \text{ m}$	$\alpha = 1/299.2$
CLARKE (1880)	$a = 6.378.243 \text{ m}$	$\alpha = 1/293.5$
HELMERT (1906)	$a = 6.378.140 \text{ m}$	$\alpha = 1/298.3$
HAYFORD(1909)	$a = 6.378.388 \text{ m}$	$\alpha = 1/297.0$
KRASSOVSKY (1942)	$a = 6.378.245 \text{ m}$	$\alpha = 1/298.3$

L'Unione Geodetica e Geofisica Internazionale (IUGG), nel Congresso di Camberra, del 1979, ha adottato i seguenti parametri: $a = 6.378.137,0 \text{ m}$, $c = 6.356.752,314140 \text{ m}$ ed $1/\alpha = 298,257222100882$, che definiscono l'ellissoide GRS80, mentre i parametri del sistema WGS84 (poco differenti ed attualmente in uso) sono: $a = 6.378.137,0 \text{ m}$, $c = 6.356.752,314245 \text{ m}$ ed $1/\alpha = 298,257223563$.

3.2. Coordinate curvilinee sull'ellissoide

Per individuare un sistema di coordinate curvilinee su una superficie di equazione: $f(X, Y, Z) = 0$, occorre scegliere due parametri: (u, v) , e determinare le equazioni parametriche della superficie: $X = X(u, v)$, $Y = Y(u, v)$ e $Z = Z(u, v)$.

Dando un valore costante u_0 al parametro u e facendo variare l'altro parametro v , si determina sulla superficie una linea individuata dalle equazioni: $X = X(u_0, v)$, $Y = Y(u_0, v)$ e $Z = Z(u_0, v)$; dando poi ad u_0 valori diversi, si individua una famiglia di linee. Un'altra famiglia di linee si ottiene dando al parametro v diversi valori costanti v_0 ed insieme facendo variare l'altro parametro u : $X = X(u, v_0)$, $Y = Y(u, v_0)$ e $Z = Z(u, v_0)$. Le due famiglie di linee individuano sulla superficie un sistema di coordinate analogo al sistema formato sul piano delle rette: $x = cost$ e $y = cost$.

Conviene che i parametri (u, v) siano scelti in modo che le linee coordinate: $u = cost$ e $v = cost$, siano ortogonali, cioè si incontrino sulla superficie formando un angolo retto.

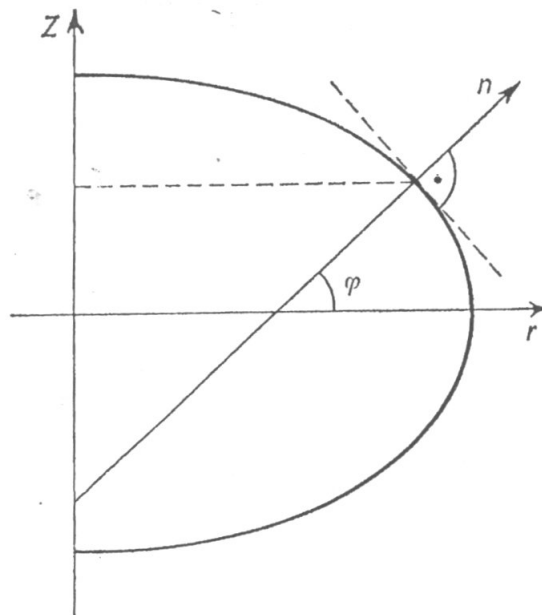


Fig. 9 – Ellisse meridianale

Nel caso dell'ellissoide di rotazione, dato che per un punto qualsiasi di tale superficie: $X^2 + Y^2 = r^2$, la corrispondente equazione si può scrivere nella forma: $r^2/a^2 + Z^2/c^2 = 1$, che può essere interpretata come l'equazione di un'ellisse riferito agli assi: (r, Z) . In questo modo, l'equazione parametrica di questa ellisse è funzione dell'angolo φ (chiamato latitudine) che la normale in un punto qualsiasi, scelto e fissato, forma con l'asse r (come mostrato in fig. 9).

I coseni direttori della normale ad una curva di equazione: $f(r, Z) = 0$, sono proporzionali alle derivate parziali prime di questa funzione rispetto a r e Z , ovvero: $\cos \varphi = 2Kr/a^2$ e $\cos(\pi/2 - \varphi) = \sin \varphi =$

$= 2KZ/c^2$, da cui: $\tan \varphi = a^2 Z/c^2 r$ e $Z = r \tan \varphi \cdot c^2/a^2 = r \tan \varphi (1 - e^2)$, avendo introdotto l'eccentricità e dell'ellisse: $e^2 = (a^2 - c^2)/a^2 = 1 - c^2/a^2$.

Introducendo l'espressione di Z , in funzione della latitudine e dell'eccentricità, nell'equazione dell'ellisse, riferito agli assi: (r, Z) , e ricavando r e Z , si ha:

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad Z = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

ovvero le equazioni parametriche dell'ellisse meridiana dell'ellissoide di rotazione. Per ottenere le equazioni parametriche dell'ellissoide di rotazione, basta osservare che, con riferimento al sistema di assi geocentrico, una qualsiasi ellisse meridiana può essere individuata dall'angolo λ (chiamato longitudine) che il piano di questa forma con il piano equatoriale, cosicché (essendo: $X = r \cos \lambda$ e $Y = r \sin \lambda$) si ha:

$$X = \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{W} \quad Y = \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{W} \quad Z = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{W}$$

avendo posto: $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$.

Alle linee: $\lambda = cost$, corrispondono i meridiani, luogo dei punti che hanno la stessa longitudine, ed alle linee: $\varphi = cost$, corrispondono i paralleli, luogo dei punti che hanno la stessa latitudine (queste due famiglie di linee sono ortogonali tra loro).

I due parametri: (φ, λ) , di latitudine e longitudine, individuano sia la direzione di una normale all'ellissoide che la posizione del punto per cui passa (in coordinate curvilinee). Di conseguenza, se si misurano direttamente questi valori su tutti i punti della superficie terrestre da rilevare (come è possibile con misure astronomiche), si realizzano, con un'unica misura, tutte le operazioni di rilevamento di punti (ad eccezione della misura delle loro quote). In effetti, questa procedura può essere adottata per il rilevamento di carte a scala molto piccola (cioè per la formazione di carte geografiche), ma è inattuabile, data la scarsa precisione che ne deriva, per il rilevamento topografico.

Infatti per raggiungere una precisione nella misura di latitudine e longitudine di qualche decimo di secondo sessagesimale, corrispondente sulla superficie terrestre ad una precisione lineare di una decina di metri, sono necessarie complesse apparecchiature e lunghe (e molto raffinate) osservazioni astronomiche, mentre le osservazioni astronomiche speditive consentono solo precisioni di qualche decina di secondi, ovvero permettono di individuare posizioni di punti, con errori di parecchie centinaia di metri.

Inoltre l'ellissoide di rotazione è solo una superficie che approssima il geode e, in generale, la normale all'ellissoide, in un punto, non è diretta esattamente come la normale al geode, ovvero secondo la verticale fisica in quel punto. In effetti, le coordinate curvilinee di un punto sul geode, determinate con osservazioni astronomiche, definiscono la direzione della verticale fisica nel punto (essendo chiamate, in questo caso, latitudine e longitudine astronomiche o geoidiche), mentre con le operazioni di misura e calcolo di tipo geodetico e topografico, riferite alla superficie ellissoidica, si ottengono invece le coordinate curvilinee che

definiscono la direzione della normale all'ellissoide (essendo altrimenti chiamate, latitudine e longitudine ellissoidiche o geodetiche). Le differenze si possono mettere in evidenza, quando si confrontano i valori delle coordinate curvilinee, ottenute con i due metodi, per uno stesso punto (esse costituiscono le due componenti, meridiana e trasversale, della deviazione della verticale).

3.3. Sezioni normali e raggi di curvatura dell'ellissoide terrestre

Per studiare i problemi geometrici nell'intorno di un punto dell'ellissoide, è necessario conoscere i raggi di curvatura nel punto stesso. A tal fine, dato il punto P e la normale all'ellissoide n , tutti i piani passanti per n , ossia il fascio di piani aventi per costola n (come mostrato in fig. 10) intersecano l'ellissoide secondo delle linee piane, chiamate sezioni normali. Le sezioni normali hanno, nel punto P , raggi di curvatura diversi, in dipendenza dell'angolo che la sezione normale forma con un piano di riferimento (invece nel caso di una superficie sferica, tutte le sezioni normali sono circonferenze, aventi lo stesso raggio della sfera). Questi raggi di curvatura variano, con continuità, da un minimo ρ ad un massimo N e le sezioni che hanno rispettivamente il minimo ed il massimo raggio di curvatura sono chiamate sezioni normali principali (ed i loro raggi di curvatura raggi principali di curvatura). Le sezioni normali principali sono ortogonali tra di loro e, in particolare, nelle superfici di rotazione, come l'ellissoide terrestre, una sezione normale principale coincide sempre con la curva meridiana (cioè con curva ottenuta intersecando la superficie con un piano che contiene, oltre alla normale nel punto, anche l'asse di rotazione). In questo modo, una sezione principale in un punto dell'ellissoide coincide con il meridiano e l'altra, chiamata gran normale, è perpendicolare al meridiano (cioè corrisponde al piano che contiene la tangente al parallelo).

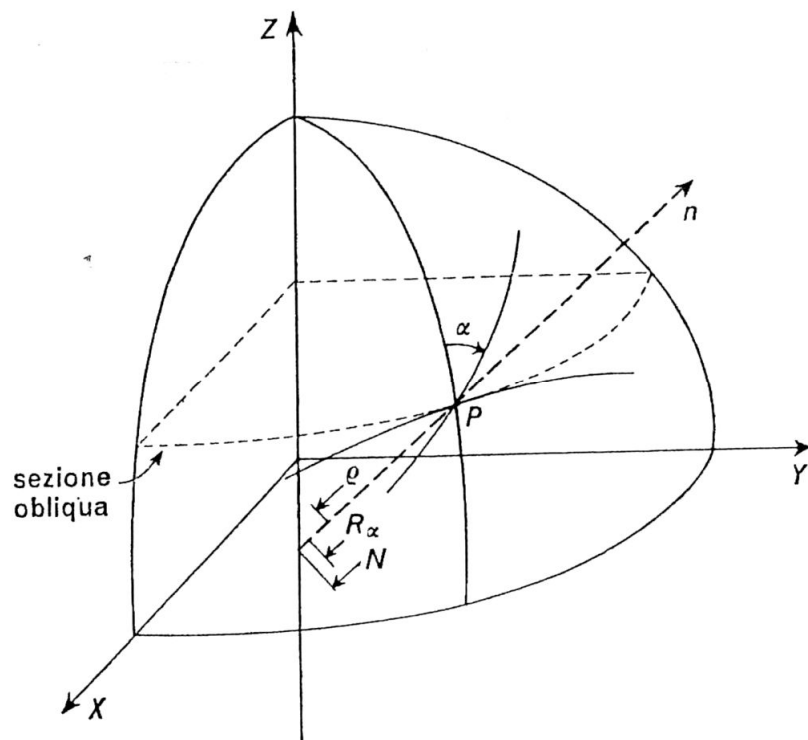


Fig. 10 – Sezioni normali in un punto dell'ellissoide

Il raggio di curvatura R di una sezione normale generica, formante un angolo α (azimut) con il meridiano, è funzione dei raggi minimo ρ e massimo N , ed è calcolato con il teorema di Eulero:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

Il raggio di curvatura di una curva piana è il limite del rapporto fra l'elemento d'arco e l'angolo compreso fra le normali condotte per gli estremi di tale elemento. Poiché i meridiani sono ellissi tutti uguali, questo angolo è uguale alla differenza di latitudine (dato che gli estremi dell'arco infinitesimo hanno la stessa longitudine):

$\rho = ds/d\varphi = \sqrt{dr^2 + dZ^2}/d\varphi$ e, differenziando rispetto a φ , le espressioni di r e Z , precedentemente trovate, si ha:

$$dr = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} d\varphi \quad dZ = \frac{a(1-e^2)\cos\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} d\varphi \quad ds = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} d\varphi$$

da cui:

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$$

Il valore di N deriva dal teorema di Meusnier che determina il raggio di curvatura di una sezione obliqua, uguale al raggio di curvatura della sezione normale, corrispondente al piano che contiene la tangente alla sezione obliqua, moltiplicato per il coseno dell'angolo, formato tra i piani delle due sezioni. In questo caso, la sezione principale contiene la tangente al parallelo (la cui circonferenza ha raggio r) e forma un angolo uguale alla latitudine del punto, con il piano del parallelo, per cui essendo: $r = N \cos\varphi$, e data la sua espressione, precedentemente trovata, si ha:

$$N = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a(1-e^2)}{W}$$

Dalle formule precedenti di ρ e N , si ricava:

$$\frac{N-\rho}{N} = \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi}$$

verificando che N è sempre maggiore o uguale a ρ e deducendo che la differenza massima si riscontra all'equatore: $\varphi = 0$, mentre è nulla ai poli: $\varphi = \pi/2$. Comunque questa differenza relativa è dell'ordine di

e^2 , ovvero $1/150$ (essendo l'eccentricità circa il doppio dello schiacciamento), cosicché i raggi di curvatura minimo e massimo differiscono, in ogni punto dell'ellissoide, al massimo di $1/150$ del loro valore. Tenendo conto che tutti gli altri raggi di curvatura sono intermedi, si deduce che l'ellissoide terrestre, nell'intorno di un suo punto, si discosta poco da una sfera e che il raggio medio R di curvatura dell'ellissoide, in un punto, è la media geometrica dei due suddetti raggi:

$$R = \sqrt{\rho N} = \frac{a(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 \varphi}$$

La sfera di raggio R , tangente all'ellissoide nel punto in cui il raggio stesso è calcolato, è chiamata sfera locale, differisce poco dall'ellissoide, in un largo intorno del punto, e può essere vantaggiosamente utilizzata per molti calcoli, in sua vece.

4. Misure di angoli e distanze sulla superficie di riferimento: linee geodetiche

4.1 Definizione delle linee geodetiche

Una volta proiettati i punti da rilevare sul geoide, occorre misurare angoli e distanze fra i punti, in modo da determinarne la posizione relativa. Allora è necessario congiungere i punti con linee, appartenenti alla superficie, la cui lunghezza sia la loro distanza. Analogamente considerando due linee, uscenti da un punto, si definisce come angolo, fra queste, quello formato dalle loro tangenti nel punto.

Poiché fra due punti di una superficie curva possono essere tracciate linee di natura geometrica diversa, occorre definire quali linee prendere in considerazione. Se la linea che congiunge due punti rappresenta la distanza (valutata sulla superficie), si sceglie la linea (chiamata geodetica) che abbia la minore lunghezza, fra tutte le possibili. Più precisamente, la geodetica è definita come la linea che gode della proprietà di avere, in ogni suo punto, la sua normale coincidente con la normale alla superficie. L'equazione differenziale della geodetica è scritta uguagliando l'espressione della normale alla linea a quella della normale alla superficie. Dopodiché si può dimostrare che, se due punti non sono troppo distanti, la geodetica che li congiunge è unica e rappresenta il percorso di minima lunghezza.

Per esemplificare quanto sopra, si consideri che, secondo la definizione, le rette sono le geodetiche del piano (perché qualsiasi altra curva del piano ha la normale giacente sul piano stesso) e che, sulla sfera, gli archi di geodetica sono archi di cerchio massimo. In questo modo, se la superficie di riferimento è sferica, i punti sono congiunti da archi di cerchio massimo e le misure per individuarne la posizione relativa sono lunghezze di archi di cerchio massimo e angoli fra due archi di cerchi massimi. Ancora più semplicemente, nel caso di una superficie di riferimento piana, si misurano le lunghezze di segmenti di retta e gli angoli fra i segmenti di due rette.

E' familiare il fatto che la geometria e la trigonometria piane si costruiscono con i segmenti di retta, ovvero con le geodetiche del piano, come pure, è noto che la geometria e la trigonometria sferiche si costruiscono con gli archi di cerchio massimo, cosicché risulta facile risolvere triangoli piani ed anche triangoli sferici. Invece la geometria e la trigonometria ellissoidiche si devono costruire con le geodetiche dell'ellissoide e purtroppo le geodetiche dell'ellissoide hanno il difetto di essere curve gobbe (cioè non contenute in un

piano). Di conseguenza, la risoluzione di triangoli sull'ellissoide (i cui lati sono geodetiche ellissoidiche) comporta l'uso di formule complesse, anche se non è una difficoltà, dal punto di vista della costruzione della trigonometria ellissoidica (perfettamente definibile, a parte la complicazione delle formule).

Tuttavia il difetto principale è dal punto di vista delle misure, in quanto, mentre è facile misurare la lunghezza di una linea, contenuta in un piano, non è altrettanto facile misurare la lunghezza di una linea gobba, già per i problemi che sorgono nell'individuarela (tutto ciò fa sì che si adottino sempre opportune semplificazioni, per poter effettivamente eseguire le misure richieste).

4.2 Equazioni delle geodetiche

Traducendo in formule la definizione data, si hanno le equazioni differenziali delle geodetiche e, in generale se: $f(X, Y, Z) = 0$, è l'equazione della superficie, i coseni direttori della normale sono:

$$\frac{1}{2S} \frac{\partial f}{\partial X} \quad \frac{1}{2S} \frac{\partial f}{\partial Y} \quad \frac{1}{2S} \frac{\partial f}{\partial Z} \quad \text{con:} \quad 2S = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2}$$

I coseni direttori di una linea, data in forma parametrica: $X = X(s)$, $Y = Y(s)$, $Z = Z(s)$, dove s è la lunghezza della linea, valutata da un punto determinato, e R il raggio di prima curvatura, sono:

$$R \frac{d^2 X}{ds^2} \quad R \frac{d^2 Y}{ds^2} \quad R \frac{d^2 Z}{ds^2}$$

per cui, eguagliando i coseni direttori, si hanno le suddette equazioni differenziali:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial X}}{\frac{d^2 X}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial Y}}{\frac{d^2 Y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial Z}}{\frac{d^2 Z}{ds^2}}$$

Per una superficie di rotazione l'espressione $f(X, Y, Z) = 0$, si può sempre mettere nella forma:

$X^2 + Y^2 - g(Z) = 0$, che diventa, per l'ellissoide:

$$X^2 + Y^2 - \left(\alpha^2 - \frac{Z^2}{1 - e^2} \right) = 0$$

cosicché si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = 2X \quad \frac{\partial f}{\partial Y} = 2Y$$

Dopodiché la prima delle due equazioni differenziali, ottenute dall'uguaglianza dei coseni direttori, si può scrivere come:

$$X \frac{d^2 Y}{ds^2} - Y \frac{d^2 X}{ds^2} = 0 \quad \text{ovvero:} \quad \frac{d}{ds} \left(X \frac{dY}{ds} - Y \frac{dX}{ds} \right) = 0$$

ed integrando si ottiene:

$$X \frac{dY}{ds} - Y \frac{dX}{ds} = \text{cost}$$

D'altra parte, essendo: $X = r \cos \lambda$ e $Y = r \sin \lambda$, si ha ancora:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= -r \sin \lambda \frac{d\lambda}{ds} + \cos \lambda \frac{dr}{ds} = -Y \frac{d\lambda}{ds} + \cos \lambda \frac{dr}{ds} \\ \frac{dY}{ds} &= -r \cos \lambda \frac{d\lambda}{ds} + \sin \lambda \frac{dr}{ds} = -X \frac{d\lambda}{ds} + \sin \lambda \frac{dr}{ds} \end{aligned}$$

che, sostituite indietro nell'integrazione appena effettuata, fornisce l'equazione differenziale della geodetica:

$$r^2 \frac{d\lambda}{ds} = \text{cost}$$

La fig. 11 mostra il triangolo infinitesimo ABP (che, in quanto infinitesimo, si può considerare piano, pur essendo su una superficie curva) e, indicando con α l'angolo formato nel punto P , di coordinate (X, Y, Z) , fra la tangente alla geodetica e la tangente al meridiano, si ha: $rd\lambda = ds \sin \alpha$,

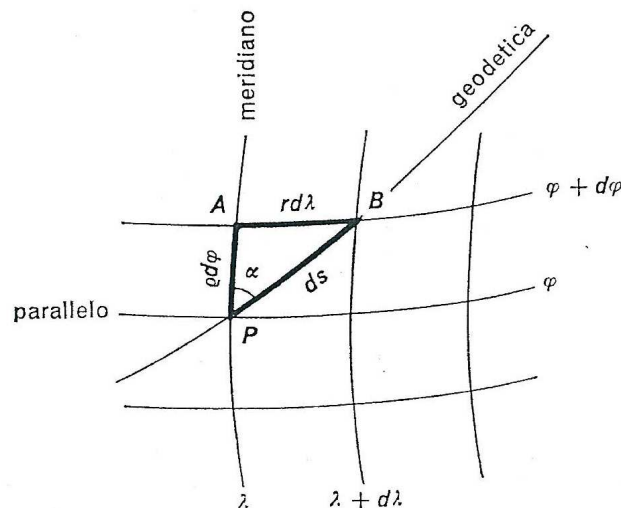


Fig. 11 – Triangolo infinitesimo dell'ellissoide

per cui eliminando il rapporto: $d\lambda/ds = \sin \alpha$, dall'espressione precedente, si ha infine:

$$r \sin \alpha = \text{cost}$$

ovvero quanto afferma il teorema di Clairaut in base al quale, sulle superfici di rotazione, per ogni punto di una geodetica, è costante il prodotto del raggio del parallelo per il seno dell'azimut della geodetica stessa. L'angolo α , chiamato azimut della geodetica, si computa a partire dal meridiano in senso orario e può avere qualsiasi valore compreso fra 0 e 2π .

Il teorema di Clairaut è molto importante, perché permette di definire con semplicità le linee geodetiche di una superficie di rotazione ed individuarne il percorso. Ad esempio, se una geodetica esce da un punto, con un certo azimut, si può constatare che l'azimut cresce, man mano che la geodetica si allontana dal punto, poiché il raggio del parallelo diminuisce.

4.3. Misure eseguibili sulla superficie fisica atte a definire misure sulla superficie di riferimento

A questo punto, facendo riferimento alla fig. 12, è opportuno definire quali misure possono effettivamente essere eseguite dal geodeta e dal topografo. Infatti la geometria sulla superficie di riferimento si può costruire considerando figure geometriche e, in particolare, il triangolo i cui lati sono archi di geodetiche. Tuttavia sono anche evidenti le difficoltà di misurare rigorosamente la lunghezza di un arco di geodetica, come pure di misurare l'angolo fra due geodetiche (ovvero l'angolo fra le tangenti alle geodetiche uscenti da un punto).

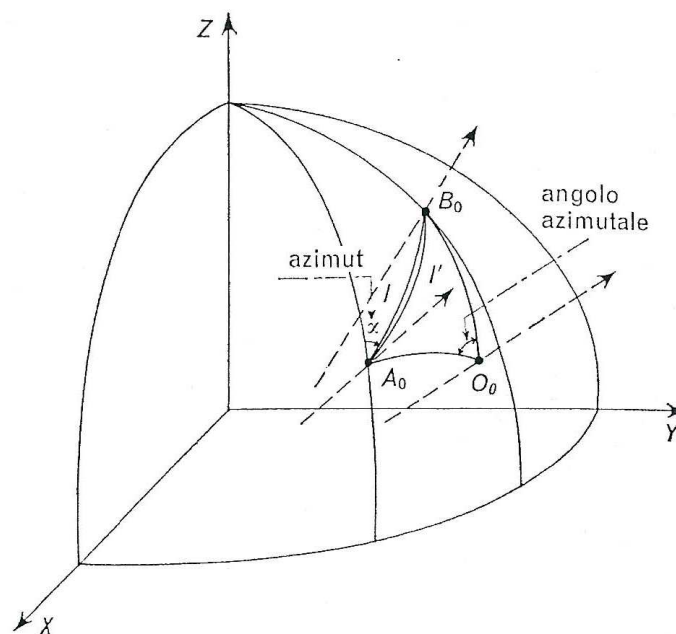


Fig. 12 – Definizione delle misure sulla superficie di riferimento

- Distanza fra due punti: considerati due punti A e B sulla superficie fisica, gli strumenti ed i metodi di misura impiegati permettono di definire la lunghezza l dell'arco di sezione normale che congiunge le proiezioni A_0 e B_0 . In effetti, le sezioni normali che congiungono questi punti sono due: una è la traccia

l del piano che contiene la verticale per A_0 ed il punto B_0 , mentre l'altra è la traccia l' del piano che contiene la verticale per B_0 ed il punto A_0 (infatti le due tracce non coincidono, se le due verticali sono sghembe), cosicché le lunghezze l e l' sono le distanze effettivamente misurabili fra A_0 e B_0 ⁴.

- Azimut di un punto: considerati due punti A e B , l'azimut di B rispetto ad A (misurabile per mezzo di osservazioni astronomiche o con teodoliti giroscopici) è l'angolo che la sezione normale A_0B_0 forma con la tangente al meridiano diretta verso nord (l'azimut si valuta in senso orario, a partire dalla direzione del nord, e può assumere tutti i valori fra 0 e 2π).
- Angolo azimutale fra due punti: considerati i due punti A e B sulla superficie fisica ed un terzo punto di stazione O , l'angolo azimutale AOB (misurabile con un teodolite, data la visibilità dei due punti dalla stazione) è l'angolo fra le sezioni normali O_0A_0 ed O_0B_0 . Infatti operativamente l'angolo azimutale è l'angolo del diedro, formato dal piano che contiene la verticale per O ed il punto A e dal piano che contiene la verticale per O ed il punto B (anche in questo caso, sussistono ambiguità, circa le sezioni normali, congiungenti due punti, qualora si considerino gli angoli azimutali: OBA e BAO).
- Distanza zenitale: considerati due punti A e B sulla superficie fisica, la distanza zenitale (misurabile con un teodolite, se B è visibile da A) è l'angolo che la congiungente AB forma con la verticale in A (analogamente è definita la distanza zenitale di B rispetto ad A).
- Dislivello: considerati i due punti A e B della superficie fisica, il dislivello fra i punti A e B è la differenza fra la quota di A e la quota di B (che cambia di segno muovendosi da B verso A).

La distanza zenitale ed il dislivello sono definiti per dare un quadro completo delle misure geometriche che il geodeta od il topografo eseguono, di norma (tuttavia nelle seguenti considerazioni si prendono in esame solo la distanza, l'azimut e l'angolo azimutale).

4.4 Differenze fra misure sull'ellissoide e misure sul geoide

I tipi di misure illustrati fanno riferimento alla verticale vera, ovvero alla normale al geoide, in conseguenza del fatto che gli strumenti di misura hanno assi che si possono orientare, con facilità e precisione, rispetto a questa direzione. Tuttavia in seguito, alla scelta dell'ellissoide di rotazione, come superficie di riferimento, è più logico definire ed eseguire le misure di angoli e distanze con riferimento alla normale all'ellissoide. Purtroppo questo non è possibile, perché le due direzioni si possono far coincidere, nell'eseguire il rilevamento, solo in un punto (orientando opportunamente l'ellissoide di riferimento). Invece in tutti gli altri punti, la normale all'ellissoide non è fisicamente definibile e tutto ciò obbliga a continuare ad orientare gli strumenti di misura secondo la verticale vera. In questo modo, gli angoli e le distanze misurati sono sempre riferiti al geoide per cui, stante le differenti direzioni della normale al geoide e della normale all'ellissoide, equivalgono teoricamente ad angoli ed a distanze di sezioni oblique su quest'ultimo.

Pertanto si misurano gli angoli e le distanze con riferimento al geoide, ma i risultati delle misure si reputano forzatamente uguali a quelli che si sarebbero ottenuti effettuando le misure con riferimento all'ellissoide.

⁴ Le moderne tecniche di posizionamento GPS, grazie alla ricchezza dell'informazione resa disponibile, dal loro stesso sistema, permettono la misura anche delle tre componenti della distanza.

Tuttavia questa incongruenza si può teoricamente (ed anche praticamente) superare, qualora l'ondulazione del geoide (rispetto all'ellissoide) e la deviazione della verticale (tra geoide ed ellissoide) siano conosciute. Infatti da tali conoscenze si possono derivare le correzioni alle misure eseguite, con riferimento al geoide, per ottenere quelle richieste, con riferimento all'ellissoide.

D'altra parte, non si ha notizia che, in sede di attuazione di misura anche di altissima precisione, si proceda in tal senso ⁵. Infatti in un primo momento, si dovrebbe accettare l'incongruenza ed eseguire il rilevamento che conduce a posizioni di punti che si reputano appartenere all'ellissoide, indi determinare, per ogni punto, l'angolo fra la verticale vera e la normale all'ellissoide, correggere le misure, per averle riferite all'ellissoide, e ripetere i calcoli, per determinare le posizioni ellissoidiche dei punti. Per contro, occorre tenere presente tutte le incertezze che inevitabilmente accompagnano i risultati delle misure, che conseguentemente determinano incertezze, nella posizione ellissoidica dei punti, e che possono risultare dello stesso ordine delle correzioni da apportare. Allora tale incongruenza è accettata e si procede nell'ipotesi che le misure eseguite di angoli e distanze siano effettivamente riferite all'ellissoide. Comunque tali considerazioni sono riferite solo ai punti di inquadramento, relativi al rilevamento di grandissime estensioni, mentre non hanno rilevanza nel rilevamento di limitate estensioni e per i punti di dettaglio.

4.5. Teoremi della Geodesia operativa

Pur avendo superato le incongruenze, accettando i risultati delle misure di angoli e distanze, eseguite sulla superficie fisica, come riferite all'ellissoide, rimane il fatto che, in effetti, si misurano le lunghezze di archi di sezioni normali e gli angoli fra sezioni normali (tra l'altro non univocamente definite), mentre si dovrebbero misurare le lunghezze di archi di geodetica, e gli angoli fra le tangenti alle geodetiche. A tal fine, come illustra la fig. 13, considerati due punti sull'ellissoide P e Q , l'arco s' di sezione normale congiungente, avente un azimut A , l'arco s di geodetica, avente un azimut α , ed utilizzando le formule di Puiseux-Weingarten, si dimostra che, a meno di termini dell'ordine di $(s/N)^8$, assolutamente irrilevanti per archi lunghi anche qualche centinaio di chilometri, è trascurabile la differenza nella distanza:

$$\frac{s' - s}{s} = \frac{1}{360} \frac{s^4}{N^2 R_a^2} \left(\frac{e^2}{1 - e^2} \right)^2 \sin^2 2\alpha \cos^4 \varphi$$

Infatti anche assumendo: $s = 1000 \text{ km}$, la differenza fra la lunghezza dell'arco di sezione normale e la lunghezza dell'arco di geodetica non supera il centimetro, ovvero 10^{-8} della distanza considerata. Tuttavia se si tiene presente che, nella misura delle distanze, si può raggiungere, limitatamente a qualche decina di chilometri, una precisione relativa di 10^{-6} , si può concludere che è perfettamente giustificato ritenere che misure di distanze, eseguite secondo sezioni normali, diano gli stessi risultati di misure eseguite, secondo archi di geodetiche.

⁵ Per completezza, si segnala che, per quanto riguarda, le distanze zenitali, data la scarsa precisione delle stesse (principalmente dovuta a problemi di rifrazione atmosferica), le correzioni geoidiche sono del tutto trascurabili. Invece per quanto riguarda i dislivelli, essi sono già direttamente riferiti al geoide e, al più, è necessario apportare la correzione ortometrica (dovute al non parallelismo tra superfici equipotenziali diverse ed il geoide stesso), passando dalle cosiddette quote empiriche (ottenute come somma algebrica dei dislivelli misurati) alle quote ortometriche. Allo stesso modo, è possibile passare alle quote geopotenziali (che tuttavia sono energia, cioè lavoro, e non altezze), grazie alla correzione dinamica.

Quanto alla differenza dei due azimut, espressa in radianti, si dimostra, ricorrendo ugualmente alle formule di Puiseux-Weingarten:

$$A - \alpha = \frac{s^2}{12NR_\alpha} \frac{e^2}{1 - e^2} \sin 2\alpha \cos^2 \varphi$$

che, a parità di lunghezza s , tale differenza è massima all'equatore e nulla ai poli (dove sezioni normali, geodetiche e meridiani coincidono). Per geodetiche con un azimut di $\pi/4$ (cioè con: $\sin 2\alpha = 1$) e per una distanza di 100 km , la differenza è di $0.03''$, all'equatore, e di $0.01''$, alle latitudini medie (la differenza sale a $0.26''$ e $0.13''$, se si considera una distanza di 300 km). Se si tiene conto che la precisione di misura degli angoli raggiunge, al massimo, qualche decimo di secondo sessagesimale e che non è possibile, per effetto della curvatura terrestre, effettuare misure fra punti distanti oltre 200 km , una misura di azimut, anche se effettuata con riferimento ad una sezione normale, può sempre considerarsi riferita ad una geodetica.

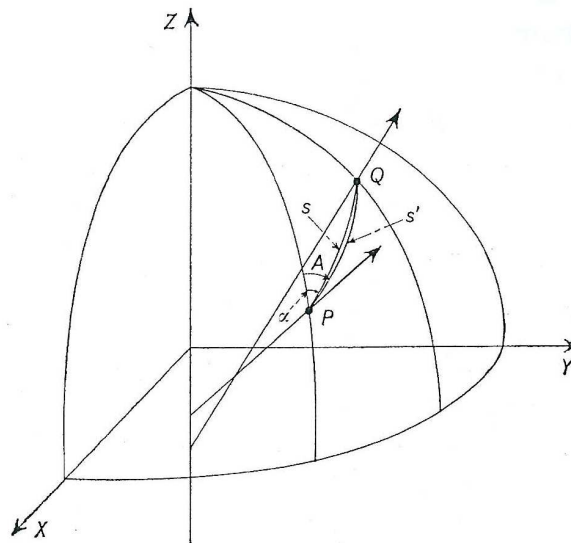


Fig. 13 – Differenze tra le lunghezze e tra gli azimut di una sezione normale e di una geodetica passanti per due punti

Un'analoga conclusione si trae per la misura degli angoli azimutali, dato che, per un angolo azimutale (descritto come differenza di due azimut), al massimo, si hanno discrepanze doppie di quelle già messe in evidenza per gli azimut.

Quanto esposto costituisce la sostanza dei teoremi della Geodesia operativa, ovvero in sintesi il fatto che qualunque misura di distanza, azimut ed angolo azimutale, eseguita con i mezzi a disposizione dei geodeti e dei topografi, si ritiene eseguita con riferimento ad archi di geodetiche sulla superficie di riferimento. Per completezza, è utile notare che quest'indagine è necessaria per il fatto che, come superficie di riferimento, è conveniente assumere un ellissoide di rotazione. Infatti qualora fosse possibile assumere una superficie di riferimento sferica, i teoremi della Geodesia operativa non sarebbero necessari, in quanto le sezioni normali

e le geodetiche coincidono, sulla sfera, ed entrambe sono cerchi massimi. L'ellissoide terrestre, avendo uno schiacciamento molto piccolo, differisce poco da una sfera (per cui i teoremi della Geodesia operativa si giustificano anche intuitivamente).

5. Risoluzione di figure geometriche sulla superficie di riferimento

5.1 Approssimazione delle superficie di riferimento

Stabilito che qualsiasi misura di angolo o distanza si può considerare riferita ad archi di geodetiche ellissoidiche, ne deriva che qualsiasi calcolo, tipo la risoluzione di un triangolo, di un quadrilatero o di una qualsiasi figura poligonale, dovrebbe essere eseguito con gli algoritmi propri della trigonometria ellissoidica. Tuttavia poiché la trigonometria ellissoidica è piuttosto complessa, è opportuno esaminare la possibilità di eseguire i calcoli in maniera più semplice, in relazione al fatto che i triangoli e le figure che, in generale, si devono risolvere, hanno lati raramente eccedenti i 50 km , ovvero lati piccoli rispetto ai raggi di curvatura dell'ellissoide che sono dell'ordine di 6000 km . Infatti il rapporto s/ρ , fra la lunghezza di un arco di geodetica s ed il raggio di curvatura del meridiano ρ , è una quantità inferiore ad uno e non eccede, di solito, 10^{-2} . In generale, questa quantità è presa come quantità piccola, del primo ordine, e si esprimono le approssimazioni delle formule in termini di potenze di tale quantità (sono quantità piccole, del primo ordine, anche i rapporti: s/N , s/R_α , e così via, come pure il valore di e^2).

A conclusione della breve indagine a seguire, si constata che, se gli archi di geodetica, componenti le figure oggetto del calcolo, non eccedono i 100 km , i calcoli eseguiti con gli algoritmi della trigonometria sferica danno risultati praticamente uguali a quelli che si otterrebbero usando la trigonometria ellissoidica. Inoltre se le dimensioni non eccedono i 20 km , i risultati che si ottengono con la trigonometria piana sono praticamente uguali a quelli che si ottengono usando algoritmi molto più raffinati. E' comunque opportuno specificare cosa si intende con praticamente uguali. Infatti le misure di angoli e di distanze non possono considerarsi esatte, perché le posizioni dei punti rilevati sono affette da un'incertezza, più o meno elevata, a seconda degli strumenti e dei metodi usati. Ne consegue che possono reputarsi praticamente uguali i risultati di due calcoli, eseguiti con algoritmi diversi, tutte le volte che le differenze sono decisamente inferiori alle incertezze derivanti dalle misure.

5.2 Formule di Puiseux-Weingarten

Data (come illustra la fig. 14) una terna cartesiana ortogonale (X, Y, Z) , avente il piano (XY) tangente all'ellissoide nel punto P_0 , di coordinate ellissoidiche (φ_p, λ_p) , con l'asse Z diretto secondo la normale all'ellissoide, l'asse Y tangente al meridiano e diretto verso nord e l'asse X diretto verso est (ovvero una terna Euleriana ⁶), sia g una geodetica uscente da P_0 , secondo l'azimut α , e s la lunghezza dell'arco di geodetica, compreso fra l'origine ed un punto generico Q . Le formule di Puiseux-Weingarten (che si derivano dalle formule di Frenet) danno, mediante uno sviluppo in serie, le coordinate cartesiane del punto Q della geodetica, in funzione della lunghezza dell'arco s ; a meno di termini di quarto ordine:

⁶ Una terna Euleriana ammette tre rotazioni, attorno a tre assi di cui il primo ed il terzo coincidenti.

$$X = s \sin \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6NR_\alpha} + \frac{1}{3} \frac{s^3}{N^2R_\alpha} \frac{e^2}{1-e^2} \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha + \dots \right)$$

$$Y = s \cos \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6\rho R_\alpha} + \frac{1}{24} \frac{s^3}{\rho R_\alpha} \frac{e^2}{1-e^2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos \alpha} \left(\frac{9 \cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \right) + \dots \right)$$

$$Z = -s \left(\frac{s}{2R_\alpha} - \frac{1}{2} \frac{s^2}{NR_\alpha} \frac{e^2}{1-e^2} \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha + \dots \right)$$

dove ρ e N sono i raggi di curvatura del meridiano e della gran normale, nel punto P_0 , e R_α il raggio di prima curvatura della geodetica, nello stesso punto, che coincide con il raggio di curvatura della sezione normale, avente lo stesso azimut.

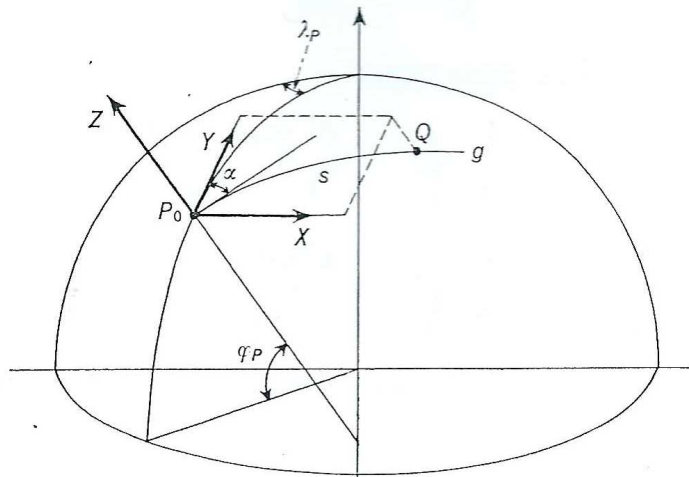


Fig. 14 – Terna Euleriana

Dopodiché poiché:

$$\frac{\rho}{N} = \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \quad \text{e:} \quad \frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} = \frac{1}{\rho N} (N \cos^2 \alpha + \rho \sin^2 \alpha)$$

si ha, con qualche passaggio:

$$\frac{1}{NR_\alpha} = \frac{1}{\rho N} \left(1 - \frac{e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \right) \quad \text{e:} \quad \frac{1}{\rho R_\alpha} = \frac{1}{\rho N} \left(1 + \frac{e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1-e^2} \right)$$

per cui, arrestando gli sviluppi formule di Puiseux-Weingarten ai termini di secondo ordine, si ottiene:

$$X = s \sin \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6\rho N} \left(1 - \frac{e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \right) \right)$$

$$Y = s \cos \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6\rho N} \left(1 - \frac{e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1 - e^2} \right) \right)$$

$$Z = -\frac{s^2}{2R_\alpha}$$

5.3 Campo geodetico

Data una sfera locale di raggio: $R = \sqrt{\rho N}$, tangente all'ellissoide, nello stesso punto P_0 , gli stessi sviluppi sono applicabili anche per la sfera, purché si ponga il raggio della sfera; al posto di ρ e N . In questo modo, per un punto posto a distanza s dall'origine, sull'arco di cerchio massimo, avente l'azimut α , si hanno le coordinate, nella stessa approssimazione precedente:

$$X_s = s \sin \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6R^2} \right) = s \sin \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6\rho N} \right)$$

$$Y_s = s \cos \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6R^2} \right) = s \cos \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6\rho N} \right)$$

$$Z_s = -\frac{s^2}{2R} = -\frac{s^2}{2\sqrt{\rho N}}$$

Le differenze fra le coordinate con le formule di Puiseux-Weingarten, arrestate ai termini di secondo ordine, e le coordinate con le stesse formule, per la sfera locale, risultano:

$$X_s - X = -s \sin \alpha \frac{s^2}{6\rho N} \frac{e^2 \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$Y_s - Y = s \cos \alpha \frac{s^2}{6\rho N} \frac{e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1 - e^2}$$

$$Z_s - Z = \frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\rho N}} \right)$$

Calcolando i valori delle due prime differenze per: $\varphi = 0$ ed $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi/2$, in modo da ottenere i valori massimi, si trova che non superano 27 mm , per $s = 100 \text{ km}$ (e si possono reputare decisamente inferiori alle incertezze di posizione, derivanti dalle misure). Si può così concludere che i problemi di calcolo riguardanti figure geometriche ellissoidiche, comprese nell'intorno di un punto di raggio di almeno 100 km , possono essere risolti con gli algoritmi della trigonometria sferica, assumendo come raggio della sfera la media geometrica del raggio minimo e massimo dell'ellissoide, nel punto P_0 , ovvero utilizzando la sfera locale nell'intorno di quel punto (detto intorno è chiamato campo geodetico).

Per le quote, occorre notare che, nel campo geodetico, non è trascurabile la differenza fra la curvatura $1/R_\alpha$ della sezione normale (uguale alla curvatura della geodetica) e la curvatura $1/\sqrt{\rho N}$ della sfera locale. Infatti a meno di termini in e^4 , si ha:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{N} (1 + e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi) \quad \text{e:} \quad \frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{\rho} (1 - e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi)$$

per cui:

$$\frac{1}{R_\alpha^2} = \frac{1}{\rho N} (1 + e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi) (1 - e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi)$$

e, nella stessa approssimazione:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\rho N}} \left(1 + \frac{1}{2} (e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi) \right) = \frac{1}{\sqrt{\rho N}} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \varphi \cos 2\alpha \right)$$

cosicché la differenza fra la quota con la formula di Puiseux-Weingarten, arrestata ai termini di secondo ordine, e la quota con la stessa formula, per la sfera locale, risulta:

$$Z_s - Z = \frac{s^2}{\sqrt{\rho N}} \frac{1}{4} e^2 \cos^2 \varphi \cos 2\alpha$$

Questa differenza si annulla ai poli (punti ombelicali, dove tutti i raggi di curvatura sono uguali) ed assume i valori massimi all'equatore, in dipendenza del valore di α . Per $\varphi = 45^\circ$, i valori assoluti massimi sono in corrispondenza di: $\alpha = 0^\circ$ ed $\alpha = 90^\circ$, come mostra la tabella sottostante, in funzione della distanza s .

s	1 km	10 km	20 km	50 km	100 km
$ Z_s - Z $	0.13 mm	1.3 cm	5.4 cm	0.33 m	1.3 m

Si può constatare che, per i calcoli relativi alle quote di punti (o meglio di dislivelli in cui sia necessario fare un'assunzione sulla superficie di riferimento), i limiti entro cui si può assumere come superficie di riferimento la sfera locale sono più ristretti. Infatti tenuto conto della precisione dei dislivelli, ottenuti con la livellazione trigonometrica, la sfera locale può essere assunta, come superficie di riferimento, nell'intorno di un punto, quando la distanza, fra i punti di cui si calcola il dislivello, non eccede i 20 km (mentre quando la distanza eccede tale limite, è necessario usare nelle formule il raggio di curvatura della sezione normale percorsa). Per contro, noti problemi di rifrazione atmosferica consigliano di non superare mai proprio i 20 km.

5.4 Campo topografico

Per valori di distanza s di due decine di chilometri, le coordinate planimetriche del punto P possono essere calcolate come: $X = s \sin \alpha$ e $Y = s \cos \alpha$, dato che si può ritenere trascurabile l'apporto del termine fra parentesi $s^2/\rho N$, come evidenzia la tabella sottostante.

s	10 km	20 km	50 km
$s^2/\rho N$	$0.4 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$10.2 \cdot 10^{-6}$

Tuttavia non si può fissare un limite superiore, ben definito, all'intorno di un punto, chiamato campo topografico (dove si usano le formule della geometria e trigonometria piana), poiché questo dipende dalla precisione delle misure. Invece l'intorno stesso ha un raggio di almeno 15 km, perché la precisione 10^{-6} (cioè un millimetro, fra punti distanti un chilometro), in generale, non può essere superata.

Inoltre come già detto in precedenza, nelle misure o nei calcoli delle quote, in generale, si deve tener conto della curvatura della superficie di riferimento. Infatti lo scostamento fra il piano tangente, in un punto P_0 all'ellissoide (sul quale tutti i punti hanno: $Z = 0$), ed i punti dell'ellissoide stesso (o della sfera locale, per maggiore semplicità) che hanno: $Z = -s^2/2\sqrt{\rho N}$, a distanza s da P_0 , non può essere trascurato, anche per valori molto bassi della distanza s , come risulta evidente dalla tabella sottostante.

s	0.1 km	0.5 km	1 km	5 km	10 km
$s^2/2\sqrt{\rho N}$	0.0008 m	0.02 m	0.08 m	2.0 m	7.8 m

Poiché si possono misurare differenze di quota, fra punti distanti 100 m, con la precisione di un paio di decimi di millimetro, anche in questo intorno, è necessario tener conto della curvatura della superficie di riferimento. D'altra parte, se la precisione delle misure dei dislivelli è dell'ordine di qualche millimetro, si può trascurare la curvatura della superficie di riferimento, fino a distanze non superiori ad un paio di centinaia di metri.

5.5 Alcune formule di trigonometria sferica

Un triangolo sferico ABC su una sfera di raggio R (come mostrato in fig.15) è costituito da tre archi di cerchio massimo (geodetiche della sfera). Se con: a , b e c , si indicano le lunghezze dei lati, gli angoli al centro corrispondenti valgono: $\alpha = a/R$, $\beta = b/R$ e $\gamma = c/R$, ed i valori numerici (in radianti) di questi angoli rappresentano anche le lunghezze dei lati corrispondenti del triangolo $A_0B_0C_0$ sulla sfera di raggio unitario.

Per la risoluzione dei triangoli sferici, è conveniente riferirsi alla sfera di raggio unitario e considerare le lunghezze dei lati rispettivamente: α , β e γ , mentre gli angoli del triangolo $A_0B_0C_0$ sono le ampiezze degli angoli diedri formati, due a due, dai tre piani che definiscono i cerchi massimi: A_0B_0 , B_0C_0 ed A_0C_0 ,

evidentemente uguali (per la similitudine dei due triangoli) agli angoli del triangolo ABC (dove ogni angolo è indicato con la stessa lettera che contraddistingue il vertice cui si riferisce, come per i triangoli piani). Le formule della trigonometria sferica stabiliscono le relazioni fra gli angoli al centro α , β e γ e gli angoli A , B e C , cioè le relazioni fra lati ed angoli del triangolo sulla sfera unitaria, in accordo con le corrispondenze stabilite. Dopodiché il valore di un lato, ottenuto in seguito ad un calcolo, moltiplicato per il raggio R , fornisce la lunghezza del lato sulla sfera effettiva.

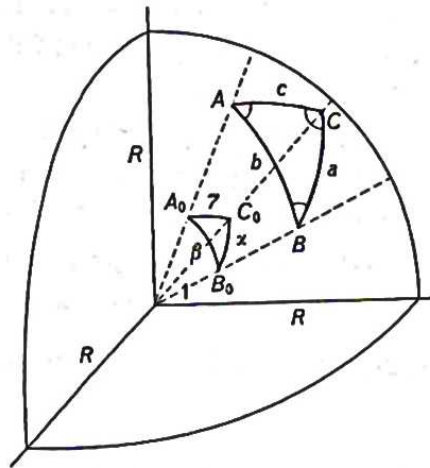


Fig. 15 – Triangolo sferico

Come illustra la fig. 16, dato il triangolo sferico della sfera, con l'asse x passante per il vertice A , ed il piano xy coincidente con il piano OAB , le coordinate del vertice C risultano:

$$x_c = \cos \beta \quad y_c = \sin \beta \cos A \quad z_c = \sin \beta \sin A$$

Ruotando poi la terna di un angolo γ , intorno a z , in modo che la nuova posizione x' dell'asse x passi per il vertice B , le coordinate di C , rispetto a questo nuovo riferimento, sono:

$$\begin{aligned} x'_c &= x_c \cos \gamma + y_c \sin \gamma = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A \\ y'_c &= -x_c \sin \gamma + y_c \cos \gamma = -\cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos A \\ z'_c &= z_c = \sin \beta \sin A \end{aligned}$$

Invece ricavando direttamente le coordinate (x'_c, y'_c, z'_c) , si ha:

$$\begin{aligned} x'_c &= \cos \alpha \\ y'_c &= \sin \alpha \cos(\pi - B) = -\sin \alpha \cos B \\ z'_c &= \sin \alpha \sin(\pi - B) = \sin \alpha \sin B \end{aligned}$$

cosicché, uguagliando le due terne di relazioni, nell'ordine, si ottengono:

- la formula del coseno:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

- la formula del seno-coseno (che lega ben cinque elementi del triangolo sferico):

$$\sin \alpha \cos B = \cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma \cos A$$

- la formula dei seni:

$$\sin \alpha \sin B = \sin \beta \sin A$$

- e, in maniera completa, il teorema dei seni:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$$

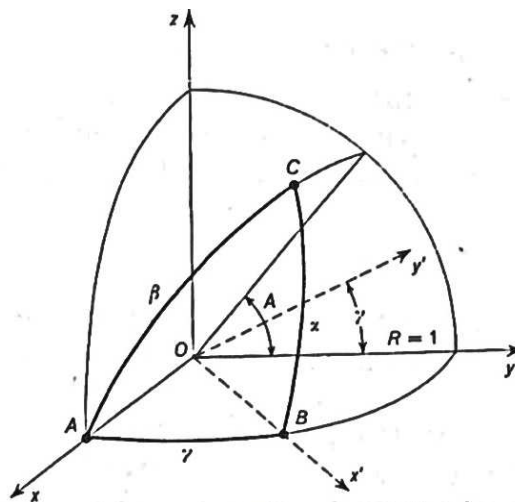


Fig. 16 – Deduzione delle formule fondamentali della trigonometria sferica

Dividendo membro a membro la formula del seno-coseno per quella dei seni, si ottiene la formula della cotangente (che lega, a sua volta, quattro elementi del triangolo):

$$\sin A / \tan B = \sin \gamma / \tan \beta - \cos \gamma \cos A$$

Inoltre permutando circolarmente le lettere, nelle formule precedenti, si ottengono altre relazioni, così come si possono derivare altre formule della trigonometria sferica, come le formule di Delambre e Nepero (analoghe a quelle della trigonometria piana). Infine per risolvere facilmente i triangoli rettangoli, è utile

esprimere con enunciati le relazioni fra gli elementi, ricavando le relazioni nell'ipotesi che l'angolo A sia retto. In tal caso:

- dalla formula del coseno, si ha che il coseno dell'ipotenusa è uguale al prodotto dei coseni dei cateti:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma$$

- dalla formula della cotangente, si ha che il seno di un cateto è uguale alla tangente dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente:

$$\sin \gamma = \tan \beta / \tan A$$

- in modo analogo, permutando due volte circolarmente le lettere della formula della cotangente (posto: $A = \pi / 2$), si ricava che la tangente di un cateto è uguale alla tangente dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo compreso:

$$\tan \beta = \tan \alpha \cos C \quad \text{essendo:} \quad \sin C / \tan A = \sin \beta / \tan \alpha - \cos \beta \cos C$$

- dal teorema dei seni, si ricava che il seno di un cateto è uguale al seno dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto:

$$\sin \beta = \sin \alpha \sin A$$

- dalla formula del seno-coseno, si ricava che la tangente di un cateto è uguale al seno dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto:

$$\tan \beta = \sin \gamma \tan A \quad \text{dato:} \quad \sin \alpha \cos B = \cos \beta \sin \gamma$$

$$\text{e, tenuto conto che:} \quad \sin \alpha = \sin \beta / \sin A$$

5.6 Teorema di Legendre

La risoluzione di un triangolo geodetico ellissoidico, contenuto nel campo geodetico, può essere eseguita con le formule della trigonometria sferica. Tuttavia un'esperienza di calcolo, relativa alla risoluzione di un triangolo avente i lati di qualche decina di chilometri, mostra che i valori dei lati: α , β e γ , sono piccoli ($\sim 0.01 \text{ rad}$), dato il raggio R della sfera locale, dell'ordine di $6.3 \cdot 10^3 \text{ km}$ (e ne deriva che, per calcolare i lati di un triangolo, con la necessaria approssimazione, occorre usare un notevole numero di cifre).

Tutto ciò si può invece evitare, eseguendo il calcolo dei lati direttamente, senza l'uso del raggio R della sfera locale e, a questo scopo, serve il Teorema di Legendre che permette di risolvere un triangolo sferico, contenuto nel campo geodetico, con gli algoritmi della trigonometria piana (con notevoli semplificazioni di calcolo e maggiore sicurezza, nel conseguimento della precisione raggiungibile).

Prima enunciare questo teorema, è necessario precisare che la somma dei tre angoli: A , B e C , di un triangolo sferico è superiore a π di una quantità 3ε , chiamata eccesso sferico, cioè: $A + B + C - \pi = 3\varepsilon$,

dimostrando anche che l'eccesso sferico è numericamente valutabile, in radianti, facendo il rapporto fra l'area S del triangolo ed il quadrato del raggio R della sfera: $3\varepsilon = S/R^2$

Teorema di Legendre: dato un triangolo sferico i cui lati l sono una piccola frazione del raggio R della sfera ed assunto il rapporto l/R come una quantità piccola del primo ordine, commettendo un errore dell'ordine di $(l/R)^4$, gli angoli del triangolo piano (che ha i lati della stessa lunghezza dei lati del triangolo sferico) si possono derivare dagli angoli di quest'ultimo, sottraendo ad ognuno di essi un terzo eccesso sferico.

Innanzitutto si può osservare che, dato un triangolo sferico di lati: a , b e c , e note le relazioni che legano gli angoli noti, del triangolo sferico, a quelli incogniti, del triangolo piano (in modo da poter derivare facilmente quest'ultimi dai primi), il calcolo dei lati del triangolo sferico può essere eseguito con le formule della trigonometria piana.

Per quanto riguarda le approssimazioni, derivanti dall'applicazione del teorema di Legendre, dato un triangolo sferico equilatero avente i lati di 60 km ed una superficie di circa 1600 km^2 , ovvero con un eccesso sferico pari a circa: $4 \cdot 10^{-5}\text{ rad} = 24^{\text{cc}}$, l'errore con cui si ricavano gli angoli del triangolo piano è dell'ordine di: $(6 \cdot 10^4 / 6 \cdot 10^6)^4 = 10^{-8}\text{ rad} = 0,006^{\text{cc}}$. Limitando l'errore a 10^{-6} , come usuale e ponendo $(l/R)^4 < 10^{-6}$, si può dedurre che deve essere: $l < 200\text{ km}$, per cui il teorema di Legendre si può applicare a tutti i triangoli contenuti nel campo geodetico. Per il calcolo di triangoli di dimensioni più grandi, si potrebbero usare formule più complesse che considerano l'eccesso ellissoidico, ma queste formule hanno un interesse solo teorico, dato che non si possono eseguire osservazioni, fra punti non compresi entro il campo geodetico, con gli strumenti di misura della geodesia classica ⁷.

Per poter applicare il teorema di Legendre, occorre calcolare l'eccesso sferico, ovvero l'area del triangolo sferico. A questo proposito, si dimostra che, a meno di errori dell'ordine di $(l/R)^4$, ovvero dello stesso ordine d'approssimazione del teorema di Legendre, l'area del triangolo sferico può essere calcolata con le formule della trigonometria piana, utilizzando gli elementi sferici noti (in quanto il teorema di Legendre fornisce un artificio per affrontare, con le formule della trigonometria piana, un triangolo da risolvere impiegando le formule della trigonometria sferica).

In aggiunta, occorre osservare che l'applicazione del teorema di Legendre non è necessaria, se i lati del triangolo non eccedono in lunghezza 15 km . Infatti l'eccesso sferico è dell'ordine di: $2,5 \cdot 10^{-6}\text{ rad} = 1,5^{\text{cc}}$, e la correzione da apportare ad ogni angolo (del triangolo sull'ellissoide) è $0,5^{\text{cc}}$, inferiore all'approssimazione con cui, in generale, sono effettuate le misure di angoli. Si dimostra così, per altra via, che i calcoli relativi alle figure geometriche, contenute nel campo topografico (seppure da considerare teoricamente sempre ellissoidiche), possono essere eseguiti impiegando gli algoritmi della geometria e trigonometria piana.

⁷ Le moderne tecniche di posizionamento GPS permettono di misurare triangoli e maglie poligonali (come i quadrilateri trilaterali) anche più grandi, ma fornendo questo sistema le componenti delle basi (oltreché le coordinate dei punti), rende ovviamente superfluo il calcolo dei triangoli sull'ellissoide. A riguardo, si noti poi che le stesse coordinate dei punti non hanno una precisione inferiore, poiché ormai sono praticamente sempre determinate rispetto a una rete di stazioni permanenti (in Italia, reti regionali o provinciali, oppure comunque reti ben gestite da privati), inquadrate nella Rete Dinamica Nazionale (RDN) che materializza il sistema di riferimento nazionale vigente ETRF2000 (epoca 2008.0)

DETERMINAZIONE DI PUNTI SULLA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO

1. Determinazione delle coordinate ellissoidiche con misure eseguite sulla superficie di riferimento

1.1 Reti geodetiche e topografiche in coordinate ellissoidiche

Dati un insieme di punti di inquadramento P_i sull'ellissoide (come illustra la fig. 1), congiunti a due a due da archi di geodetica, brevemente chiamate lati, così da formare triangoli ellissoidici (od altre figure poligonali), si suppone di aver eseguito un numero sufficiente di misure di angoli e di distanze (in pratica, il numero di misure eseguite eccede sempre il numero minimo necessario e così si deve eseguire una compensazione), in modo che, per misure diretta o per calcolo, siano noti le lunghezze di tutti i lati e tutti gli angoli fra i lati.

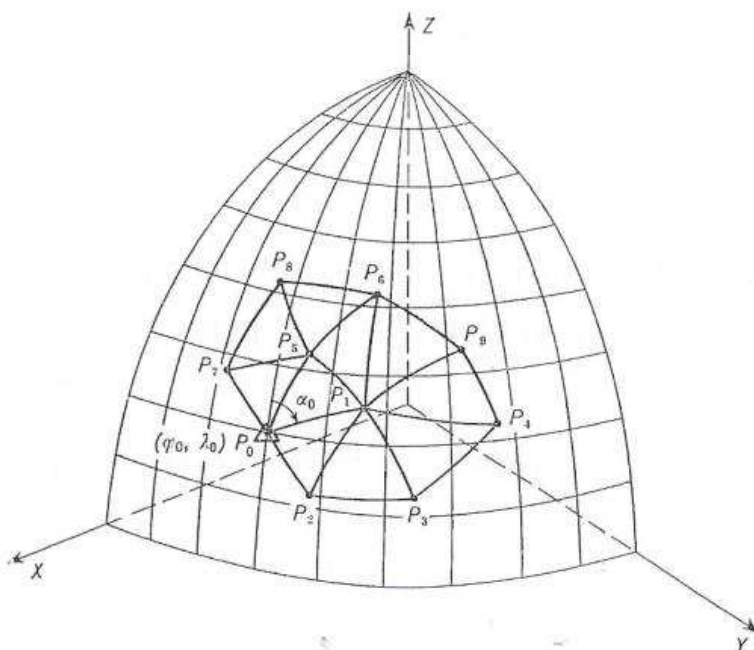


Fig. 1 – Rete di punti di inquadramento sull'ellissoide

Nel punto P_0 (detto centro di emanazione), si determinano, con misure astronomiche, la latitudine φ_0 e la longitudine λ_0 e l'azimut α_0 , di una geodetica, uscente da P_0 e passante per uno dei punti P_i (ovvero P_1 , nella figura soprastante), e si assumano tali misure come riferite all'ellissoide. In altre parole, si fa coincidere la verticale (cioè la normale al geoide) e la normale all'ellissoide, nel punto P_0 (cosicché nel punto P_0 l'ellissoide di rotazione sia tangente al geoide). Inoltre per orientare completamente l'ellissoide (che può ancora ruotare intorno alla normale), si assume l'azimut astronomico α_0 coincidente con l'azimut ellissoidico (imponendo così il parallelismo tra i due assi di rotazione del geoide e dell'ellissoide).

⁸ Come già per le trilaterazioni distanziometriche, anche per le moderne tecniche di posizionamento GPS, gli schemi di misura ottimali sono i quadrilateri trilaterali, cosicché questo sistema (benché capace di misurare anche le componenti delle basi) sia ben ridondante. Invece quando le reti GPS sono calcolate per singole basi (con il metodo differenziale) o per punti isolati (con la tecnica Precise Point Positioning), non si tratta più di reti nel senso classico del termine, fatta salva l'adozione di un particolare schema di intersezione che collega due stazioni od una sola con almeno quattro satelliti. D'altra parte, tutte le classificazioni sono solo utili e mai assolute (per cui, ad esempio, la lettura di un termometro si può descrivere come la misura di una lunghezza e di una rete, se collegata alla sua taratura).

Il problema fondamentale da risolvere per calcolare, con riferimento all'ellissoide, le coordinate curvilinee dei punti di inquadramento P_i , si può così enunciare: dato un punto O (di cui si conoscono le coordinate ellissoidiche φ_0 e λ_0), noti la lunghezza s dell'arco di geodetica, compreso fra O ed il punto P , e l'azimut α_0 di tale geodetica in O , calcolare le coordinate ellissoidiche φ e λ di P , nonché l'azimut α della stessa geodetica in P .

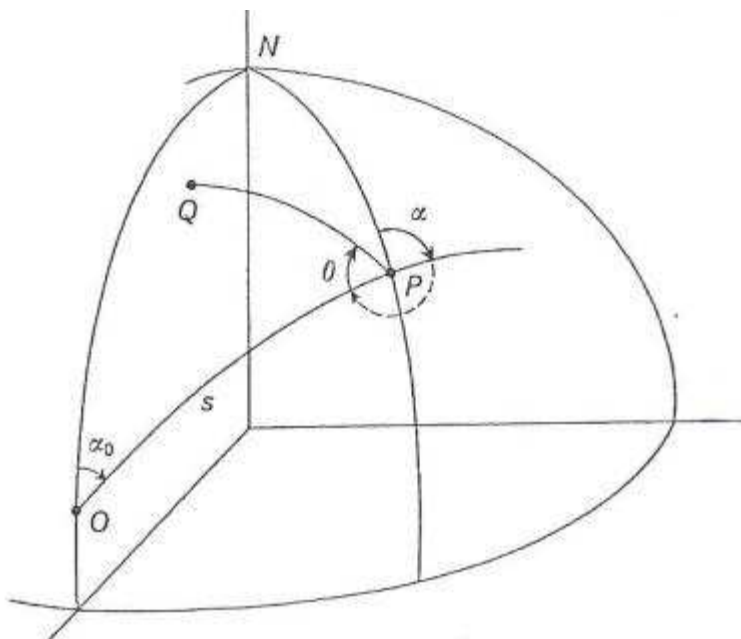


Fig. 2 – Determinazione degli azimut dei lati di una rete di inquadramento

- A riguardo occorre notare, come l'operazione di orientamento dell'ellissoide riguarda solo le reti di punti di inquadramento del primo ordine (ovvero le reti di punti rilevate quando, nella zona, non esiste alcun rilevamento geodetico precedente, qui descritta per motivi di chiarezza). Invece nel caso più comune, nella zona del rilevamento da eseguire, esistono già dei punti rilevati cui riferirsi (essendo sempre disponibile almeno un punto O di coordinate note, inserito nel rilievo, ed un azimut di partenza desunto da un altro punto O' , sempre di coordinate note).
- Il calcolo dell'azimut α della geodetica in P è richiesto, in generale, perché a partire dal punto P , si devono calcolare le coordinate ellissoidiche di un altro punto Q della rete (per cui è necessario conoscere l'azimut in P della geodetica PQ). Del resto, il calcolo di questo azimut si esegue (come mostra la figura 2), una volta noto α e calcolato l'azimut reciproco $\alpha + \pi$ (ovvero l'azimut in P della geodetica PO), aggiungendo l'angolo ϑ , supposto noto, fra le geodetiche PO e PQ .
- Alcune semplificazioni riguardano solo la maniera di determinare (con misure o calcoli relativi a figure geometriche ellissoidiche) le lunghezze di archi di geodetiche e gli angoli fra le geodetiche fra punti dell'ellissoide. Tuttavia noti questi valori, la determinazione delle posizioni dei punti (ovvero il calcolo delle coordinate curvilinee) si esegue tenendo, in debito conto, che le linee congiungenti i punti stessi sono geodetiche ellissoidiche. Negli sviluppi successivi, l'uso della relazione di Clairaut (caratteristica proprio degli archi di geodetica) fa sì che i lati della rete siano trattati come archi di geodetiche.

1.2 Trasporto delle coordinate ellissoidiche: problema diretto

Fissato l'azimut α_0 della geodetica, uscente da O (come illustra la fig. 3), le coordinate ellissoidiche: φ e λ , di un punto P sulla geodetica, e l'azimut α sono funzione solo della distanza: $s = OP$, ovvero: $\varphi = \varphi(s)$, $\lambda = \lambda(s)$ ed $\alpha = \alpha(s)$.

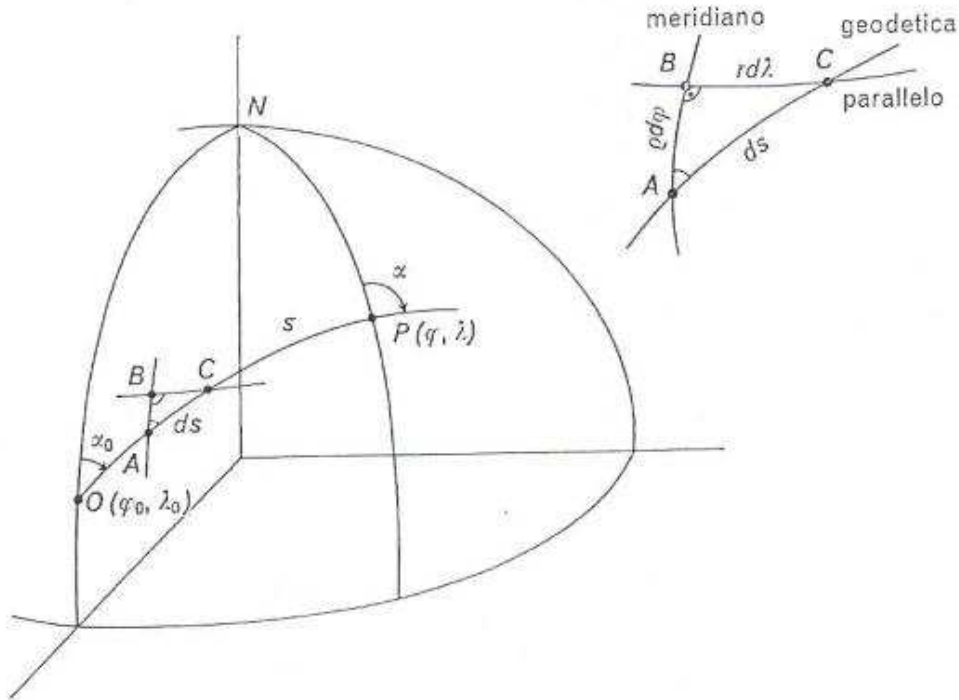


Fig. 3 – Trasporto delle coordinate ellissoidiche

Purtroppo queste funzioni non possono essere espresse in termini finiti ed occorre procedere ad un loro sviluppo in serie di Taylor:

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3\varphi}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{3!} + \dots$$

$$[\lambda = \lambda_0 + \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3\lambda}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{3!} + \dots$$

$$\alpha = \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3\alpha}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{3!} + \dots$$

Pertanto questo problema si riduce a determinare le espressioni delle derivate di questi sviluppi in serie, specificandone poi il valore per: $\varphi = \varphi_0$, $\lambda = \lambda_0$ ed $\alpha = \alpha_0$. A tal fine, si considera, in un punto A della geodetica OP , un elemento infinitesimo ds di geodetica ed i due elementi infinitesimi: $\rho d\varphi$ e $r d\lambda$ (di meridiano e parallelo), in modo da determinare un triangolo infinitesimo, retto in B , considerato piano, a meno di infinitesimi di ordine superiore, cosicché si abbia: $\rho d\varphi = ds \cos \alpha$ e $r d\lambda = ds \sin \alpha$.

Allora le derivate prime hanno espressioni e valori, come di seguito riportato:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos \alpha}{\rho} \quad \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0 = \frac{\cos \alpha_0}{\rho_0} \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin \alpha}{r} \quad \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)_0 = \frac{\sin \alpha_0}{r_0}$$

Invece l'espressione ed il valore per l'azimut sono dedotte dalla relazione di Clairaut: $r \sin \alpha = \text{cost}$, da cui:

$$\frac{dr}{ds} \sin \alpha + r \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} = 0$$

Dopodiché procedendo nelle derivate, come funzione di funzione, si ha: $\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{\cos \alpha}{\rho}$

e, tenuto conto delle espressioni: $r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$ e $\rho = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}}$, si ottiene:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\rho \sin \varphi \quad \text{da cui:} \quad \frac{dr}{ds} = -\sin \varphi \cos \alpha \quad \text{ed inoltre:}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\tan \alpha}{r} \frac{dr}{ds} = \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{r} \quad \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_0 = \frac{\sin \alpha_0 \cdot \sin \varphi_0}{r_0}$$

Per il calcolo delle derivate seconde, si procede in modo analogo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\cos \alpha}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho^2} \left(\rho \frac{d}{ds} (\cos \alpha) - \cos \alpha \frac{d\rho}{ds} \right) = \frac{1}{\rho^2} \left(-\rho \sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} - \cos \alpha \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} \right) = \\ &= -\frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin \varphi}{r\rho} - \frac{\cos^2 \alpha}{\rho^3} \frac{d\rho}{d\varphi} \end{aligned}$$

$$\text{essendo: } \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \varphi}{r} \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos \alpha}{\rho}$$

Allo stesso modo:

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin \alpha}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{d}{ds} (\sin \alpha) - \sin \alpha \frac{dr}{ds} \right) = \frac{1}{r^2} \left(r \cdot \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} - \sin \alpha \frac{dr}{ds} \right) = \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin \varphi}{r^2}$$

$$\text{essendo: } \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \varphi}{r} \quad \text{e} \quad \frac{dr}{ds} = -\frac{r}{\tan \alpha} \frac{d\alpha}{ds} = -\cos \alpha \sin \varphi$$

Per la derivata seconda di $\alpha(s)$, si ha:

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin \alpha \sin \varphi}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{d}{ds} (\sin \alpha \sin \varphi) - \sin \alpha \sin \varphi \frac{dr}{ds} \right) = \frac{\sin 2\alpha}{2r} \left(\frac{2 \sin^2 \varphi}{r} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \right)$$

dato: $\frac{dr}{ds} = -\cos \alpha \sin \varphi$ ed essendo:

$$\frac{d}{ds} (\sin \alpha \sin \varphi) = \sin \varphi \frac{d}{ds} (\sin \alpha) + \sin \alpha \frac{d}{ds} (\sin \varphi) = \sin \varphi \frac{\sin 2\alpha \sin \varphi}{2r} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{\cos \alpha}{\rho}$$

La determinazione delle altre derivate procede con facilità, ma con complessità crescente, cosicché lo sviluppo arrestato ai termini in s^3 , esplicitate anche le varie derivate di ρ rispetto a φ , ha espressione:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{s \cdot \cos \alpha_0}{\rho_0} - \frac{s^2 \sin \varphi_0}{2\rho_0} \left(\frac{\sin^2 \alpha_0}{N_0 \cos \varphi_0} + \frac{3e^2 \cos \varphi_0 \cdot \cos^2 \alpha_0}{\rho_0 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)} \right) - \frac{s^3 \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0}{6\rho_0^3} (1 + 3 \tan^2 \varphi_0)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{s \cdot \sin \alpha_0}{N \cos \varphi_0} + \frac{s^2 \sin \varphi_0 \sin 2\alpha_0}{2N_0^2 \cos^2 \varphi_0} + \frac{s^3}{6N_0^2 \cos \varphi_0} \left(\frac{\sin 2\alpha_0 \cos \alpha_0}{\rho_0} + \frac{2 \tan^2 \varphi_0 \sin 3\alpha_0}{N_0} \right)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{s \cdot \tan \varphi_0 \sin \alpha_0}{N_0} + \frac{s^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{2 N_0} \left(\frac{1}{\rho_0} + 2 \frac{\tan^2 \varphi_0}{N_0} \right)$$

A riguardo, occorre notare che le coordinate ellissoidiche sono calcolate con l'approssimazione del millesimo di secondo sessagesimale ($5 \cdot 10^{-9} \text{ rad}$), in quanto a tale quantità corrisponde per la coordinata φ uno spostamento del punto, lungo il meridiano, di 3 cm e per la coordinata λ uno spostamento, lungo il parallelo, inferiore (tranne all'equatore), in dipendenza del valore del raggio r del parallelo. Ne deriva che il termine in s^2 raggiunge il valore di $0.001''$, per una distanza di 10 km , cosicché si deve tenerne conto per archi di geodetica compresi fra 10 e 60 km (a quest'ultima distanza, il termine in s^4 diventa dell'ordine di $5 \cdot 10^{-9} \text{ rad}$, mentre il termine in s^5 può essere trascurato anche per distanze di un centinaio di chilometri). Invece non è necessaria la stessa precisione per il trasporto dell'azimut, dove l'approssimazione attesa è di un ordine di grandezza pari ad una frazione dello scarto quadratico medio che caratterizza la misura diretta o la determinazione indiretta di un angolo e, tenuto conto che tale sqm è nell'ordine di $0.05''$, l'approssimazione di $0.1''$ (ovvero $5 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$) è sufficiente. Infatti il trasporto dell'azimut, arrestato al termine in s^2 , garantisce quest'approssimazione sino ad una distanza di 50 km , in analogia con gli altri sviluppi riportati. Inoltre si può dimostrare che, con la stessa approssimazione, si ha:

$$\alpha = \alpha_0 + (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_m \quad \text{con: } \varphi_m = \frac{\varphi + \varphi_0}{2}$$

La differenza: $C_m = \alpha - \alpha_0 = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_m$, è chiamata convergenza dei meridiani relativa all'arco di geodetica OP .

1.3 Coordinate geodetiche polari e rettangolari

Le coordinate ellissoidiche (φ, λ) e le coordinate geocentriche definiscono la posizione assoluta di un punto P sull'ellissoide, mentre una posizione relativa è definita da coordinate locali, quali le coordinate geodetiche polari (s, α) o le coordinate geodetiche rettangolari (X, Y) , come illustra la fig. 4.

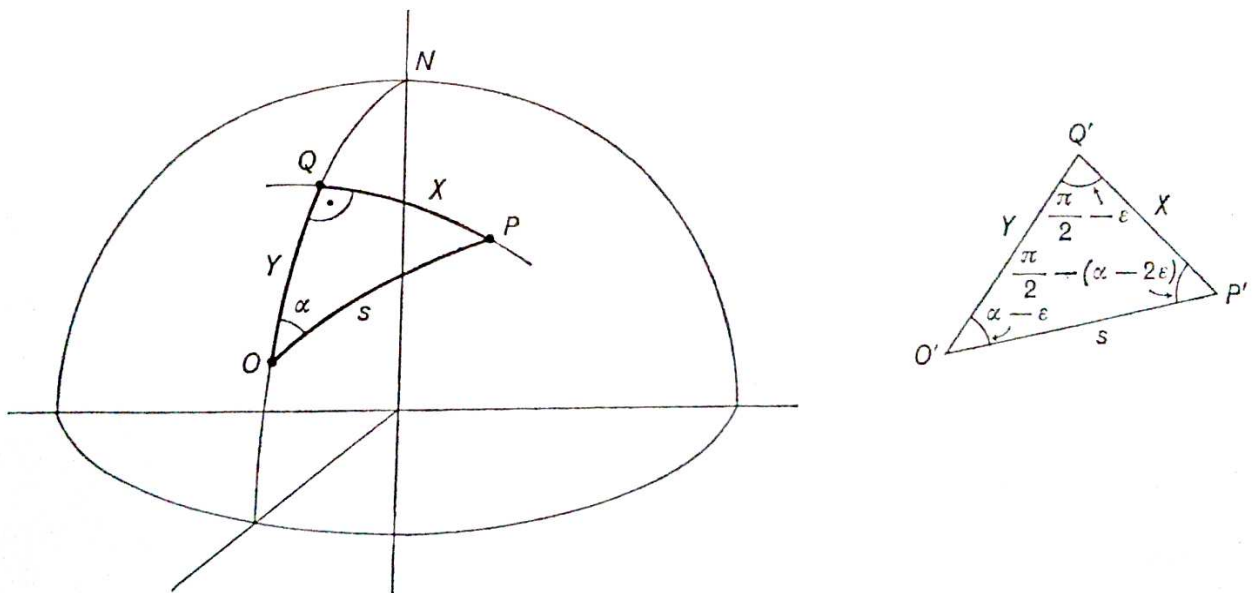


Fig. 4 – Coordinate geodetiche polari e rettangolari

La geodetica passante per P e normale al meridiano per O interseca quest'ultimo in un punto Q la cui coordinata geodetica X è pari alla lunghezza dell'arco PQ e la cui coordinata Y è uguale alla lunghezza dell'arco di meridiano OQ .

Applicando il teorema di Legendre, si trovano le relazioni, valide entro il campo geodetico (cioè valide per tutte le applicazioni), che permettono di calcolare X e Y , noti s ed α e viceversa. Infatti indicando con ε un terzo dell'eccesso sferico, gli angoli del triangolo piano $O'P'Q'$ (i cui lati hanno la stessa lunghezza del triangolo sferico OPQ) sono: $O' = \alpha - \varepsilon$, $Q' = \pi/2 - \varepsilon$ e $P' = \pi/2 - (\alpha - 2\varepsilon)$, per cui si ha, per il teorema dei seni:

$$\frac{X}{\sin(\alpha - \varepsilon)} = \frac{Y}{\cos(\alpha - 2\varepsilon)} = \frac{s}{\cos \varepsilon}$$

L'eccesso sferico è una quantità piccola del secondo ordine per cui, dato che, sviluppando in serie, $\cos \varepsilon = 1 - \varepsilon^2/2 + \dots$, si può porre: $\cos \varepsilon = 1$, conservando la stessa approssimazione del teorema di Legendre, da cui risulta: $X = s \sin(\alpha - \varepsilon)$ e $Y = s \cos(\alpha - 2\varepsilon)$. Queste relazioni permettono il calcolo di X e Y , noti s ed α , dato che, a meno di quantità del quarto ordine, l'eccesso sferico risulta:

$$3\varepsilon = \frac{s^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\rho N}$$

Per ottenere le formule inverse, si sviluppano i secondi membri delle espressioni dirette di X e Y , ponendo $\cos \varepsilon = 1$ e, a meno di termini in ε^3 (ovvero del sesto ordine), $\sin \varepsilon = \varepsilon$, cosicché:

$$X = s \sin \alpha \cos \varepsilon - s \cos \alpha \sin \varepsilon = s \sin \alpha - \varepsilon s \cos \alpha$$

$$Y = s \cos \alpha \cos 2\varepsilon + s \sin \alpha \sin 2\varepsilon = s \cos \alpha + 2\varepsilon s \sin \alpha$$

A meno di termini in ε^2 , ricavando $s \cos \alpha$ dalla seconda espressione e sostituendolo nella prima, ed analogamente, ricavando $s \sin \alpha$ dalla prima espressione e sostituendolo nella seconda, si ha:

$$X = s \sin \alpha - \varepsilon(Y - 2\varepsilon s \sin \alpha) = s \sin \alpha - \varepsilon Y$$

$$s \sin \alpha = X + \varepsilon Y$$

$$Y = s \cos \alpha + 2\varepsilon(X + \varepsilon s \cos \alpha) = s \cos \alpha + 2\varepsilon X$$

$$s \cos \alpha = Y - 2\varepsilon X$$

da cui:

$$s = \sqrt{(X + \varepsilon Y)^2 + (Y - 2\varepsilon X)^2}$$

e

$$\tan \alpha = (X + \varepsilon Y)/(Y - 2\varepsilon X)$$

Per la determinazione del quadrante di α , si possono seguire le solite regole, valide per la determinazione di un angolo di direzione, mentre in questo caso, l'eccesso sferico si calcola con la formula:

$$3\varepsilon = XY/2\rho N$$

1.4 Trasporto delle coordinate ellissoidiche: problema inverso

Il problema inverso del trasporto delle coordinate ellissoidiche consiste nel determinare le coordinate geodetiche polari del punto P_2 , rispetto al punto P_1 , note che siano φ_1, λ_1 e φ_2, λ_2 (come mostrato in fig. 5). Per ragioni di brevità, le formule sono limitate ai termini di secondo ordine, risultando così valide per punti la cui distanza non superi a: $10 \div 15 \text{ km}$.

A riguardo, sia P_3 il punto in cui si incontrano il meridiano per P_1 e la geodetica passante per P_2 (normale al meridiano per P_1), il problema è risolto, determinando la lunghezza X dell'arco P_2P_3 e la lunghezza Y

dell'arco P_1P_3 (ovvero le coordinate geodetiche rettangolari di P_2 , rispetto a P_1), perché con le sopraccitate formule inverse, calcolato l'eccesso sferico, si possono calcolare la distanza s e l'azimut α .

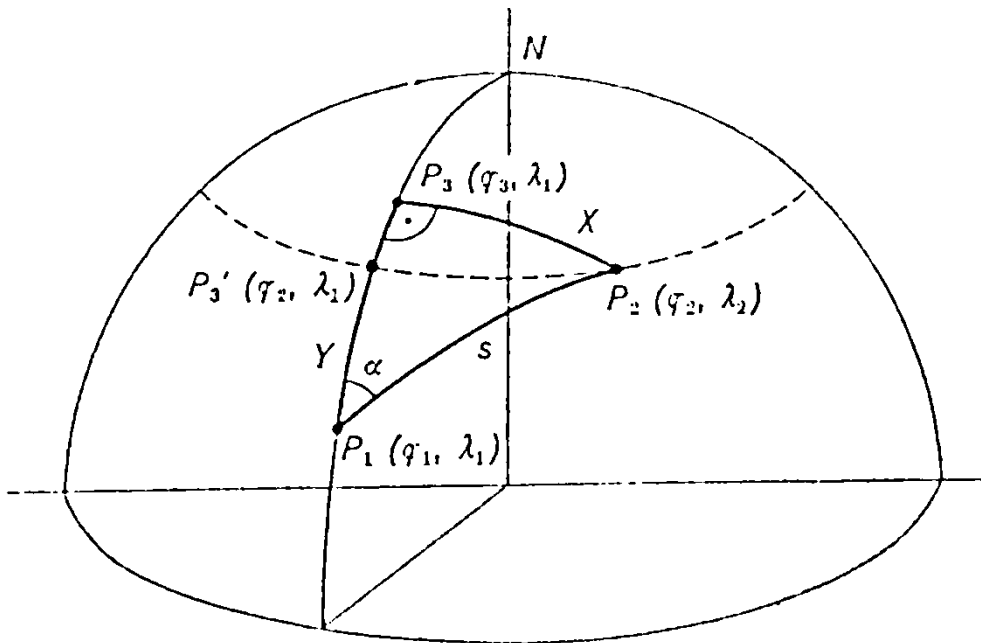


Fig. 5 – Deduzione delle coordinate geodetiche delle coordinate geografiche

La latitudine φ_3 del punto P_3 è ovviamente diversa dalla latitudine φ_2 del punto P_2 , perché il parallelo per P_2 interseca il meridiano in un altro punto P_3' di coordinate geografiche φ_2 e λ_1 . Per calcolare la latitudine φ_3 del punto P_3 , si può applicare l'espressione in φ , per il problema diretto, che permette di trasportare la latitudine da P_3 a P_2 lungo un arco di geodetica X , con un azimut: $\alpha_0 = \pi/2$, cosicché:

$$\varphi_2 = \varphi_3 - \frac{X^2 \sin \varphi_3}{2\rho_3 N_3 \cos \varphi_3} \qquad \varphi_3 - \varphi_2 = -\frac{X^2 \tan \varphi_3}{2\rho_3 N_3}$$

dove ρ_3 e N_3 sono il raggio di curvatura del meridiano e la gran normale, calcolate nel punto P_3 . Tuttavia la differenza $\varphi_3 - \varphi_2$ è piccola (cioè del secondo ordine) e così, ponendo al secondo membro φ_2 (nota) in luogo di φ_3 (incognita) e calcolando ρ_2 e N_2 , si commettono errori dell'ottavo ordine:

$$\varphi_3 - \varphi_2 = \frac{X^2 \tan \varphi_2}{2\rho_2 N_2}$$

Dopodiché eseguendo il trasporto della longitudine fra gli stessi due punti P_2 e P_3 , tenuto conto che $\lambda_3 = \lambda_1$, si ha:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{X}{N_3 \cos \varphi_3} - \frac{X^3 \tan^2 \varphi_3}{3N_3^3 \cos \varphi_3} + \dots$$

per cui, a meno di termini del terzo ordine e sostituendo φ_3 con φ_2 , si ottiene il valore della coordinata geodetica X :

$$X = (\lambda_2 - \lambda_1)N_2 \cos \varphi_2 \quad \text{e} \quad \varphi_3 = \varphi_2 + \frac{X^2 \tan \varphi_2}{2\rho_2 N_2} = \varphi_2 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 N_2 \sin 2\varphi_2}{4\rho_2}$$

Una volta nota la latitudine φ_3 , la lunghezza Y dell'arco di meridiano si ricava a partire dall'espressione:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{s \cdot \cos \alpha_0}{\rho_0} - \frac{s^2 \sin \varphi_0}{2\rho_0} \left(\frac{\sin^2 \alpha_0}{N_0 \cos \varphi_0} + \frac{3e^2 \cos \varphi_0 \cdot \cos^2 \alpha_0}{\rho_0 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)} \right)$$

determinando il trasporto della latitudine da P_1 a P_3 , con $s = Y$ ed $\alpha_0 = 0$, cosicch :

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \frac{Y}{\rho_1} - \frac{Y^2 \sin \varphi_1 3e^2 \cos \varphi_1}{2\rho_1^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} \quad \text{e} \quad Y = \rho_1 (\varphi_3 - \varphi_1) + \frac{Y^2 \sin \varphi_1 3e^2 \cos \varphi_1}{2\rho_1^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)}$$

Infine poich , nel secondo termine, invece di Y , si pu  porre: $\rho_1 (\varphi_3 - \varphi_1)$, commettendo un errore di ordine superiore al secondo, si ha:

$$Y = \rho_1 (\varphi_3 - \varphi_1) \left(1 + \frac{3 \sin 2\varphi_1 e^2}{4(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} (\varphi_3 - \varphi_1) \right)$$

Nello stesso ordine di approssimazione, il valore della coordinata geodetica X pu  essere calcolato con la semplice formula:

$$Y = \varphi_m (\varphi_3 - \varphi_1) \quad \text{dove:} \quad \varphi_m = (\varphi_1 + \varphi_3)/2$$

  la media aritmetica delle due latitudini.

2. Determinazione delle coordinate geografiche mediante osservazioni astronomiche ⁹

⁹ Questo paragrafo sulla determinazione delle coordinate geografiche mediante osservazioni astronomiche ed il successivo sulla deviazione della verticale e la determinazione del geode astro-geodetico, sono certamente superati, dopo l'avvento della geodesia dei satelliti. Tuttavia esso costituisce una parte importante del libro di Giuseppe Inghilleri,   metodologicamente corretto e presenta una documentazione storica interessante, circa la misura del tempo, le determinazioni astronomiche ed alcuni tipi di misure geodetiche.

2.1 Generalità sull'Astronomia geodetica

L'Astronomia geodetica è una disciplina di fondamentale importanza per i naviganti che, su una nave, un aereo od un'astronave, possono determinare la posizione del mobile ¹⁰, mediante misure di angoli eseguite su astri. Inoltre la conoscenza dei procedimenti per la determinazione astronomica della posizione di un punto o dell'azimut di una direzione è altresì utile al topografo (che opera in zone prive di rilevamenti), per l'orientamento e la localizzazione di reti di punti di inquadramento, come pure per la determinazione indipendente di posizioni di punti, in relazione a rilievi speditivi. Infine gli argomenti trattati hanno interesse anche per comprendere appieno la differenza fra i due metodi fondamentali per la determinazione della posizione di punti sulla superficie di riferimento, il primo basato su misure di angoli e distanze, fra punti della superficie terrestre, ed il secondo basato sulla misura di angoli, relativi ad astri e alla conoscenza del tempo locale in un determinato punto sulla Terra.

Infatti con misure di angoli e distanze (e di calcoli, eseguiti con riferimento all'ellissoide), si può determinare la posizione di un punto mediante le coordinate curvilinee, o le coordinate ellissoidiche (latitudine e longitudine) che danno, con riferimento al piano dell'equatore ed al piano del meridiano fondamentale, la direzione della normale all'ellissoide, in corrispondenza del punto rilevato. Invece le osservazioni astronomiche conducono alla determinazione della latitudine e longitudine astronomiche del punto in cui si sono eseguite osservazioni di astri, ovvero dei due parametri che definiscono la direzione della verticale, nel punto rilevato (dato che gli assi degli strumenti di misura di angoli sono orientati rispetto alla verticale, cioè alla normale al geoide e non rispetto alla normale all'ellissoide). In generale, le coordinate astronomiche e quelle ellissoidiche sono leggermente diverse, a causa della differenza fra la forma del geoide e quella dell'ellissoide, e del particolare orientamento, assunto per l'ellissoide, e la loro differenza è detta deviazione della verticale.

2.2 Sfera celeste

Il cielo ha l'aspetto di una sfera enormemente grande (chiamata sfera celeste), sulla quale si vedono proiettati gli astri (di cui si osservano le posizioni apparenti). Rispetto al raggio di questa sfera, la Terra si può considerare puntiforme e posta nel suo centro (come illustra la fig. 6), in questo modo, tutti i punti della superficie terrestre coincidono (o meglio, si fa sì che si possano reputare coincidenti) nel centro della sfera. Ne deriva che ogni punto è individuato solo dalla direzione della verticale passante per se stesso che interseca la sfera celeste, in un punto, chiamato zenit dell'osservatore (mentre il piano normale, alla direzione della verticale, è il piano orizzontale dell'osservatore).

Le posizioni apparenti relative delle stelle non cambiano, mentre quelle dei componenti del sistema solare, Sole, Luna, pianeti e satelliti cambiano di piccole quantità da un giorno all'altro. Per un osservatore terrestre, la sfera celeste, ovvero le posizioni apparenti delle stelle, risulta dotata di un movimento di rotazione, da est verso ovest, intorno ad un asse, chiamato asse del mondo e coincidente con l'asse di rotazione terrestre. I punti polari, ovvero il polo nord ed il polo sud, definiscono la direzione dell'asse di rotazione terrestre, sulla sfera celeste. I piani che contengono l'asse del mondo determinano sulla sfera celeste dei meridiani, mentre i piani ortogonali a tale asse determinano dei paralleli. L'equatore celeste è il cerchio massimo, definito dal piano ortogonale all'asse del mondo ed è passante per il centro della sfera.

¹⁰ Le moderne tecniche di posizionamento GPS costruiscono una validissima alternativa alle misure di angoli, su astri, in quanto dalle coordinate cartesiane geocentriche è agevole passare tanto alle coordinate polari geocentriche, quanto alle coordinate ellissoidiche.

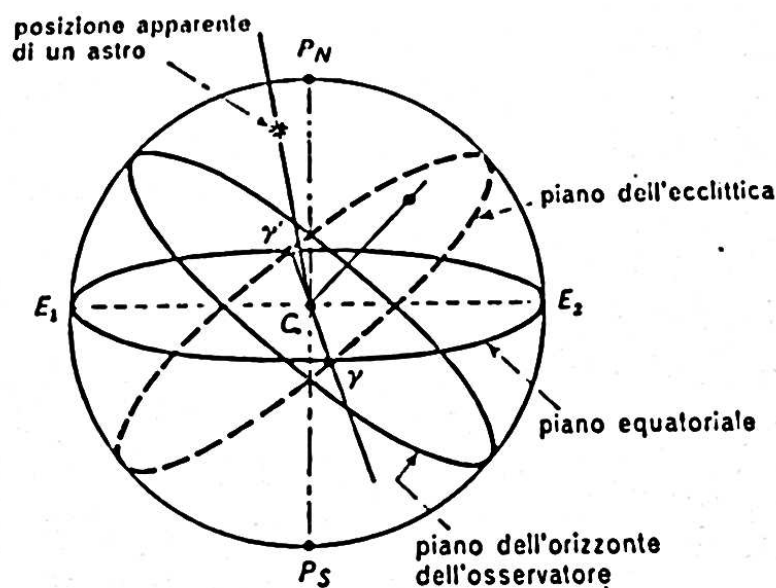


Fig. 6 – Sfera celeste

L'eclittica è il cerchio massimo nel quale si svolge il cammino apparente del Sole sulla sfera celeste. Il piano dell'eclittica è inclinato di circa $23^{\circ}27'$ sul piano dell'equatore, dato che l'asse di rotazione terrestre è inclinato di tale angolo, rispetto al piano dell'orbita della Terra intorno al Sole. L'eclittica interseca l'equatore in due punti, chiamati punti equinoziali, ed il Sole si trova, nel primo punto equinoziale, all'equinozio di primavera, e nel secondo, all'equinozio d'autunno.

Questi punti si spostano, lungo l'eclittica, di una piccola quantità ogni anno, perché l'asse terrestre, pur rimanendo sempre inclinato rispetto al piano dell'eclittica descrive, in 26.000 anni, un cono di circa: $2 \times 23^{\circ}27' \cong 47^{\circ}$ (chiamato precessione degli equinozi). Oltre a questo movimento, l'asse terrestre descrive, nel periodo di circa diciannove anni, un altro cono, di apertura molto più piccola (chiamato nutazione), che produce spostamenti dei punti equinoziali molto più piccoli di quelli dovuti alla precessione (di cui si tiene conto solo in determinazioni molto precise). A parte questi movimenti, il primo punto equinoziale si considera una direzione fissa, sulla sfera celeste, e partecipa della rotazione diurna della sfera.

La sfera celeste è considerata di raggio unitario e, dato che i problemi, relativi ad essa, implicano solo direzioni, si possono utilizzare formule di trigonometria sferica, cosicché ogni punto, sulla sfera celeste, individua una direzione, con il centro della sfera stessa e viceversa ogni direzione, uscente dal centro, individua un punto (di conseguenza, le due parole, trattando di problemi sulla sfera, sono sinonimi).

2.3. Sistemi di riferimento

Ogni direzione, sia essa lo zenit di un osservatore, un punto equinoziale o la posizione apparente di un astro, è individuata sulla sfera da due angoli (ovvero da due coordinate sferiche), una volta che sia stato definito il sistema di riferimento. A seconda dei piani fondamentali scelti come riferimento, si hanno diversi sistemi di coordinate sferiche. Infatti i sistemi di riferimento si possono dividere in due categorie: quelli fissi, rispetto alle posizioni apparenti delle stelle, utili agli astronomi per determinare e studiare i movimenti relativi degli astri sulla sfera celeste (come le coordinate equatoriali e le coordinate eclittiche), e quelli fissi, rispetto

alla Terra, in particolare, utili per determinare le coordinate geografiche astronomiche, le coordinate equatoriali locali e le coordinate altazimutali.

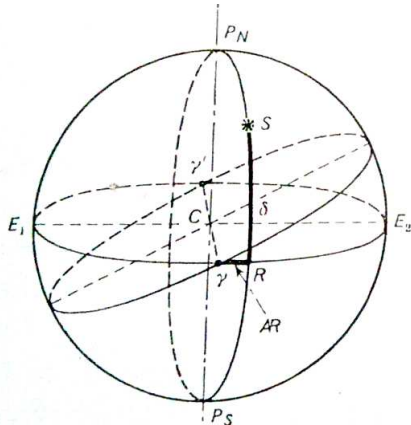


Fig. 7 – Coordinate equatoriali di un astro

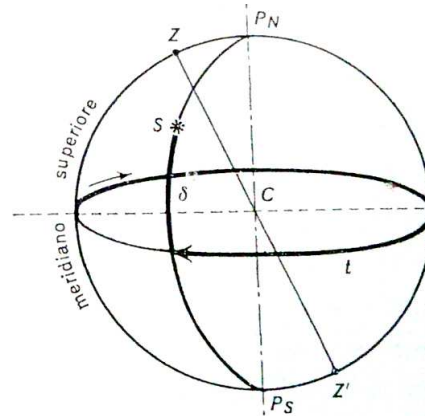


Fig. 8 – Coordinate equatoriali locali di un astro

- Le coordinate equatoriali (fig. 7) definiscono la posizione di un astro S , considerando il meridiano che lo contiene (chiamato anche cerchio di declinazione) e l'equatore celeste. Il meridiano per S interseca l'equatore in un punto R : una coordinata è l'ascensione retta AR , pari all'angolo fra il primo punto equinoziale γ ed il punto R , l'altra è la declinazione δ , ovvero l'angolo fra l'astro S ed il punto R . L'ascensione retta varia fra 0 e 360° e si conta positivamente, a partire dal punto γ verso est, mentre la declinazione ha valori compresi fra 0 e $\pm 90^\circ$, computando a partire dall'equatore valori positivi, per l'emisfero nord, e valori negativi, per l'emisfero sud. Si può anche dire che l'ascensione retta è l'angolo fra il piano meridiano per γ e quello per S , come pure che la declinazione è l'angolo formato dalla direzione dell'astro con il piano equatoriale (il complemento della declinazione: $p = 90^\circ - \delta$, è chiamata distanza polare). Le coordinate equatoriali degli astri, a causa della precessione, della nutazione e del moto di traslazione del sistema solare, verso la costellazione di Ercole, subiscono lentissime variazioni. Pertanto le Effemeridi, cioè le tavole numeriche che contengono le coordinate equatoriali degli astri sono definite e pubblicate ogni anno, ed i valori relativi ad un determinato istante sono determinati tenendo conto di queste variazioni. Le coordinate sono riportate, per istanti stabiliti del tempo universale TU , con un intervallo di dieci giorni per le stelle, e con intervallo minore per il Sole e la Luna, dato che per questi astri gli angoli: AR e δ , variano sensibilmente nel giro di un giorno. I valori, ad un istante qualsiasi del tempo universale, si ricavano, a seconda dei casi, con interpolazione lineare o tenendo anche conto delle differenze seconde.
- Le coordinate eclittiche sono definite in maniera analoga, ma con riferimento all'eclittica invece che all'equatore.
- Le coordinate equatoriali locali (fig. 8) hanno, come piani di riferimento, il piano equatoriale, come nel precedente sistema, ed il piano meridiano di un punto P della superficie terrestre la cui verticale è individuata dallo zenit Z (la direzione opposta Z' è chiamata nadir). La semicirconferenza, tra i due poli celesti: P_N e P_S , che contiene lo zenit del punto, è chiamata meridiano superiore (l'altra che contiene il nadir meridiano inferiore). Le coordinate di un astro sono la declinazione, definita come nel sistema

precedente, e l'angolo orario t , ovvero l'angolo formato dal piano meridiano contenente l'astro ed il meridiano superiore del punto (l'angolo orario si computa a partire dal meridiano superiore, in senso est-ovest, varia fra 0 a 360° , e si può esprimere anche in ore, minuti e secondi, secondo le equivalenze: $1^h = 15^\circ$, $1^m = 15'$, $1^s = 15''$). Il piano meridiano corrispondente a Greenwich è chiamato primo meridiano e l'angolo orario è indicato con la lettera t , se riferito al meridiano di un qualsiasi punto, e con la lettera T , se è riferito al primo meridiano.

- Le coordinate altazimutali sono riferite alla direzione della verticale, in un punto P della superficie terrestre. Allora il piano, ad essa normale, è il piano dell'orizzonte astronomico locale (fig. 9). L'azimut a , di un astro, è l'angolo compreso fra 0 e 360° che il piano verticale, contenente l'astro S , forma con il piano meridiano di P (contato a partire dalla direzione nord, in senso orario). La definizione è analoga a quella dell'azimut di una sezione normale (assimilabile a quello di una geodetica), uscente dal punto P . L'altra coordinata è la distanza zenitale z (od angolo zenitale), definita come per i punti terrestri, come l'angolo che la direzione congiungente P con l'astro forma con la verticale per P (il complemento della distanza zenitale è l'angolo d'altezza: $\alpha = 90^\circ - z$). Si chiamano brevemente verticali i cerchi massimi passanti per lo zenit e primo verticale il piano verticale normale al meridiano.
- Le coordinate geografiche astronomiche, di un punto della superficie terrestre, definiscono un sistema, sulla sfera celeste, che ha l'equatore celeste ed il primo meridiano, come piani fondamentali. La latitudine φ è l'angolo che la direzione dello zenit forma con il piano equatoriale, computato fra 0 e 90° , a partire dall'equatore, positivamente per i punti dell'emisfero nord e negativamente per quelli dell'emisfero sud. La longitudine λ è l'angolo fra il meridiano per il punto ed il primo meridiano (di Greenwich), ha valori compresi fra 0 e 180° ed è computata a partire dal primo meridiano, positiva verso est e negativa verso ovest.

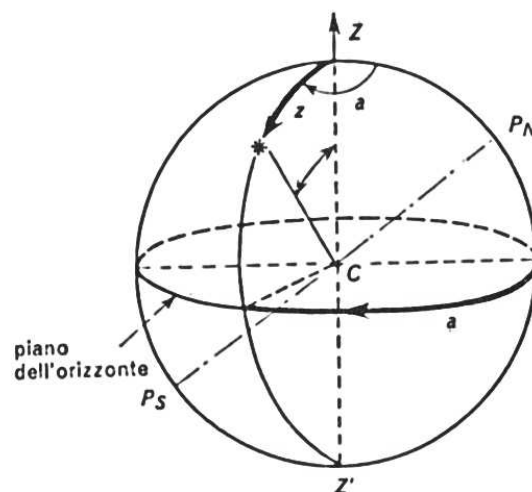


Fig. 9 – Coordinate altazimutali di un astro

2.4 Tempo sidereo e tempo solare

Si chiama tempo sidereo locale (TSL), di un punto P della superficie terrestre, rappresentato dallo zenit Z , l'angolo orario del punto γ , valutato con riferimento al meridiano superiore di P (fig. 10) ed il tempo

sidereo, riferito al primo meridiano (di Greenwich), è indicato con TSG . Il punto γ non è osservabile, ma si può dedurre dalla descrizione dei sistemi di riferimento: $TSL = t_* + AR_*$, dove t_* ed AR_* sono l'angolo orario (rispetto al meridiano per P) e l'ascensione retta di un astro qualsiasi. In alcune situazioni del punto γ e dell'astro, la somma: $t_* + AR_*$, eccede 24^h , e così si ha: $TSL = AR_* - (24^h - t_*) = t_* + AR_* - 24^h$ (ad esempio, come nel caso mostrato dalla figura 10 b). L'intervallo, praticamente costante, fra due passaggi dal punto γ (o di una stella), al meridiano superiore di un punto P , si chiama giorno sidereo.

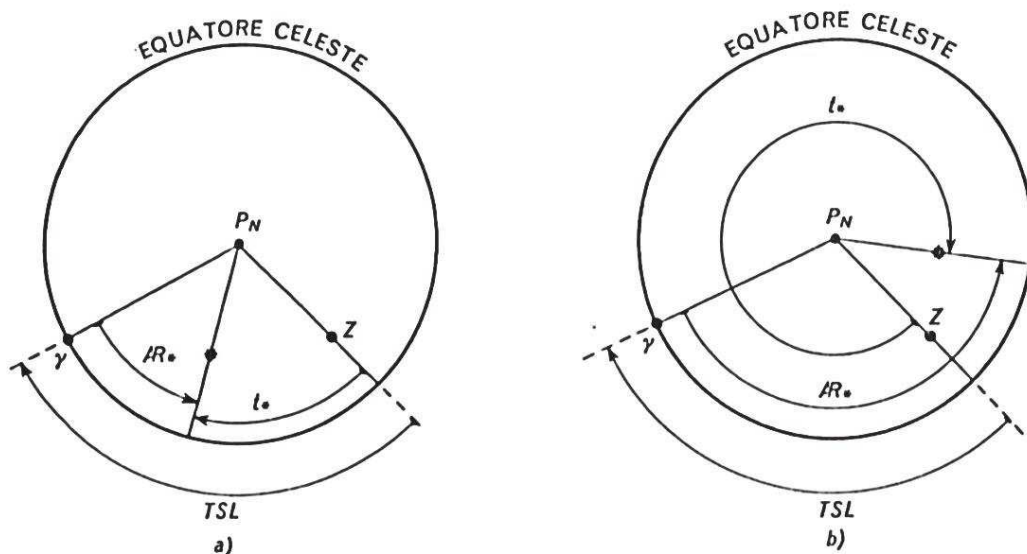


Fig. 10 – Tempo sidereo locale (TSL)

Tuttavia più conveniente è l'uso del tempo solare, dato che le azioni dell'uomo si ricollegano alla posizione del Sole. Per il tempo solare, varrebbero le stesse considerazioni fatte per il tempo sidereo (facendo assumere al Sole il ruolo del punto γ), se non si dovesse tenere conto che il Sole non ha un moto apparente uniforme. Allora si considera un Sole fittizio, chiamato Sole medio, il quale partendo dal punto γ , all'istante dell'equinozio di primavera si muove sull'equatore celeste (anziché sull'eclittica), con moto uniforme, impiegando lo stesso tempo (chiamato anno tropico) che il Sole vero impiega a ritornare allo stesso punto γ . Poiché l'ascensione retta del Sole medio varia in modo uniforme, il giorno medio ha durata costante. Nell'intervallo di tempo che trascorre fra due passaggi del Sole al punto γ , quest'ultimo compie 366,2422 rivoluzioni diurne (o giorni siderali), ma l'ascensione retta del Sole varia di 360° , in senso contrario, per il moto apparente del Sole sull'eclittica, cosicché il Sole compie 365,2422 rivoluzioni (apparenti attorno alla Terra), nello stesso intervallo, ed il giorno sidereo è $3^m 55^s.91$ più breve del giorno medio. Si chiama tempo medio (solare) locale (TML) l'angolo che il cerchio di declinazione del Sole medio forma con il meridiano inferiore dell'osservatore. Pertanto il tempo medio (solare) locale è uguale all'angolo orario del Sole medio diminuito od aumentato di dodici ore (il tempo medio (solare) locale di Greenwich è chiamato Tempo Universale (TU) ed a questo si riferiscono tutte le indicazioni fornite dalle Effemeridi).

La longitudine di un punto è uguale alla differenza, in un medesimo istante, fra il tempo medio (solare) locale e il tempo universale: $\lambda = TML - TU$, od in termini di tempo sidereo (come mostra la fig. 11):

$\lambda = TSL - TSG$. Per convertire un istante del tempo sidereo nel corrispondente istante del tempo medio (solare) locale (o viceversa), bisogna conoscere il tempo medio (solare) locale, corrispondente ad un determinato istante del tempo sidereo, e tener conto della differente lunghezza del giorno sidereo e di quello medio (solare) locale. Il calcolo può essere effettuato, perché le Effemeridi contengono una tavola che, per ogni giorno dell'anno, dà il tempo sidereo di Greenwich (TSG), alle ore 0 del tempo universale (TU), e viceversa il tempo universale (TU), alle ore 0 del tempo sidereo di Greenwich (TSG).

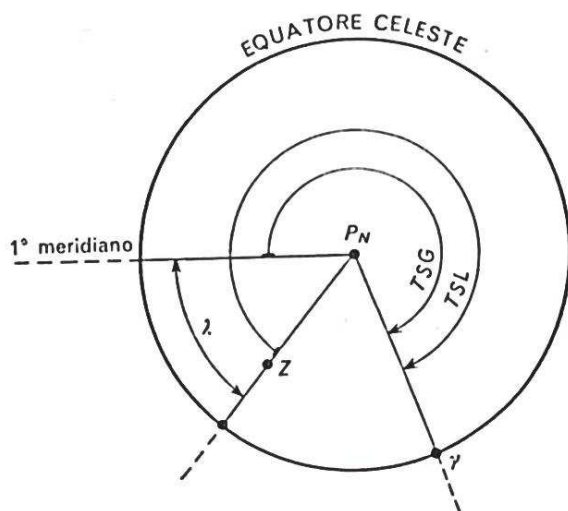


Fig. 11 – La longitudine di un punto come differenza di tempi siderali

L'angolo ε , fra il cerchio di declinazione del Sole medio e quello del Sole vero, vale al massimo: $4^{\circ}15' = 17^m$, è chiamato equazione del tempo (mentre dovrebbe essere chiamato, più propriamente, correzione del tempo) ed è dato dalle Effemeridi, in funzione del tempo universale (TU). In altre parole, l'equazione del tempo è la correzione da apportare al tempo medio (solare) locale (TML), per avere l'ora vera solare (TVL) e viceversa: $TVL = TML + \varepsilon$.

2.5 Conservazione del tempo

Gli orologi possono funzionare secondo il tempo medio (solare) locale o secondo il tempo sidereo e, per poter usare le indicazioni di un orologio, occorre conoscere lo stato assoluto, cioè la correzione da apportare all'ora segnata, per ottenere il tempo (medio o sidereo), relativo ad un determinato meridiano (lo stato assoluto di un orologio, rispetto al meridiano di Greenwich, è indicato con K_{rm} o K_{rs} , a seconda che si tratti di un orologio a tempo medio od a tempo sidereo). Il tempo tempo universale è disponibile in qualsiasi punto della Terra, perché parecchie potenti stazioni radio trasmettono segnali che individuano istanti prestabiliti del tempo medio (solare) locale di Greenwich (o tempo universale), dando così mezzo di determinare lo stato assoluto di un orologio.

Ripetendo ad intervalli di tempo la determinazione dello stato assoluto di un orologio, si vedrebbe come, a causa delle imperfezioni di funzionamento, lo stato vari. La variazione giornaliera dello stato assoluto si chiama andamento diurno dell'orologio e si indica con K . In questo modo, per avere il tempo universale, ad un qualsiasi istante, occorre un buon orologio che conservi bene il tempo fra due confronti successivi, sui

segnali radio. Per le operazioni in campagna, sono necessari orologi portatili che possono essere a bilanciere od a quarzo (questi ultimi sono usati sempre più comunemente, per la notevole riduzione di peso ed ingombro). La precisione necessaria, nella determinazione di tempo delle operazioni di campagna, è dell'ordine di 1 o 2 decimi di secondo di tempo.

La determinazione dello stato assoluto degli orologi siderali non è immediata, come quella di un orologio a tempo medio, perché occorre tener conto che i segnali radio si riferiscono al tempo universale e che il secondo sidereo è più breve di quello solare medio. In generale, nelle osservazioni astronomiche, si deve determinare il tempo in cui un determinato fenomeno avviene, come ad esempio, la collimazione di un astro con il teodolite (chiamato l'istante dell'appulso). A questo scopo, è molto utile un cronometro, perché si avvia la sua lancetta, all'istante del fenomeno, indi si guarda l'orologio e si ferma la lancetta, quando la lancetta dei secondi dell'orologio segna un numero esatto di decine di secondi (od un minuto esatto), detraendo poi da questa il numero di secondi, indicati dal cronometro, si ha l'istante dell'appulso. Per determinare l'istante dell'osservazione, con maggior precisione, si possono usare cronografi che tuttavia non sono usati, di norma, nelle operazioni di campagna.

2.6 Triangolo di posizione

Il triangolo di posizione è un triangolo sferico (fig. 12) che ha come vertici il Polo P_N , la posizione A dell'astro e lo zenit dell'osservatore Z , dove sono definite le seguenti grandezze geometriche:

- ❑ colatitudine del punto di osservazione: $P_N Z = c = 90^\circ - \varphi$
- ❑ distanza zenitale dell'astro
- ❑ misurata nel punto di osservazione: $ZA = z = 90^\circ - \alpha$
- ❑ distanza polare dell'astro: $P_N A = p = 90^\circ - \delta$
- ❑ angolo al polo: \hat{P}
- ❑ azimut dell'astro: $\hat{Z} = a$
- ❑ angolo parallattico: \hat{A}

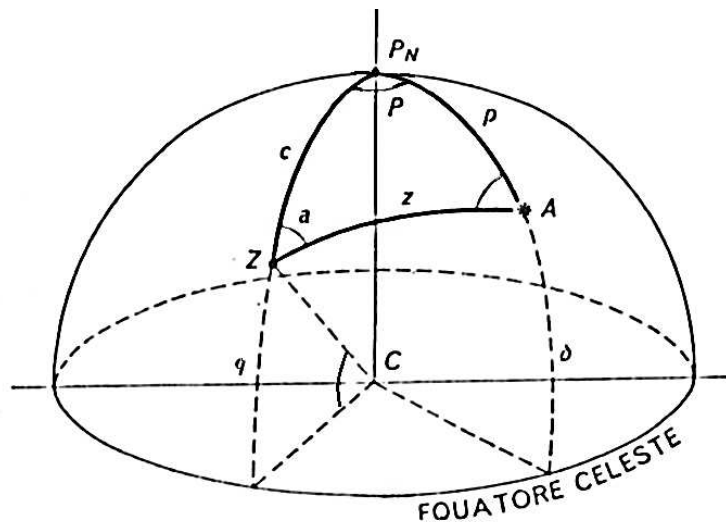


Fig. 12 – Triangolo sidereo di posizione

La determinazione delle coordinate ellissoidiche del punto di osservazione o di un azimut di una direzione terrestre, uscente da questo, si fonda sulla risoluzione del triangolo di posizione, alcuni elementi del quale sono noti, per aver misurato distanze zenitali e/o angoli azimutali, mediante teodolite, in istanti determinati del tempo universale (TU). Le posizioni dell'astro (o degli astri osservati) sono scelte in modo che gli errori di osservazione, degli elementi misurati (o gli errori derivanti dal fatto che alcuni elementi del triangolo sono noti con scarsa approssimazione), influiscano sui risultati in maniera trascurabile. Le formule della trigonometria sferica servono per risolvere il triangolo sferico; circa poi la determinazione dell'angolo al polo, esso è uguale all'angolo orario t dell'astro, quando questo è ad ovest del meridiano dell'osservatore, ed è uguale a $360^\circ - t$, quando l'astro è a est dello stesso meridiano.

2.7 Correzione delle misure

- A causa della variazione della densità dell'aria con la quota, le traiettorie luminose non sono rettilinee, ma sono curve e, in generale, rivolgono la concavità verso il basso (come mostra la fig. 13). Ogni astro che si osserva appare così più alto di quanto in effetti sia, ovvero si misura una distanza zenitale ξ minore, di una certa quantità r , della distanza zenitale z misurabile in assenza dell'aria.

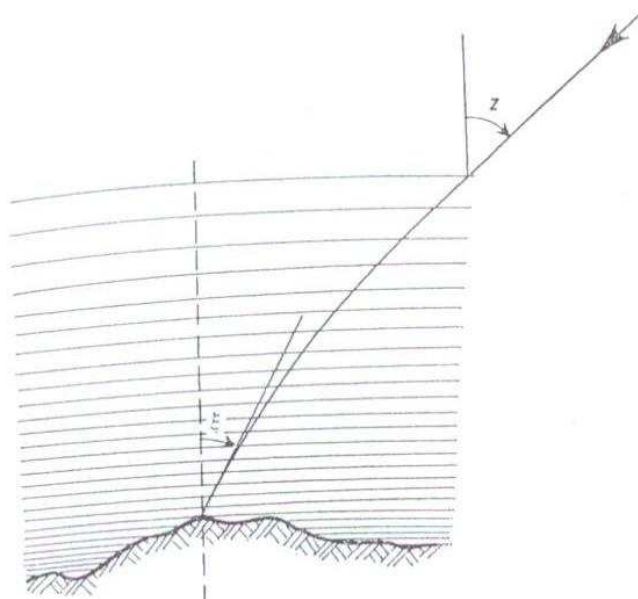


Fig. 13 – Correzione per la rifrazione atmosferica

Testi specializzati trattano la rifrazione atmosferica; tuttavia si può calcolare la correzione di rifrazione r , da apportare alla distanza zenitale misurata ξ , per avere la distanza zenitale z , come:

$$r'' = \rho'' (n - 1) \tan \xi \quad \text{con:} \quad \rho'' = 206265$$

dove n è l'indice di rifrazione atmosferica, nel punto in cui si trova l'osservatore, che dipende, a sua volta, dalla pressione P (in mm di mercurio) e dalla temperatura T (in gradi centigradi Celsius) dell'aria, nel punto dell'osservazione, cosicché:

$$r'' = \frac{P}{760} \frac{270}{270 + T} (60'' \cdot 10 \tan z - 0'' \cdot 072 \tan^3 z) \quad \text{dove: } z < 75^\circ$$

- La correzione di parallasse si riferisce agli astri appartenenti al sistema solare che sono relativamente vicini alla Terra. Infatti come illustra la fig. 14, la distanza zenitale z , osservata da un punto P della superficie terrestre (e non dal centro C della Terra), è più grande della distanza zenitale z_c , osservata in tale centro, di una piccola quantità p , chiamata parallasse in altezza dell'astro, cosicché dato: $z_c = z - p$, si ha:

$$\sin p = R/d \sin z$$

ove R è la distanza fra il punto P ed il centro C , e d la distanza fra il centro dell'astro ed il centro della Terra; inoltre essendo p sufficientemente piccolo, è possibile confondere l'angolo con il seno:

$$p'' = \rho'' R/d \sin z \quad \text{con: } \rho'' = 206265$$

La parallasse è massima, quando $\sin z = 1$, ovvero quando si osserva un astro all'orizzonte (ed in tal caso si chiama parallasse orizzontale). Le Effemeridi danno la parallasse orizzontale equatoriale (cioè relativa ad un punto sull'equatore), dove la distanza PC è massima ed uguale al semiasse equatoriale (per il Sole, il valore massimo di p è $9''$ e, anche per i pianeti, è di pochi secondi per cui la superficie di riferimento può essere considerata sferica). Invece per la Luna, il valore della parallasse può raggiungere il grado e p deve essere calcolato tenendo conto dell'effettiva forma della superficie di riferimento per cui si ha:

$$p = \pi(1 - \alpha \sin^2 \varphi) \sin(z + \nu \cos a)$$

dove π è la parallasse orizzontale equatoriale, data dalle Effemeridi in funzione del tempo universale (TU), α lo schiacciamento, φ l'altitudine dell'osservatore, $\nu = \varphi - \psi$ (con ψ latitudine geocentrica) e ϑ l'azimut dell'astro. Per la Luna, diventa sensibile anche la parallasse azimutale, dovuta al fatto che la verticale, per un punto P , non passa per il centro della Terra (tranne che ai Poli o sull'equatore), cosicché il piano verticale che contiene l'astro non si identifica con il piano che contiene l'astro, l'osservatore ed il centro della Terra, tranne quando l'astro si trova nel meridiano dell'osservatore. Ne deriva che l'azimut, riferito al centro della Terra, differisce dall'azimut misurato di una piccola quantità p_a , chiamata parallasse azimutale (con gli stessi simboli, essendo c una piccola correzione funzione della latitudine φ , chiamata riduzione della parallasse orizzontale):

$$p_a = (\varphi - \psi) \sin(\pi - c) \sin a / \sin z$$

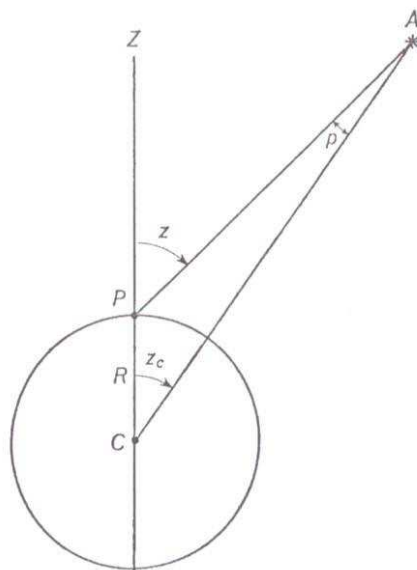


Fig. 14 – Correzione di parallasse

- La correzione per il semidiametro è necessaria, se l'astro (come il Sole e la Luna) ha una grandezza apparente e la collimazione non può essere fatta al centro, difficilmente individuabile, ma al lembo superiore (od inferiore) o sinistro (o destro), a seconda che si debbano misurare distanze zenitali o azimutali. Per passare da una misura effettuata su un lembo a quella che si sarebbe effettuata sul centro, occorre aggiungere o togliere l'angolo sotto cui l'osservatore vede il raggio r dell'astro. Questo angolo, chiamato semidiametro apparente, varia inversamente all'altezza sull'orizzonte dell'astro, perché la distanza fra l'astro e l'osservatore diminuisce all'aumentare dei quest'ultima. Le Effemeridi danno il valore del semidiametro geocentrico σ , indipendente dalla posizione dell'osservatore. Per il Sole ed i pianeti, questo valore può essere sicuramente usato; invece per la Luna, occorre apportare una correzione (funzione anche dei raggi R della Terra e r della Luna):

$$\rho'' R(\sigma^2 \cos z)/r \quad \text{con:} \quad \rho'' = 206265$$

Per effetto della rifrazione atmosferica, il contorno del Sole (o della Luna) si configura come un'ellisse, tanto più contratto, quanto più l'astro è vicino all'orizzonte. Inoltre il centro appare più vicino al lembo inferiore che al lembo superiore, perché la contrazione del semidiametro inferiore è maggiore di quella del semidiametro superiore. Di questo effetto, è necessario tenere conto, quando dalla misura della distanza zenitale, effettuata su un lembo, si vuol determinare la distanza zenitale del centro dell'astro.

2.8 Determinazione della latitudine e longitudine di un punto mediante misura di distanze zenitali di astri

In un punto di coordinate geografiche φ e λ , da determinare, si misura la distanza zenitale z di un astro all'istante τ di un orologio che funziona, ad esempio, a tempo sidereo. Facendo riferimento alla fig. 12, dal triangolo di posizione, con la formula del coseno, si ricava: $\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos P$.

L'angolo al polo P è uguale all'angolo orario locale t dell'astro (o $24^h - t$); così (come illustra la fig. 10) si ha: $P = TSL - AR_* = TSG + \lambda - AR_*$, e chiamata K_{rs} la correzione dell'orologio: $TSG = \tau + K_{rs}$, risulta:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(\tau + K_{rs} + \lambda - AR)$$

Noto il tempo sidereo (TSG), con le Effemeridi, si può determinare il tempo universale (TU) e le coordinate AR e δ dell'astro per cui, nella equazione precedente, sono noti tutti gli elementi, tranne le incognite φ e λ . Ovviamente la misura di una sola distanza zenitale permette di definire solo il luogo dei punti (chiamato circolo di posizione, come illustra la fig. 15) da cui, all'istante $\tau + K_{rs}$ del tempo sidereo di Greenwich, si osserverebbe un astro, con la distanza zenitale z .

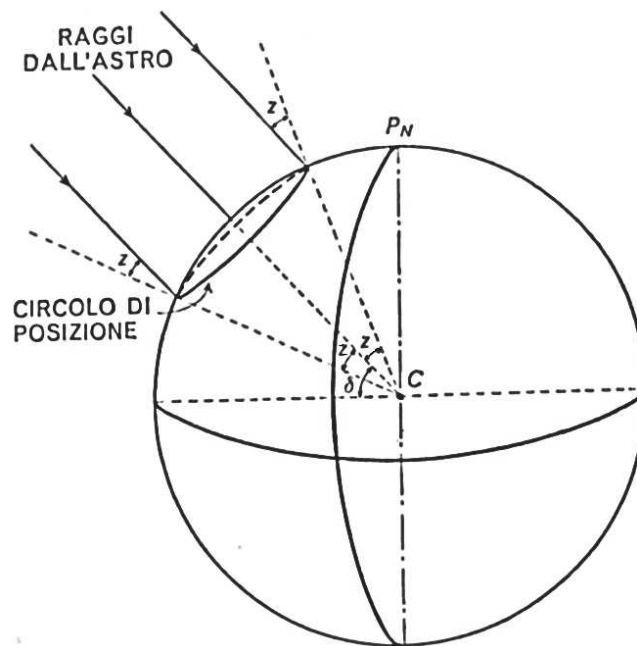


Fig. 15 – Circolo di posizione

Tuttavia se si misura la distanza zenitale di un altro astro, si definisce un secondo circolo di posizione e, con l'intersezione dei due circoli, si determina la latitudine e la longitudine del punto di osservazione. Il problema è così ricondotto alla soluzione di un sistema di due equazioni trascendenti in due incognite, facilmente risolvibile, se sono noti i valori approssimati delle soluzioni. A riguardo, non sorgono ambiguità, circa la posizione del punto di intersezione, perché sono note, in generale, le coordinate ellissoidiche approssimate φ_0 e λ_0 del punto, lette su una carta o determinate con metodi approssimati, astronomici o geodetici, oppure stimate empiricamente).

In effetti, una determinazione accurata di φ e λ si effettua sulla base di un numero maggiore misure di distanze zenitali (per cui si ricorre a procedimenti di compensazione delle misure). In ogni caso, per risolvere un sistema di due equazioni trascendenti è necessario procedere alla linearizzazione delle equazioni, cioè trasformare le equazioni trascendenti in equazioni lineari. A tal fine, si pone: $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ e $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, e si suppone che i valori approssimati φ_0 e λ_0 siano sufficientemente prossimi alle soluzioni φ e λ , in modo che si possano trascurare nei calcoli i quadrati e le potenze di ordine superiore delle correzioni: $\Delta\varphi$ e

$\Delta\lambda$ (assunte come nuove incognite). Sviluppando l'equazione precedente, in serie di Taylor, arrestata al primo ordine (cioè trascurando i quadrati e le potenze di ordine superiore), nel punto φ_0 e λ_0 , si ha:

$$\begin{aligned} \cos z = & \sin \varphi_0 \sin \delta + \cos \varphi_0 \cos \delta \cos(TSG + \lambda_0 - AR) + \\ & + (\cos \varphi_0 \sin \delta - \sin \varphi_0 \cos \delta \cos(TSG + \lambda_0 - AR))\Delta\varphi + \\ & - (\cos \varphi_0 \cos \delta \sin(TSG + \lambda_0 - AR))\Delta\lambda \end{aligned}$$

Questa equazione può essere trasformata, considerando un triangolo di posizione, molto vicino a quello effettivo, avente il punto di coordinate φ_0 e λ_0 , per vertici, e l'angolo al polo pari a: $TSG + \lambda - AR$, mentre invariato rimane l'angolo: $90^\circ - \delta$ (come mostra la fig.16).

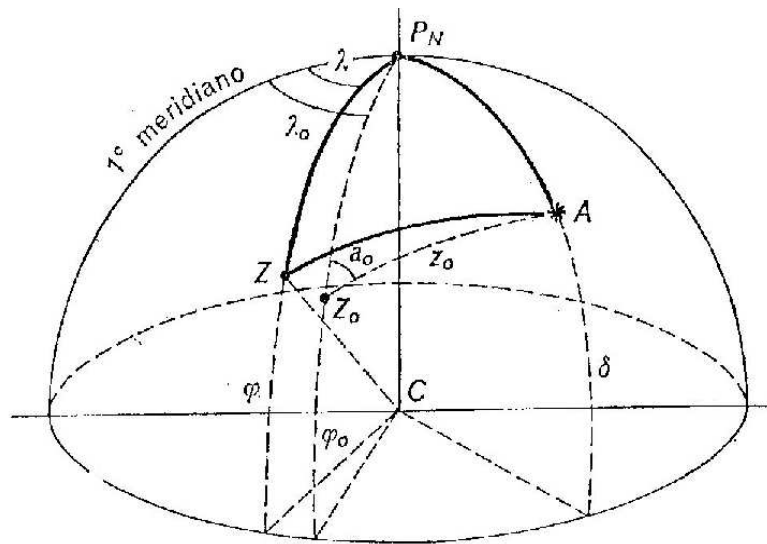


Fig.16 – Triangolo di posizione con vertice nel punto di coordinate approssimate φ_0 e λ_0

Facendo corrispondere ai vertici del generico triangolo sferico ABC rispettivamente i vertici P_N , Z_0 ed A , dalla formula del coseno si ha: $\cos z_0 = \sin \varphi_0 \sin \delta + \cos \varphi_0 \cos \delta \cos(TSG + \lambda_0 - AR)$, dalla formula dei seni si ottiene: $\sin a_0 \sin z_0 = \cos \delta \sin(TSG + \lambda_0 - AR)$, e dalla formula del seno-coseno si ha invece: $\cos a_0 \cos z_0 = \cos \varphi_0 \sin \delta - \sin \varphi_0 \cos \delta \cos(TSG + \lambda_0 - AR)$. Inoltre si può supporre che la distanza zenitale misurata z sia uguale al suo valore approssimato z_0 , dato dalla formula del coseno, per cui: $\cos z = \cos(z_0 - \Delta z) = \cos z_0 + \sin z_0 \Delta z$. Infine tenuto conto di quanto sopra, il precedente sviluppo di Taylor, arrestato al primo ordine, fornisce la seguente equazione di osservazione:

$$\cos a_0 \Delta\varphi - \cos \varphi_0 \sin a_0 \Delta\lambda = \Delta z$$

La successione dei calcoli per la determinazione di $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$ è la seguente:

- ❑ dal tempo τ (dell'orologio), con la correzione K_{rs} , si determina il tempo sidereo di Greenwich (TSG);
- ❑ dal TSG , mediante le Effemeridi, e tenendo conto della differenza lunghezza del giorno sidereo e del giorno solare medio, si determina il tempo universale (TU) dell'osservazione e così l'ascensione retta AR e la declinazione δ , della stella da osservare;
- ❑ si assumono i valori approssimati del punto di osservazione: φ_0 e λ_0 (calcolando i valori approssimati con la formula del coseno), della distanza zenitale z_0 e dell'azimut a_0 (con la formula del seni);
- ❑ si corregge il valore osservato della distanza zenitale z , per la rifrazione ed eventuali altre correzioni, e si determina: $\Delta z = z_0 - z$;
- ❑ si formano i coefficienti delle equazioni e si risolve il sistema, di due equazioni lineari in due incognite, che danno i valori delle correzioni: $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$, e le coordinate geografiche del punto di osservazione: $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ e $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$.

Se l'ipotesi sulla trascurabilità di quadrati e potenze superiori delle correzioni: $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$, non è verificata il calcolo è iterato. Per ottenere buoni risultati, le stelle da osservare sono scelte in posizioni opportune. Infatti dato che geometricamente le soluzioni trovate sono le intersezioni di due cerchi di posizione, occorre che questi abbiano una posizione relativa, tale da avere una buona intersezione, riducendo al minimo gli effetti degli errori di misura e delle approssimazioni fatte. Ad esempio, se si osservano solo due stelle, si deve sceglierne una all'incirca nel primo verticale (ovvero nel piano verticale, normale al piano del meridiano dell'osservatore) e l'altra prossima al piano del meridiano stesso. L'ultima equazione di osservazione rappresenta una retta, chiamata retta di altezza, che sostituisce una piccola porzione del cerchio di posizione. Pertanto posto: $\Delta\varphi = y/\mu$ e $\Delta\lambda \cos \varphi_0 = x/\mu$, con μ una costante arbitraria, la stessa equazione di osservazione diventa (e la retta di altezza corrispondente può essere riportata graficamente):

$$\cos a_0 y + \sin a_0 x = \mu \Delta z$$

In questo modo, l'origine delle coordinate rappresenta il punto approssimato di coordinate: φ_0 e λ_0 , mentre l'intersezione di due o più rette d'altezza determina i valori delle correzioni: $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$. Allora per disegnare una retta di altezza, si determina l'azimut dell'astro a_0 (tenendo conto del quadrante in cui l'astro si trova) e si traccia, dall'origine delle coordinate, la retta corrispondente a questa direzione azimutale dell'astro e, alla distanza $\mu\Delta z$, la normale a questa (che rappresenta la retta di altezza). Se si sono tracciate più rette di altezza, si effettua una compensazione empirica, assumendo come punto d'intersezione compensato, ad esempio, il baricentro delle intersezioni.

2.9 Determinazione di un azimut

Per misurare l'azimut di un punto P , rispetto ad un punto O (di coordinate ellissoidiche note), è sufficiente determinare l'angolo azimutale φ fra il piano verticale, contenente un astro, ed il piano verticale contenente

la direzione OP , in un istante in cui l'azimut a dell'astro è noto, cosicché: $a_{OP} = a + \varphi$. Invece per conoscere l'azimut a di un astro, ad un determinato istante, occorre risolvere il triangolo di posizione (come mostra la fig. 12), misurando la distanza zenitale z dell'astro, in quell'istante, o l'angolo al polo P , uguale all'angolo orario t dell'astro (od a $24^h - t$). Operativamente posto il teodolite nel punto O , prima della collimazione dell'astro, si collima il punto P e si legge il cerchio orizzontale (lettura l_p); dopodiché si dirige il cannocchiale verso la stella da osservare, mettendola nel campo. Determinato l'istante τ (letto all'orologio) in cui la stella è sul filo verticale, si legge il cerchio orizzontale (lettura l_A) e si calcola, per differenza delle due letture, l'angolo $\psi = l_A - l_p$. In effetti, occorre operare tenendo anche conto degli errori residui di rettifica del teodolite, poi calcolare: $TSG = \tau + K_{rs}$, ricavando il tempo universale TU , l'ascensione retta AR e la declinazione δ dell'astro (dalle Effemeridi), e successivamente $TSL = TSG + \lambda$, $\hat{P} = t = TSL - AR$ (o $\hat{P} = 24^h - (TSL - AR)$), cosicché si abbia il valore dell'azimut a dall'espressione:

$$\tan a = \frac{\sin \hat{P}}{\cos \varphi \tan \delta - \sin \varphi \cos \hat{P}}$$

Per la determinazione dell'azimut, occorre conoscere la latitudine e la longitudine del punto O ; se i valori noti sono approssimati, l'errore nella latitudine e l'errore nella longitudine (che si riflette in un errore nell'angolo orario), determinano un errore nell'azimut. Analizzando l'espressione precedente, si può dedurre che un piccolo errore nella latitudine non produce un errore sensibile sull'azimut, se l'azimut dell'astro (all'istante dell'osservazione) è prossimo a 0 o 180° ed anche un piccolo errore nella longitudine non produce un errore sensibile sull'azimut, qualora l'osservazione sia fatta quando l'angolo parallattico dell'astro (cioè l'angolo in A del triangolo di posizione) è prossimo a 90° o 270° .

Il valore dell'azimut a può anche essere ricavato determinando la distanza zenitale z dell'astro, all'istante τ dell'orologio, purché l'astro sia collimato con entrambi i fili, orizzontale e verticale, del reticolo del teodolite, perché oltre alla lettura al cerchio verticale occorre, nello stesso istante, effettuare la lettura al cerchio orizzontale. In questo caso, utilizzando la formula del coseno, dal triangolo di posizione, si ricava:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \delta) &= \cos z \cos(90^\circ - \varphi) + \\ &+ \sin z \sin(90^\circ - \varphi) \cos a \end{aligned} \quad \text{da cui:} \quad \cos a = \frac{\sin \delta - \cos z \sin \varphi}{\sin z \cos \varphi}$$

Questa determinazione è affetta solo dagli errori nella latitudine e nella distanza zenitale, in quanto un errore nella determinazione del tempo sidereo di Greenwich produce un errore nella declinazione dell'astro, in generale, irrilevante (anche se questa subisce delle piccole variazioni nell'ambito di 24^h).

2.10 Metodi per determinare la latitudine o la longitudine di un punto

I metodi, usati per determinare latitudine e/o longitudine di un punto, si basano sul fatto che l'osservazione dell'astro (o degli astri) può essere fatta in una posizione (dell'astro stesso) tale che l'errore della coordinata

incognita (in pratica, nota con una buona approssimazione) produca un errore trascurabile nel risultato. Tutto ciò dipende dal fatto che il risultato di un'osservazione di un astro determina un luogo di punti e, se questo luogo interseca perpendicolarmente il meridiano dell'osservatore, è evidente che un errore nella longitudine non produce un errore sensibile sulla latitudine, come pure, se il luogo interseca perpendicolarmente il parallelo dell'osservatore, è altrettanto evidente che un errore nella latitudine non produce alcun errore sensibile sulla longitudine.

- Determinazione della latitudine, con misure di distanze zenitali di stelle, nel meridiano dell'osservatore. Se un astro è osservato nel meridiano del punto di cui si vuole determinare la latitudine, l'angolo al polo è nullo (e $\cos P = 1$) per cui, dalla formula del coseno, si ricava:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = \cos(\varphi - \delta) \quad \text{da cui:} \quad \varphi = z + \delta$$

Pertanto la latitudine è uguale alla somma della distanza zenitale osservata (corretta della rifrazione atmosferica) e della declinazione dell'astro. Tuttavia occorre che l'asse di collimazione del teodolite sia posto nel meridiano dell'osservatore ed uno dei metodi che si possono seguire è quello di collimare una stella con uno stesso valore della distanza zenitale, prima e dopo il passaggio al meridiano (la cui direzione sia approssimativamente individuata con una bussola). Allora si collima una stella che abbia una distanza zenitale z^* compresa fra 60° e 75° , quando la stella si trova alcuni gradi ad est del meridiano dell'osservatore, si leggono ambedue i cerchi orizzontale (lettura l_E) e verticale (lettura l_Z), e poi ogni tanto si segue la stella e si controlla la distanza zenitale. Dopo che la stella ha oltrepassato il meridiano, quando la distanza zenitale si approssima crescendo al valore z^* , si impone al cerchio verticale la lettura l_Z e, senza più ruotare il cannocchiale, con piccoli spostamenti orizzontali (dell'alidada), si segue la stella, finché questa appare nel centro del reticolo. In tali condizioni si legge il cerchio orizzontale (lettura l_O) e, imponendo la media delle due letture al cerchio orizzontale, si dispone ovviamente l'asse di collimazione del teodolite nel piano del meridiano (con questo stesso metodo si può determinare anche un azimut, ma con un risultato meno preciso di quello ottenibile con il metodo già descritto precedentemente).

- Determinazione della longitudine, con misura della distanza zenitale di una stella, e determinazione del tempo universale dell'osservazione. Si misura la distanza zenitale z dell'astro, all'istante τ dell'orologio (da cui si ottiene: TSG , TU , AR e δ). Dal triangolo di posizione, con la formula del coseno, si ricava:

$$\cos \hat{P} = \cos t = \frac{\cos z - \sin \varphi \cos \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

per cui, assunto un valore approssimato della latitudine, si ricava il valore dell'angolo orario t . Infatti si dimostra che, se l'astro è osservato nel primo verticale ($a = 90^\circ$ o 270°), l'errore nella latitudine non ha praticamente influenza sul calcolo dell'angolo orario. Dopodiché essendo: $\lambda = TSL - TSG$, si ha:

$$\lambda = (t + AR) - (\tau + K_{rs})$$

Numerosi altri metodi si possono poi trovare nei trattati di Astronomia Geodetica (cui si rimanda).

3. Deviazione della verticale, determinazione del geoide

3.1 Deviazione della verticale

Dato l'orientamento dell'ellissoide, sulla verticale di un punto di emanazione, e poiché la superficie del geoide non coincide con quella dell'ellissoide, fra le coordinate ellissoidiche φ_e e λ_e , e quelle astronomiche φ_a e λ_a , relative allo stesso punto della superficie terrestre si hanno differenze: $\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_e$ e $\Delta\lambda = \lambda_a - \lambda_e$ (l'angolo ε , fra la normale all'ellissoide e la verticale al geoide, è chiamato deviazione della verticale). Per mettere in evidenza la deviazione della verticale, in vari punti della superficie terrestre, è necessario determinarne le posizioni ellissoidiche e fare, su questi punti, determinazioni astronomiche di latitudine e longitudine. La deviazione della verticale, in un punto, si può scomporre in due componenti: una ε_m , nel piano del meridiano, ed una ε_v , nel primo verticale, come mostrato nella rappresentazione sferica di fig. 17. Infatti se N e V rappresentano rispettivamente la normale all'ellissoide e la verticale, P_N è il polo, l'arco di cerchio massimo NV è la deviazione della verticale z ; inoltre condotto da V l'arco di cerchio massimo, normale al meridiano per N , con intersezione in Q , ε_m è l'arco di cerchio massimo NQ e ε_v è l'arco di cerchio massimo VQ , cosicché risulta: $\varepsilon_m = \varphi_a - \varphi_e$, a meno di termini in ε^2 . Dopodiché applicando il teorema dei seni al triangolo P_NQV (retto in Q), si ottiene: $\sin \varepsilon_v = \sin(\lambda_a - \lambda_e) \cos \varphi_a$, ed a meno dei termini in ε^3 : $\varepsilon_v = (\lambda_a - \lambda_e) \cos \varphi_a$. I valori di ε_m ed ε_v sono convenzionalmente assunti positivi, quando la verticale è ruotata verso nord e verso est, rispetto alla normale all'ellissoide. L'azimut γ dell'arco NV , a meno di termini in ε^3 , risulta dall'espressione: $\tan \gamma = \varepsilon_v / \varepsilon_m$, ed a meno di termini in ε^4 , si ha anche: $\varepsilon^2 = \varepsilon_m^2 + \varepsilon_v^2$.

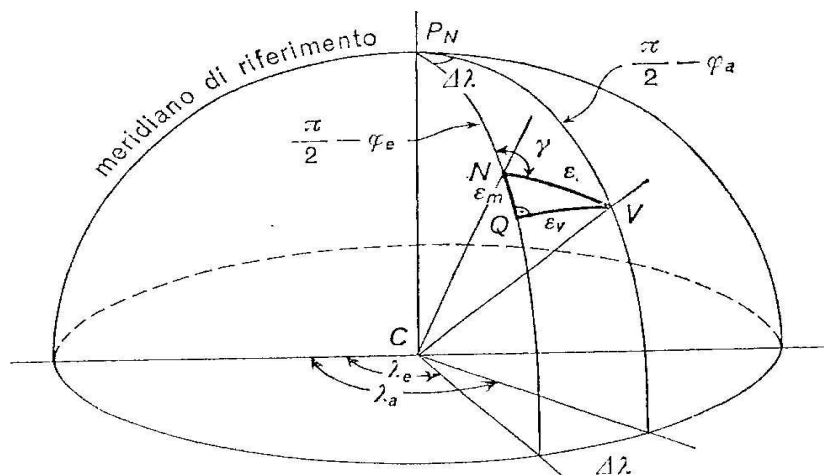


Fig. 17 – Deviazione della verticale

3.2 Equazione di Laplace

Dati, oltre al punto P , con deviazione della verticale ε , un altro punto T , posto sul piano orizzontale per P (in effetti, essendo la distanza fra i punti di inquadramento molto più grande del dislivello, l'ipotesi è praticamente sempre soddisfatta) e la rappresentazione sferica di fig. 18, si prende, come riferimento, il piano orizzontale per P ed il piano della deviazione della verticale in P (riproducendo la stessa situazione della figura 17, cioè conservando lo stesso significato dei simboli).

L'immagine sferica del punto T , per l'ipotesi fatta, è T^* ; pertanto l'angolo fra il piano VP_N (meridiano astronomico) e il piano verticale VT^* è l'azimut astronomico α_a di T , rispetto a P , uguale all'arco di cerchio massimo ST^* . Inoltre l'angolo fra il piano NP_N ed il piano NT^* , uguale (a meno di quantità in ε^2) all'arco di cerchio massimo RT^* , è l'azimut ellissoidico α_e . In questo modo, dal triangolo RSP_N (retto in S), si ha: $\tan(\alpha_a - \alpha_e) = \sin \varphi_a \tan(\lambda_a - \lambda_e)$, ed anche: $\alpha_a - \alpha_e = (\lambda_a - \lambda_e) \sin \varphi_a$, che esprime l'equazione di Laplace, a meno di termini in ε^2 .

Allora in un qualsiasi punto di una rete di inquadramento, misurando l'azimut astronomico (di un lato uscente dal punto) e la longitudine astronomica (del punto stesso), l'equazione di Laplace deve essere soddisfatta, comunque sia stato orientato l'ellissoide di riferimento. Pertanto l'equazione di Laplace permette di verificare il corretto orientamento di una porzione qualsiasi di una rete, come pure, introducendola nella compensazione, di contenere l'influenza degli errori di misura, sulla direzione dei lati (di reti molto estese).

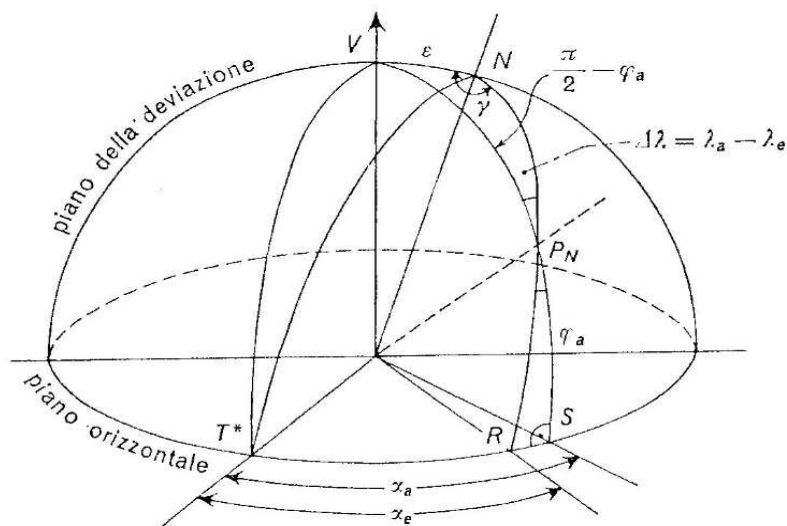


Fig. 18 – Dimostrazione dell'equazione di Laplace

3.3 Determinazione degli scostamenti fra geoidi ed ellissoide

La conoscenza della deviazione della verticale, in un sufficiente numero di punti di una zona, permette di determinare, per quella zona, gli scostamenti fra l'ellissoide ed il geoidi. A tal fine, come mostra la fig. 19, si considerino i profili del geoidi e dell'ellissoide, lungo il piano di un meridiano e sia M_e un punto di quest'ultimo in cui sia nota la componente meridiana ε_m della deviazione della verticale. Poiché la stessa componente dà anche l'inclinazione del geoidi rispetto all'ellissoide, si ha per l'incremento δh (dello

scostamento h): $dh = \varepsilon_m ds$, e per un arco finito AB di meridiano (compreso fra le latitudini φ_A e φ_B), dove ε_m è introdotta come una funzione della latitudine (da determinare con una formula interpolatrice, sulla base dei valori noti):

$$h(\varphi_B) - h(\varphi_A) = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \varepsilon_m \rho d\varphi$$

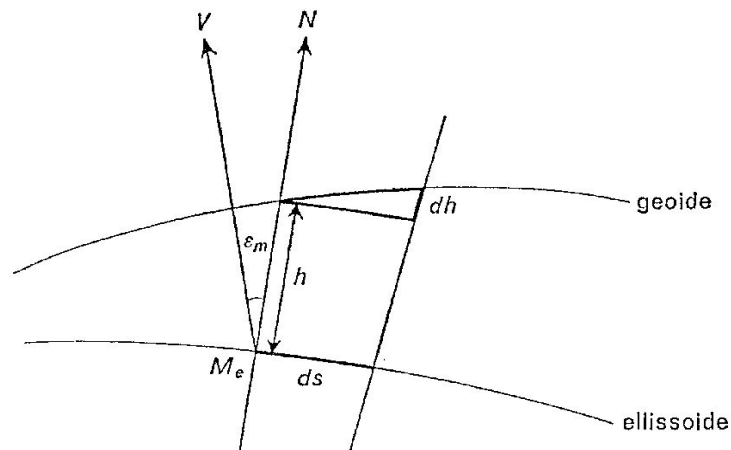


Fig. 19 – Costruzione del geode rispetto all'ellissoide

In effetti, poiché ε_m è conosciuta solo in alcuni punti, conviene spezzare l'integrale in una serie di somme. D'altra parte, il profilo del geode (rispetto all'ellissoide) può essere ottenuto in una qualsiasi direzione, considerando la componente della deviazione nella direzione prescelta.

Inoltre l'ondulazione del geode rispetto all'ellissoide è spesso determinata mediante un metodo che fa uso delle anomalie della gravità, ovvero le differenze, nei vari punti, fra il valore (teoricamente calcolabile) della gravità, per la superficie equipotenziale di un ellissoide, ed il valore effettivo (conoscibile mediante misure gravimetriche). Infine l'ondulazione del geode è determinata, per tutta la superficie terrestre (un esempio in fig. 20), mediante l'elaborazione delle anomalie orbitali, delle traiettorie dei satelliti artificiali ¹¹.

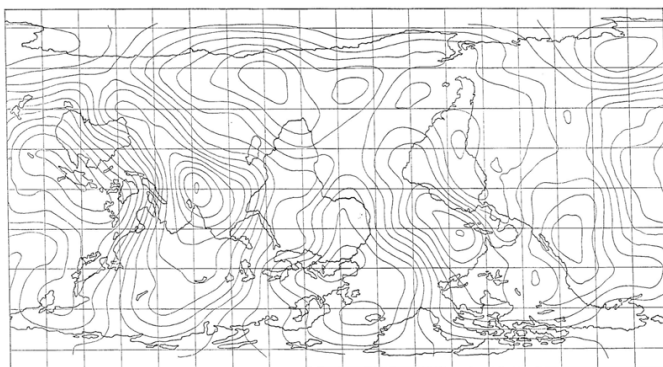


Fig.20 – Ondulazione del geode

¹¹ Le moderne tecniche di posizionamento GPS, affiancate da livellazioni geometriche (lungo le stesse linee di rilevamento), permettono di calcolare direttamente l'ondulazione del geode, come differenza tra le quote ortometriche (del geode) e le quote ellissoidiche, riferite all'ellissoide WGS84.

PARTE III
RAPPRESENTAZIONE DELL'ELLISSOIDE SUL PIANO

1. Generalità

1.1 Deformazioni di una rappresentazione delle figure ellissoidiche sul piano

Dati tre punti A , B , C su un cilindro (fig. 1), congiunti a due a due da archi di geodetica (che su questa superficie sono archi di elica cilindrica), si ottiene un triangolo geodetico sul cilindro, con angoli α , β , γ (nei vertici), formati dalle tangenti alle geodetiche, e lati di lunghezza a , b e c (pari alle lunghezze degli archi di elica), ognuno dei quali è un segmento di curva gobba. Se si taglia il cilindro lungo una generatrice e lo si distende sul piano, il triangolo geodetico si trasforma, perché da triangolo, definito sul cilindro da porzioni di curve gobbe, diventa una figura piana, dove ogni arco di geodetica si trasforma in un segmento di retta (ovvero in un segmento di geodetica del piano), con la stessa lunghezza e con gli stessi angoli fra questi segmenti di rette (perché uguali a quelli fra le tangenti alle geodetiche sul cilindro).

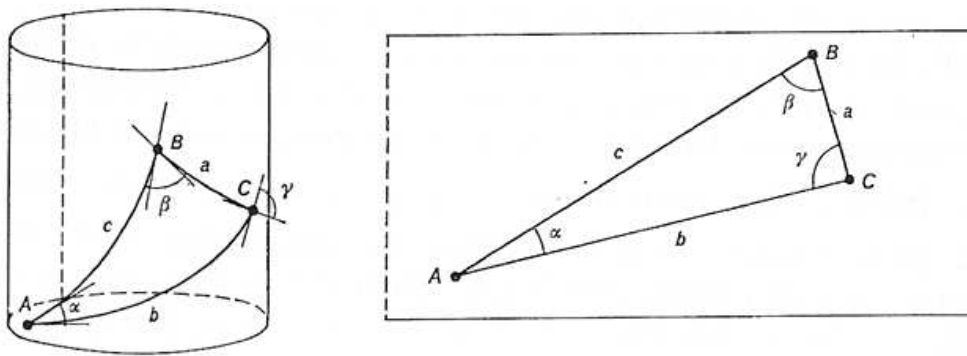


Fig. 1 – Triangolo geodetico su un cilindro e sviluppato su un piano

Allora il triangolo geodetico non si deforma, in quanto (in seguito allo spianamento) i lati mantengono le stesse lunghezze e rimangono inalterati anche gli angoli fra i lati. Infatti il cilindro (come il cono) è una superficie sviluppabile, ovvero si può distendere su un piano senza che gli angoli od i lati delle figure tracciate (su esso) subiscano deformazioni. Invece l'ellissoide (come la sfera) non è una superficie sviluppabile, perché non si può distendere su un piano, senza che i lati e gli angoli delle figure costituite con archi di geodetica si deformino (cioè senza che si verifichino variazioni di lunghezza dei lati, variazioni degli angoli ed anche variazioni delle aree racchiuse dalle figure). Pertanto qualsiasi rappresentazione dell'ellissoide sul piano è deformata.

Di conseguenza, mentre si ha una sola maniera di distendere un cilindro (od un cono) su un piano, esistono infinite maniere di ottenere una rappresentazione piana dell'ellissoide (e di una sfera), stabilito che occorre deformare la superficie dell'ellissoide (o della sfera), in relazione a queste infinite maniere. In pratica, tuttavia le rappresentazioni utili dovranno avere deformazioni contenute, entro determinati limiti. Inoltre stabilita una maniera di spianare l'ellissoide (od una sfera) su un piano, effettuando stiramenti o contrazioni (più o meno accentuate, in varie direzioni), due figure, uguali sull'ellissoide (o su una sfera), ma in posizioni diverse, risulteranno diversamente deformate sulla carta (in altre parole, la deformazione varia da punto a punto e, per caratterizzare la deformazione stessa, occorre riferirsi ad elementi infinitesimi). In questo modo, le

deformazioni sulla carta, di figure formate da elementi finiti, trasformate delle corrispondenti sull'ellissoide (o su una sfera), si possono poi dedurre con operazioni di integrazione.

Inoltre la rappresentazione dell'ellissoide (o di una sfera) sul piano è un'operazione eseguibile per via puramente numerica (determinando coordinate, lunghezze di linee, angoli fra linee, ecc. ed operando solo su numeri che rappresentano, sulla base delle unità di misura usate, i valori delle grandezze dell'oggetto o della sua rappresentazione). La rappresentazione diventa grafica (cioè una carta), quando, stabilita una certa scala $1/n$, i vari elementi della rappresentazione sono riportati graficamente, cosicché i numeri che definiscono graficamente (nelle stesse unità di misura) coordinate e lunghezze di linee sono n volte più piccoli (ovviamente gli angoli rimangono invariati, data la similitudine, mentre per le aree il rapporto fra la rappresentazione numerica e quella grafica, espresse nella stessa unità di misura, è $1/n^2$). Nel seguito, non si considera l'aspetto grafico della rappresentazione, a meno che non si faccia riferimento a questo, cosicché tutti gli elementi di una rappresentazione sono definiti da numeri, riferiti alle loro grandezze, non ridotte in scala. In questo modo, per definire la deformazione in un punto della rappresentazione si possono prendere in considerazione due moduli di deformazione lineare ed areale; quanto agli angoli si considera la deformazione di un angolo, se presente, dipendente dall'ampiezza dell'angolo stesso.

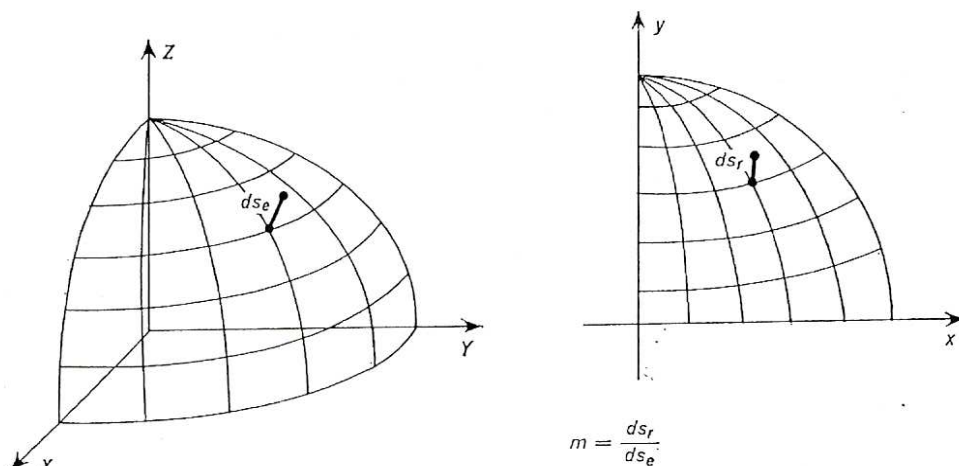


Fig. 2 – Modulo di deformazione (lineare)

- Come mostra la fig. 2, indicando con ds_e un archetto infinitesimo sull'ellissoide e ds_r il corrispondente nella rappresentazione, il rapporto: $m = ds_r / ds_e$, definisce il modulo di deformazione (lineare). Questo rapporto varia, da punto a punto, perché altrimenti la rappresentazione sarebbe senza deformazioni.
- Analogamente come mostra la fig. 3, indicando con $d\sigma_e$ l'area racchiusa da un quadrilatero infinitesimo sull'ellissoide e $d\sigma_r$ quella del corrispondente quadrilatero nella rappresentazione, il rapporto: $m_A = d\sigma_r / d\sigma_e$, definisce modulo di deformazione areale.
- Infine come mostra la fig. 4, considerato un meridiano sull'ellissoide e la corrispondente linea (trasformata del meridiano) nella rappresentazione, ed anche un elemento di linea sull'ellissoide, formante un angolo α (azimut) con il meridiano ed il corrispondente elemento nella rappresentazione, formante invece un angolo α' con la trasformata del meridiano, la differenza: $\delta = \alpha' - \alpha$, definisce la

deformazione angolare. In questo modo, la deformazione di un angolo, fra le due direzioni, risulta dalla differenza delle deformazioni relative alle due direzioni che lo formano.

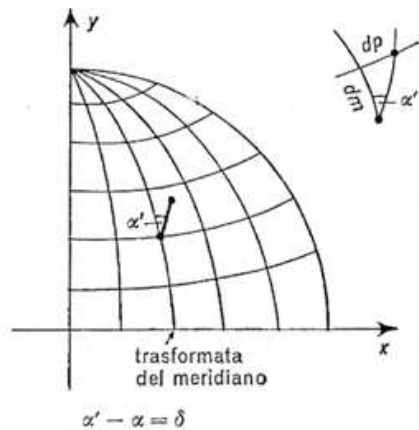
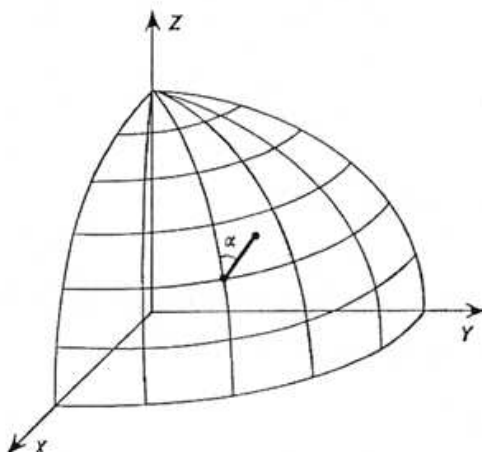
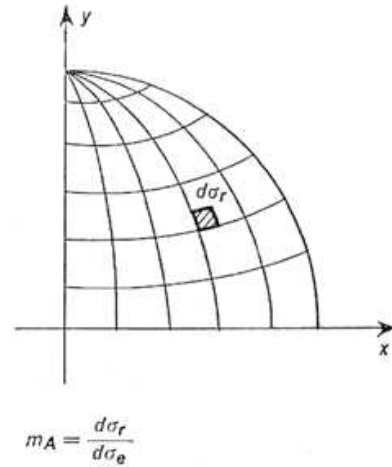
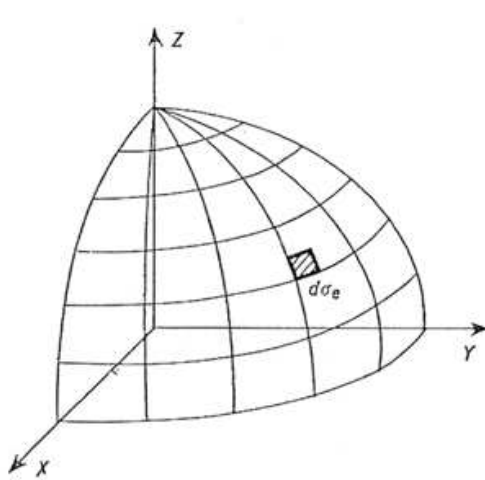


Fig. 3 – Modulo di deformazione areale (sopra)

Fig. 4 – Deformazione angolare (sotto)

1.2 Elementi che definiscono una rappresentazione

La rappresentazione dell'ellissoide sul piano è definita da due funzioni: $x = x(\varphi, \lambda)$ e $y = y(\varphi, \lambda)$, che stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra le posizioni di un punto P sull'ellissoide, data dalle coordinate ellissoidiche φ e λ , e del corrispondente punto P' sul piano della rappresentazione, data dalle coordinate piane ortogonali x e y . La soluzione completa di questi problemi comporta:

- ❑ la definizione delle formule di corrispondenza e delle formule inverse $\varphi = \varphi(x, y)$ e $\lambda = \lambda(x, y)$;
- ❑ la definizione dei moduli di deformazione e della deformazione angolare, in funzione delle coordinate ellissoidiche o (e meglio, per gli usi pratici) in funzione delle coordinate piane ortogonali;
- ❑ la definizione del reticolato geografico, ovvero la determinazione delle linee che, nella rappresentazione, costituiscono le trasformate dei meridiani e dei paralleli (in particolare, la definizione dell'angolo γ che la tangente alla trasformata del meridiano, in un punto, forma con la parallela all'asse delle ordinate y).

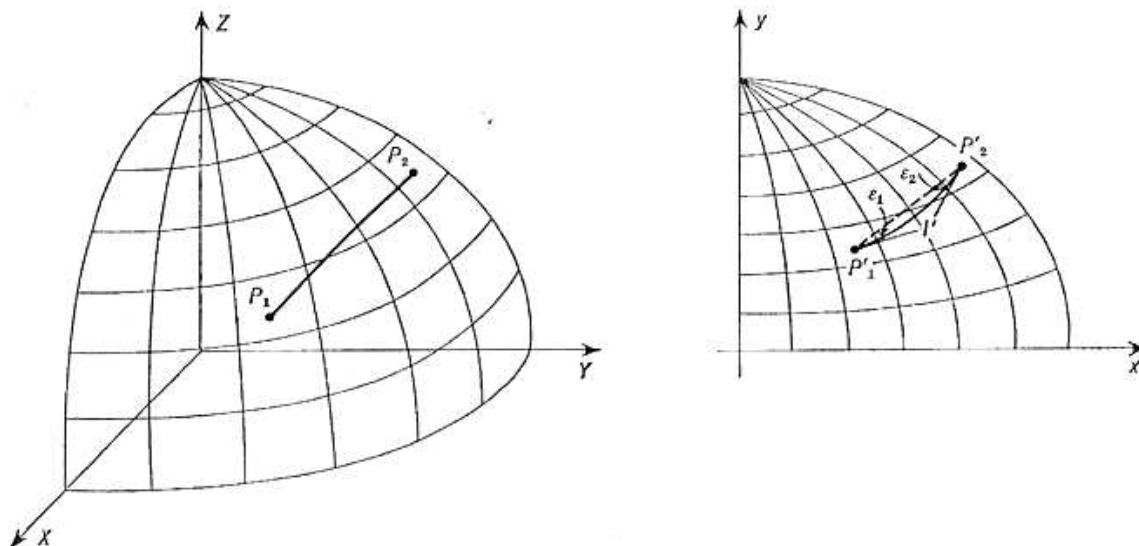


Fig. 5 – Arco di geodetica dell'ellissoide e trasformata dell'arco di geodetica sulla rappresentazione

Come illustra la fig. 5, un arco di geodetica P_1P_2 sull'ellissoide si trasforma in una linea nella rappresentazione, chiamata trasformata della geodetica, in generale, costituita da un arco di curva che congiunge i punti $P'_1P'_2$ della rappresentazione. Inoltre per le pratiche applicazioni, è utile determinare:

- ❑ la natura geometrica della trasformata di una arco di geodetica;
- ❑ gli angoli ε_1 ed ε_2 (del segmento rettilineo $P'_1P'_2$), formati con le tangenti alla trasformata;
- ❑ il rapporto l'/l fra la lunghezza del segmento rettilineo $P'_1P'_2$ e la lunghezza l dell'arco di geodetica.

1.3 Determinazione dei moduli di deformazione

I moduli di deformazione, in un punto della rappresentazione, e la deformazione di un angolo si possono esprimere in funzione delle quattro derivate parziali delle funzioni di corrispondenza fra ellissoide e piano.

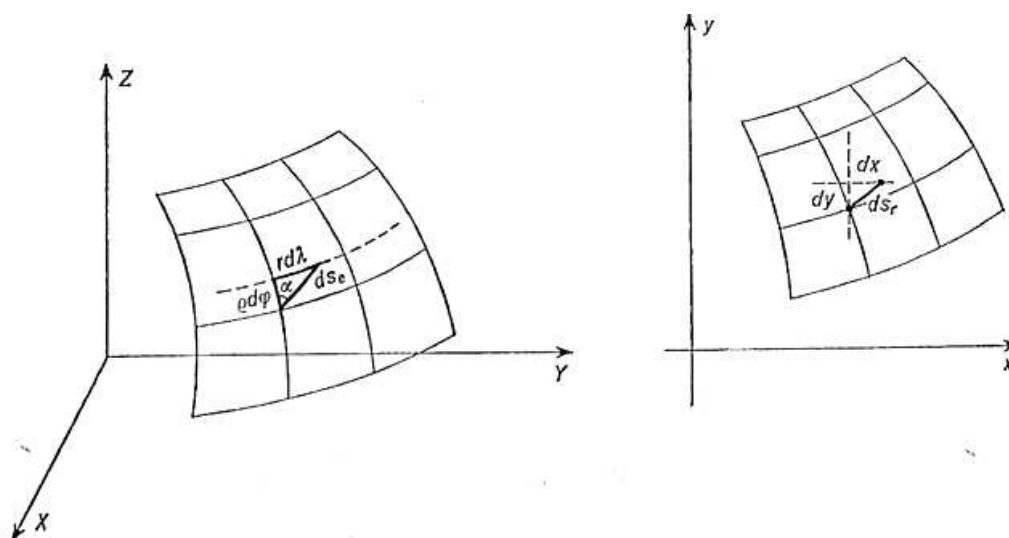


Fig. 6 – Elemento lineare infinitesimo riferito al sistema di coordinate curvilinee sull'ellissoide ed al sistema di coordinate piane ortogonali nella rappresentazione

Come mostra la fig. 6, dato un elemento lineare infinitesimo ds_e sull'ellissoide, i due elementi di meridiano $\rho d\varphi$ e di parallelo $r d\lambda$ passanti, per i suoi estremi, e l'azimut α di ds_e , dal triangolo infinitesimo, così formato (che si può considerare piano, perché infinitesimo), si ha: $ds_e^2 = r^2 d\lambda^2 + \rho^2 d\varphi^2$. Dopodiché trasformate, secondo la suddetta corrispondenza biunivoca, le coordinate estreme di questo elemento, si ottengono due punti infinitamente vicini della rappresentazione, ovvero un elemento lineare ds_r che, con riferimento agli assi ortogonali x e y , è dato da: $ds_r^2 = dx^2 + dy^2$. Dalla stessa corrispondenza biunivoca fra ellissoide e piano, si ha poi:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

per cui, quadrando e sostituendo, si ottiene:

$$ds_r^2 = e^2 d\varphi^2 + 2f d\varphi d\lambda + g^2 d\lambda^2$$

avendo posto:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \qquad f = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \qquad g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2.$$

Inoltre dal triangolo infinitesimo (fig. 6) si ha: $\rho d\varphi = ds_e \cos \alpha$ e $r d\lambda = ds_e \sin \alpha$, per cui ricavando $d\varphi$ e $d\lambda$, sostituendolo all'indietro e dividendo per ds_e^2 , si ha il quadrato del modulo di deformazione:

$$m^2 = \frac{e}{\rho^2} \cos^2 \alpha + \frac{2f}{r\rho} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{g}{r^2} \sin^2 \alpha$$

che, ponendo più semplicemente: $e/\rho^2 = e^*$, $f/r\rho = f^*$ e $g/r^2 = g^*$, si può scrivere come:

$$m^2 = e^* \cos^2 \alpha + 2f^* \sin \alpha \cos \alpha + g^* \sin^2 \alpha$$

I termini e^* e g^* rappresentano i quadrati dei moduli di deformazione secondo le direzioni delle trasformate, rispettivamente del meridiano e del parallelo. Inoltre poiché e^* , f^* e g^* sono funzione solo di φ e λ del punto, in generale, il modulo di deformazione varia al variare dell'azimut α . In questo modo, se a partire dal punto si riportano, nelle varie direzioni, segmenti inversamente proporzionali ai moduli di deformazione, gli estremi di questi segmenti si trovano su un'ellisse (chiamato ellisse delle deformazioni).

Come mostra la fig. 7, dato un quadrilatero formato da due meridiani e due paralleli, infinitamente vicini, poiché tali linee sono ortogonali, l'area del quadrilatero risulta: $d\sigma_e = \rho d\phi r d\lambda = r\rho d\phi d\lambda$. Nella rappresentazione, all'elemento di meridiano corrisponde un elemento: $dm = \rho d\phi \sqrt{e^*}$, a quello di parallelo un elemento: $dp = r d\lambda \sqrt{g^*}$, e le trasformate dei meridiani e dei paralleli (uscanti da un punto), in generale, formano fra loro un angolo ω , diverso da $\pi/2$, cosicché l'area dello stesso quadrilatero diventa: $d\sigma_r = \rho d\phi \sqrt{e^*} r d\lambda \sqrt{g^*} \sin\omega$, ed il modulo di deformazione areale risulta:

$$m_A = \frac{d\sigma_r}{d\sigma_e} = \sqrt{e^* g^*} \sin\omega = \frac{\sqrt{eg}}{r\rho} \sin\omega$$

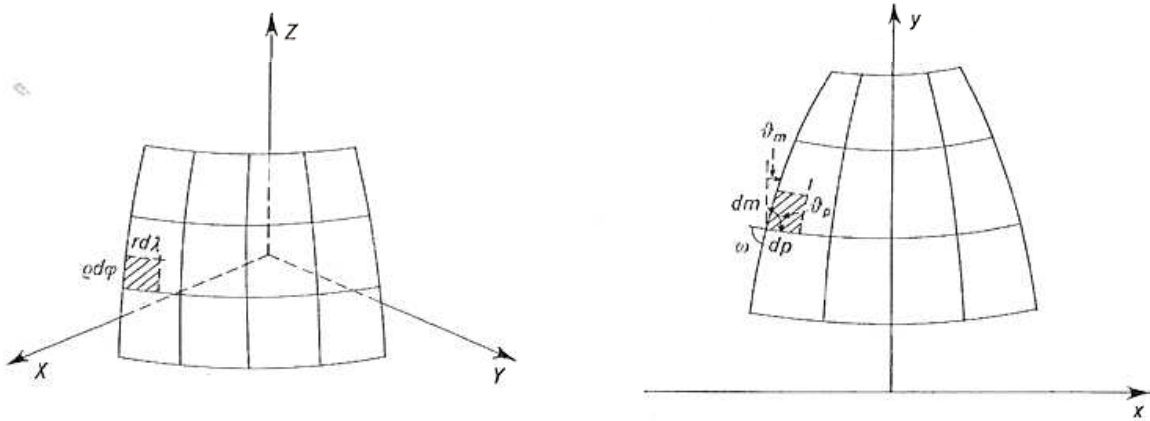


Fig. 7 – Quadrilatero infinitesimo sull'ellissoide e sul piano della rappresentazione

Tuttavia è poi necessario esprimere $\sin\omega$ in funzione delle derivate, rispetto a ϕ e λ , della suddetta corrispondenza biunivoca, fra ellissoide e piano (in analogia alla formula dell'angolo di direzione di un segmento, in funzione delle differenze delle coordinate degli estremi). Poiché il triangolo è infinitesimo, la tangente (dell'angolo di direzione θ_m): $\tan \theta_m = dx/dy$, per gli elementi di meridiano e parallelo, si calcola, ricavando dx e dy , rispettivamente per $d\lambda = 0$ e $d\phi = 0$, ovvero:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

Nei due casi, risulta:

$$\tan \theta_m = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi / \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi$$

$$\tan \theta_p = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda / \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

per cui:

$$\tan \omega = \tan(\theta_p - \theta_m) = \frac{\tan \theta_p - \tan \theta_m}{1 + \tan \theta_p \tan \theta_m} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \varphi}}$$

e poiché:

$$\operatorname{sen} \omega = \frac{\tan \omega}{\sqrt{1 + \tan^2 \omega}} = \frac{\frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \varphi}}}{\sqrt{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right)}} = \frac{1}{\sqrt{eg}} \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)$$

infine si ha:

$$m_A = \frac{1}{r\rho} \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)$$

E' altresì utile ricavare anche: $\cos \omega = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \omega} = f / \sqrt{eg}$. A tal fine, come mostra la fig. 4, dato l'azimut α dell'elemento ds_e sull'ellissoide (ovvero l'angolo che questo forma con il meridiano), l'angolo α' che il corrispondente elemento ds_r forma con la trasformata del meridiano ed indicando con dp e dm le componenti di ds_r , secondo le trasformate del parallelo e del meridiano, si ha:

$$\tan \alpha' = \frac{dp}{dm} = \frac{r d\lambda \sqrt{g^*}}{\rho d\varphi \sqrt{e^*}} = \sqrt{\frac{g}{e}} \frac{d\lambda}{d\varphi}$$

Essendo: $\rho d\varphi = ds_e \cos \alpha$ e $r d\lambda = ds_e \sin \alpha$, cosicché: $d\lambda/d\varphi = \rho \tan \alpha / r$, e sostituendo all'indietro:

$$\tan \alpha' = \rho \sqrt{g/e} \tan \alpha / r$$

si ha l'espressione della deformazione angolare:

$$\tan \delta = \tan(\alpha' - \alpha) = \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha' \tan \alpha} = \frac{\left(\frac{\rho}{r} \sqrt{\frac{g}{e}} - 1 \right) \tan \alpha}{1 + \frac{\rho}{r} \sqrt{\frac{g}{e}} \tan^2 \alpha}$$

1.4 Classificazione delle rappresentazioni in base alle caratteristiche delle deformazioni

La rappresentazione piana dell'ellissoide comporta comunque delle deformazioni, ma si possono definire rappresentazioni isogone o conformi per le quali il modulo di deformazione (lineare), pur variando da punto a punto, non varia (in uno stesso punto) al variare della direzione dell'elemento. Ne deriva che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, le figure infinitesime sul piano sono simili alle corrispondenti sull'ellissoide, con il rapporto di similitudine che varia da punto a punto. In questo caso, l'angolo formato da due elementi infinitesimi sull'ellissoide (ovvero l'angolo fra le tangenti a due linee uscenti da un punto) è uguale all'angolo formato fra le tangenti alle trasformate di tali linee sulla rappresentazione, cosicché nelle carte conformi la deformazione angolare è nulla in ogni punto.

Invece nelle rappresentazioni equivalenti si conserva costante il rapporto fra le aree di due quadrilateri infinitesimi corrispondenti (cioè è costante ed uguale all'unità il modulo di deformazione areale). Infine si chiamano afilattiche le rappresentazioni, dove sono presenti tutti i tipi di deformazione ognuno dei quali è tuttavia mantenuto nei limiti più ristretti possibili. Ogni tipo di rappresentazione (e la carta che ne deriva) presenta vantaggi, per uno o più specifici usi; ad esempio, le carte isogone o conformi sono utili per la navigazione, mentre le carte equivalenti sono utili per le mappe catastali.

2. Le rappresentazioni come proiezione dei punti dell'ellissoide su superfici sviluppabili

2.1. Tipi di proiezione

Le relazioni che definiscono una rappresentazione possono essere dedotte, eseguendo la proiezione dei punti dell'ellissoide, da un opportuno centro, su una superficie sviluppabile, convenientemente disposta, determinando poi le deformazioni della rappresentazione sulla superficie spianata. Tuttavia le carte, nate come proiezioni geometriche, sono indipendenti dal carattere proiettivo (delle proiezioni modificate), per avere determinate caratteristiche, in relazione ad usi specifici. Infatti è più opportuno derivare le equazioni della rappresentazione dalle caratteristiche di deformazione attese, sulla base di una teoria matematica delle rappresentazioni.

D'altra parte, è conveniente, per il carattere intuitivo delle proiezioni e per dare una classificazione alle stesse, esaminare la genesi di una rappresentazione, come proiezione, nell'ipotesi semplificativa che la superficie di riferimento sia sferica. Infatti come illustra la fig. 8, le superfici sviluppabili su cui eseguire la proiezione sono: il piano, il cilindro ed il cono. Nel primo caso, si hanno proiezioni prospettiche (secondo dove il sito del punto di proiezione: centro-grafiche, stereografiche, scenografiche ed ortografiche), negli altri due casi, proiezioni per sviluppo. Nelle proiezioni per sviluppo, il cono od il cilindro si dispongono tangenti o secanti alla superficie della sfera e, in generale, il punto di proiezione è il centro della sfera od un punto all'infinito, in direzione normale alla linea di tangenza.

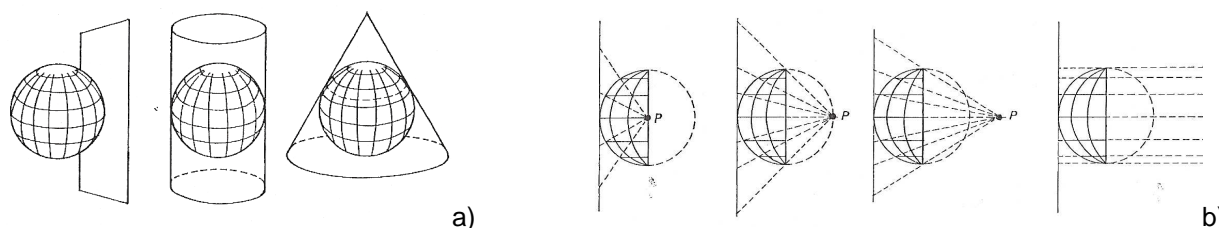
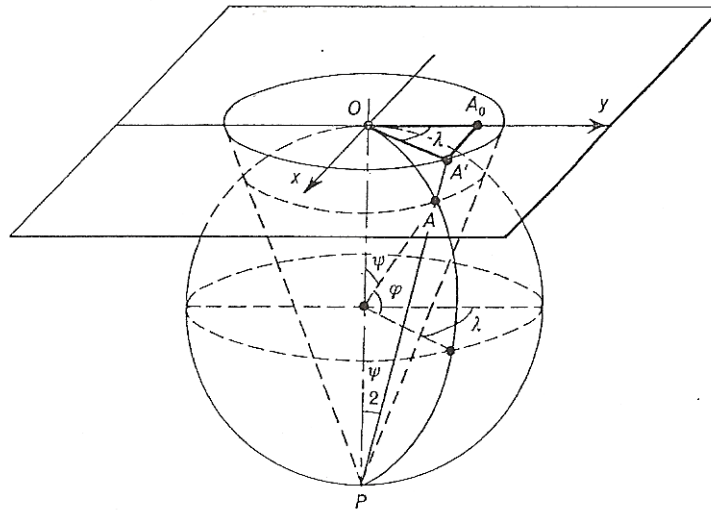


Fig. 8. – a) Superfici sviluppabili per proiezioni cartografiche; b) tipi di proiezioni sul piano

A seconda poi dell'orientamento della sfera, rispetto al centro ed alla superficie di proiezione, si hanno le proiezioni polari (con piano tangente al polo), azimutali (con piano tangente in un punto qualsiasi), meridiane (con piano tangente in un punto dell'equatore) e così via. Per rappresentare vaste zone della superficie della sfera si adottano anche rappresentazioni policentriche, suddividendo cioè la zona da rappresentare in porzioni, per ognuna delle quali si sceglie un conveniente punto ed una conveniente superficie di proiezione (anche se, in tal caso, sorgono problemi per le corrispondenze fra i punti ai confini di ogni porzione).

2.2 Proiezione stereografica polare

Nella rappresentazione stereografica polare, i punti dell'ellissoide sono proiettati su un piano tangente ad un polo, con il centro di proiezione nell'altro polo (come illustra la fig. 9a) ed assumendo l'asse y (della rappresentazione) nella direzione in cui si proietta il meridiano fondamentale.



a)

Fig. 9a – Proiezione stereografica polare: schema della proiezione

Dato un punto A sulla superficie di riferimento di coordinate φ e λ , ed A' la sua proiezione, risulta:

$$O\hat{P}A = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \qquad OA' = 2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

cosicché le equazioni della rappresentazione sono:

$$x = 2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin \lambda \qquad y = 2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos \lambda$$

Facendo il rapporto delle due equazioni, si elimina la coordinata φ e risulta: $y = x / \tan \lambda$, per cui con $\lambda = \text{cost}$, si ha l'equazione di una retta. Pertanto con riferimento alla fig. 9 b), i meridiani sono rappresentati da rette uscenti dall'origine delle coordinate cartografiche. Invece eliminando λ si ha:

$$x^2 + y^2 = \left(2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right)^2$$

e così, con $\varphi = \text{cost}$, l'equazione di un cerchio. Allora i paralleli si trasformano in circonferenze concentriche, con il centro nell'origine degli assi (i cui raggi di sono maggiori dei raggi dei corrispondenti paralleli; in particolare, all'equatore corrisponde una circonferenza di raggio $2R$).

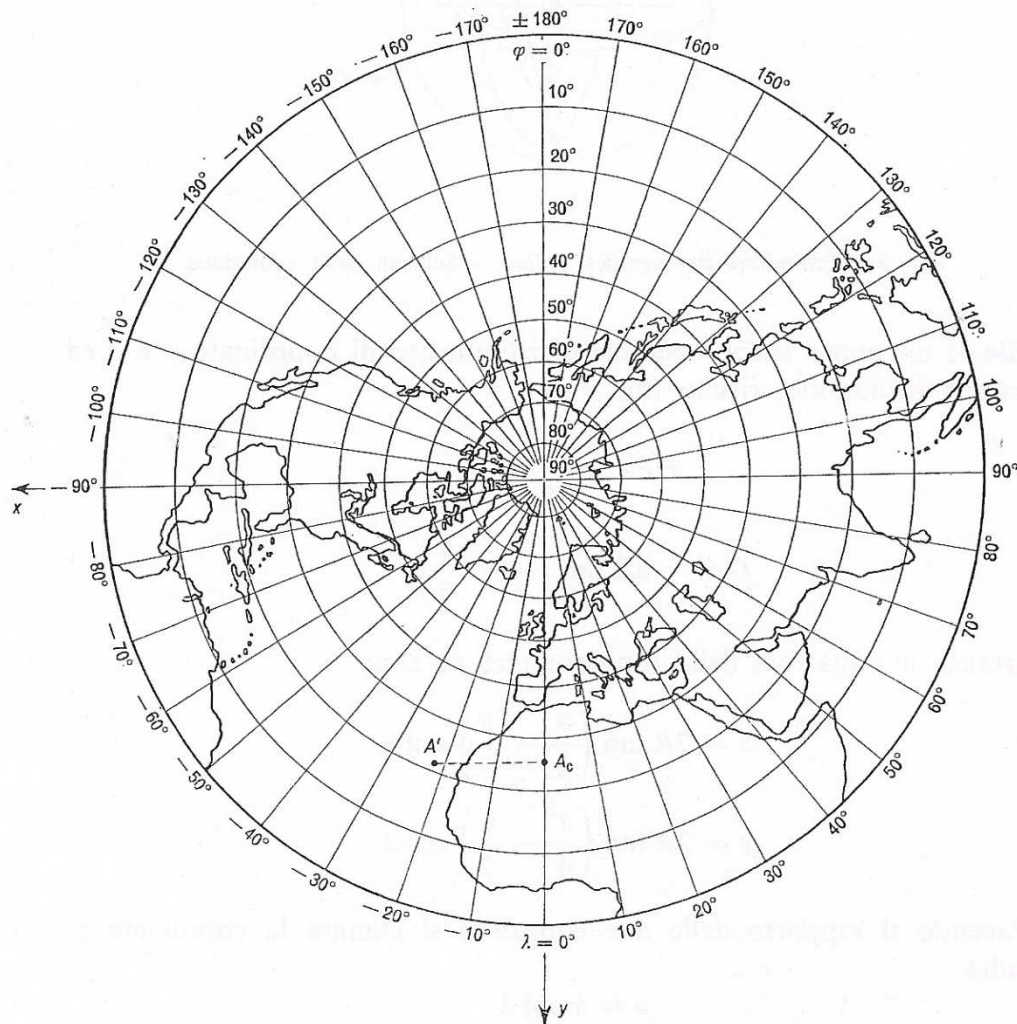


Fig. 9b – Proiezione stereografica polare: reticolato geografico

Il modulo di deformazione (lineare) m_m , lungo la trasformata del meridiano, si ricava direttamente, determinando le espressioni di ds_e e ds_r , cosicché si ha: $ds_e = R d\varphi$, e per ds_r :

$$ds_r = \frac{d(OA')}{d\varphi} d\varphi = - \frac{R}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} d\varphi$$

per cui, trascurando il segno meno (in relazione al fatto che OA' diminuisce quando φ aumenta):

$$m_m = \frac{ds_r}{ds_e} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)}$$

Questo stesso risultato si può ricavare direttamente dalla espressione generale del modulo di deformazione (lineare), in quanto, eseguendo le derivate delle equazioni della proiezione stereografica polare, rispetto a φ , si ricava:

$$m_m^2 = e^* = \frac{e}{R^2} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{2R}{2 \cos^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)} \right)^2 = \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)}$$

ed eseguendo le derivate delle stesse equazioni rispetto a λ , si ha:

$$\begin{aligned} m_p^2 = g^* &= \frac{g}{R^2 \cos^2 \varphi} = \left(\frac{2 \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)}{\cos \varphi} \right)^2 = \frac{2 \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)}{\cos \varphi \cos^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)} = \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)}{\cos \varphi \cos^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)} = \frac{\sin 2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)}{\cos \varphi \cos^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)} \end{aligned}$$

In questo modo, il modulo di deformazione (lineare) lungo il parallelo è uguale a quello lungo il meridiano e la proiezione è conforme. Il modulo di deformazione (lineare) vale 1, nell'intorno del polo (dove non si ha alcuna deformazione), mentre arriva a 2, sulla circonferenza che rappresenta l'equatore (dove le dimensioni di un oggetto lineare sulla rappresentazione sono doppie di quelle del suo corrispondente sull'ellissoide).

2.3 Proiezione cilindrica equivalente di Lambert

Nella proiezione cilindrica equivalente di Lambert (come illustra la fig.10) il cilindro è disposto tangente all'equatore ed il punto proiettante (che è variabile) è il punto all'infinito del piano del meridiano del punto che si sta proiettando in direzione ortogonale all'asse del cilindro; cosicché si ha:

$$x = R\lambda \qquad y = R \sin \varphi$$

Pertanto le trasformate dei meridiani ($\lambda = cost$) sono rette equidistanti, parallele all'asse y , ed i paralleli ($\varphi = cost$) sono rette parallele all'asse x , aventi una distanza da questo proporzionale a: $\sin \varphi$.

Dall'espressione generale del modulo di deformazione areale, in base alle delle equazioni della proiezione cilindrica equivalente di Lambert, si ricava:

$$m_A = \frac{1}{R \cdot R \cos \varphi} R \cos \varphi \cdot R = 1$$

dimostrando così che la rappresentazione è equivalente.

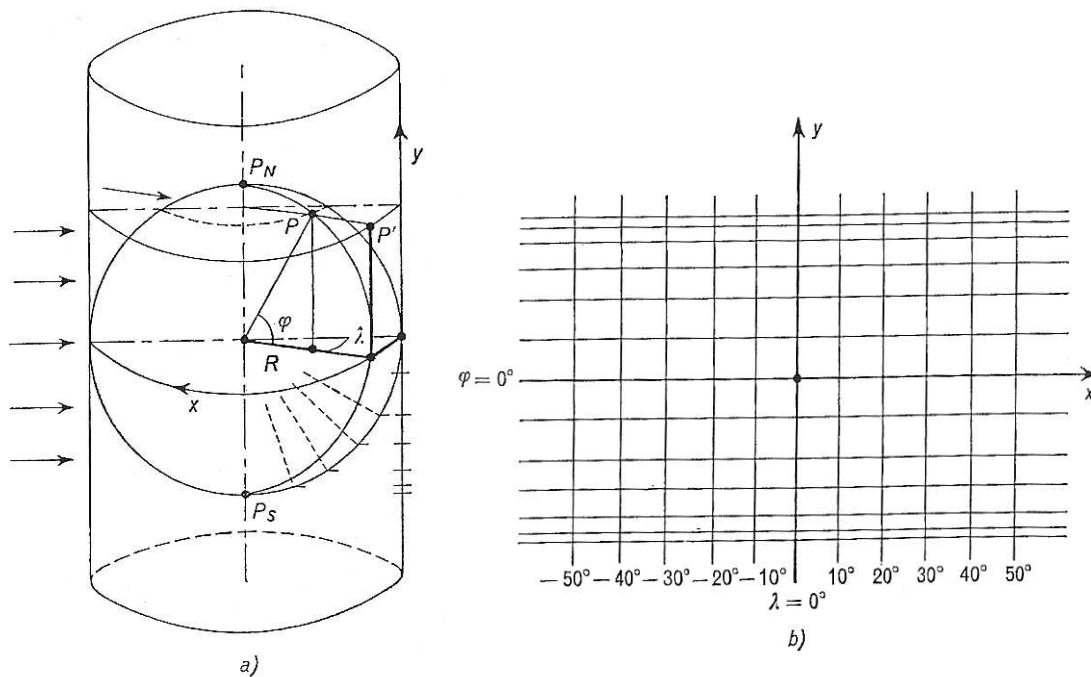


Fig.10. Proiezione equivalente di LAMBERT: a) schema della proiezione; b) reticolato geografico

2.4 Proiezione conica ordinaria o di Tolomeo

Per ottenere questa proiezione afilattica, si pone il cono tangente ad un parallelo di latitudine φ_0 (come illustra la fig. 11) e si proiettano i meridiani dal centro della sfera (che si trasformano nelle generatrici del cono). Invece i paralleli non si ottengono per proiezione, ma sono riportati, lungo le sezioni del cono (normali all'asse), ad una distanza reciproca, uguale all'arco di meridiano compreso fra di essi (ad esempio, nella fig. fig. 11, il segmento $P'Q'$ è uguale all'arco PQ), perché la proiezione è modificata.

L'angolo ϑ fra la trasformata del meridiano di riferimento e quella di un meridiano generico non è uguale alla differenza di longitudine λ , ma si ha: $\vartheta = \lambda \sin \varphi_0$. Infatti la lunghezza d_0 della generatrice del cono, compresa fra il vertice ed il punto di tangenza, vale: $d_0 = R / \tan \varphi_0$, e l'arco di parallelo corrispondente alla differenza di longitudine λ ha una lunghezza: $l_0 = \lambda R \cos \varphi_0$. Inoltre poiché nello sviluppo del cono sul piano d_0 e l_0 conservano le loro dimensioni, risulta:

$$\vartheta = \frac{R \cos \varphi_0 \cdot \lambda}{R \cot \varphi_0} = \lambda \sin \varphi_0$$

cosicché l'angolo al vertice, del settore circolare corrispondente al cono sviluppato, è minore di 2π .

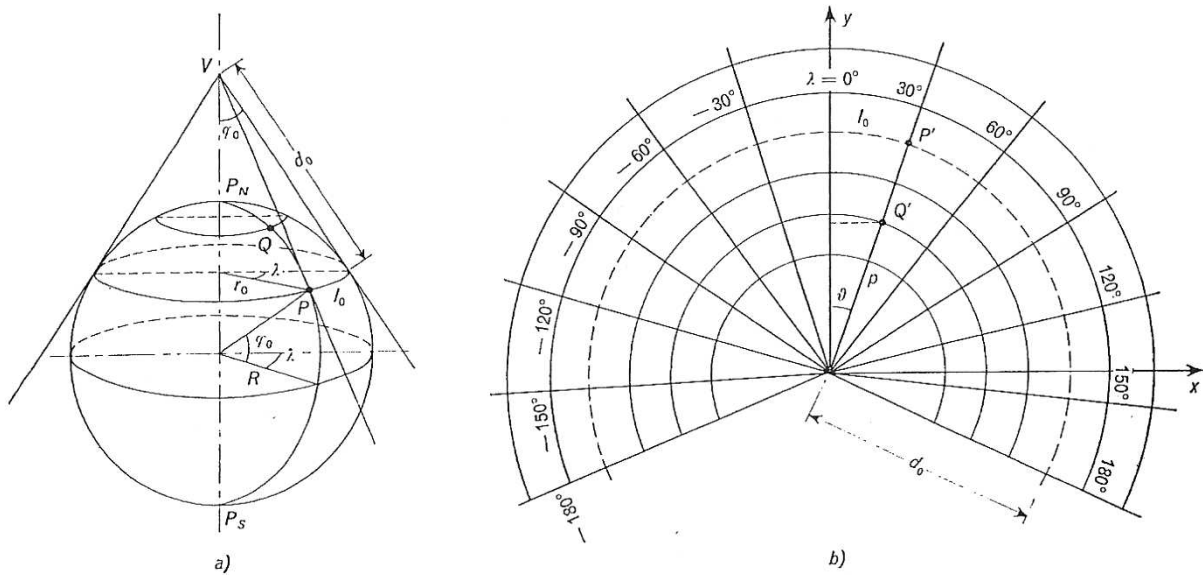


Fig. 11 – Proiezione conica ordinaria o di Tolomeo: a) schema della proiezione; b) reticolato geografico

Il parallelo alla latitudine φ_0 si trasforma in una circonferenza di raggio: $d_0 = R/\tan \varphi_0$, mentre il parallelo alla (generica) latitudine φ , per il modo in cui i paralleli sono riportati sul cono, si trasforma in una circonferenza di raggio: $p = R/\tan \varphi_0 - R(\varphi - \varphi_0)$. Di conseguenza, posto: $a = R(1/\tan \varphi_0 + \varphi)$, e $b = \sin \varphi_0$, si ha: $p = a - R\varphi$ e $\vartheta = b\lambda$, cosicché le equazioni della carta si scrivono come:

$$x = p \sin \vartheta = (a - R\varphi) \sin b\lambda \qquad y = p \cos \vartheta = (a - R\varphi) \cos b\lambda$$

3. Equazioni differenziali delle rappresentazioni

3.1 Equazioni differenziali delle rappresentazioni conformi

In una rappresentazione conforme, la deformazione angolare è nulla in ogni punto e per ogni angolo; di conseguenza, si ha: $\delta = 0$, da cui risulta: $\rho\sqrt{g/e}/r - 1 = 0$, cosicché si ha: $g = r^2e/\rho^2$, ovvero:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{r^2}{\rho^2} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \right)$$

Poiché la deformazione angolare è nulla, le trasformate dei meridiani ed i paralleli si incontrano ad angolo retto e così si ha: $\cos \omega = f/\sqrt{eg} = 0$, da cui: $f = 0$, ovvero:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

Tuttavia è opportuno trasformare le due ultime espressioni, introducendo la coordinata curvilinea u (chiamata latitudine ridotta), in luogo della coordinata curvilinea φ , legata a questa dalla relazione:

$$du = \frac{\rho}{r} d\varphi \quad \text{ovvero:} \quad u = \int_0^{\varphi} \frac{\rho}{r} d\varphi$$

Calcolando l'integrale, si ottiene:

$$u = \ln \left(\left(\frac{1 - e \cdot \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \cdot \operatorname{sen} \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi}} \right) = \ln \left(\left(\frac{1 - e \cdot \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \cdot \operatorname{sen} \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

dove e è la radice dell'eccentricità. Il sistema di coordinate sull'ellissoide u (funzione della sola φ) e λ è chiamato isoterma, perché permette di esprimere il quadrato dell'elemento lineare ds_e^2 , in modo che i coefficienti di du e $d\lambda$ siano uguali: $ds_e^2 = r^2 du^2 + r^2 d\lambda^2 = r^2 (du^2 + d\lambda^2)$, cosicché:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{d\varphi} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{d\varphi} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial y}{\partial u}$$

per cui le due condizioni per le rappresentazioni conformi (cioè: $g = r^2 e / \rho^2$ e $f = 0$) diventano:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{ovvero:} \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} / \frac{\partial x}{\partial \lambda} = - \frac{\partial x}{\partial u} / \frac{\partial y}{\partial u}$$

Dalla prima delle due ultime espressioni, mettendo in evidenza $(\partial y / \partial u)^2$, al primo membro, ed anche $(\partial x / \partial \lambda)^2$, al secondo membro, e tenendo conto della seconda delle due ultime espressioni (nella sua forma modificata) si ha:

$$\left(\left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} / \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \right) = 0 \quad \text{cioè:} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \pm \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

In questa relazione, è opportuno non prendere in considerazione il segno meno, perché se si adottasse tale segno il modulo di deformazione areale delle carte conformi risulterebbe negativo (ovvero ad un quadrilatero

infinitesimo di area $d\sigma_e$, costruito con incrementi positivi di u e λ , corrisponderebbe un valore negativo dell'area $d\sigma_r$, del corrispondente quadrilatero infinitesimo sulla rappresentazione). Dopodiché tenuto conto di questo risultato, dalla suddetta espressione modificata si ricava:

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{\partial x}{\partial u}$$

cosicché le equazioni differenziali delle rappresentazioni conformi sono:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{\partial x}{\partial u}$$

Le rappresentazioni conformi sono così definite da un sistema di equazioni differenziali, alle derivate parziali, le cui soluzioni si possono trovare, a meno di funzioni arbitrarie. Questo significa che si possono avere infinite rappresentazioni conformi ed i vari tipi di carte si ottengono imponendo condizioni al contorno (cioè stabilendo come si trasforma un meridiano, oppure un'altra linea, o meglio quali valori deve assumere il modulo di deformazione lineare, lungo la trasformata di una determinata linea).

Inoltre dato: $g = r^2 e / \rho^2$ e $f = 0$, si ha che il modulo di deformazione (lineare), nelle rappresentazioni conformi, è indipendente dall'azimut α ; risultando:

$$m = \frac{\sqrt{e}}{\rho}$$

3.2 Uso delle funzioni di una variabile complessa per definire le rappresentazioni conformi

Le equazioni differenziali delle rappresentazioni conformi coincidono con le condizioni di monogeneità di Cauchy, cioè con le condizioni necessarie e sufficienti, affinché la variabile complessa: $y + ix$, si possa definire quale funzione della variabile complessa: $u + i\lambda$. Pertanto tutte le rappresentazioni conformi hanno equazioni che possono essere ricavate dalla relazione:

$$y + ix = f(u + i\lambda)$$

dove f è una funzione arbitraria la cui esistenza (ovvero la sua possibilità), esprime il legame funzionale fra le due variabili complesse e garantisce la conformità della rappresentazione. Questa ultima relazione può poi essere sviluppata in serie di Taylor, con termini immaginari, assumendo come incremento la quantità immaginaria: $i\lambda$ (con λ espresso in radianti), cosicché si ha:

$$y + ix = f(u) + f'(u)i\lambda + \frac{1}{2} f''(u)(i\lambda)^2 + \frac{1}{3!} f'''(u)(i\lambda)^3 + \frac{1}{4!} f^{IV}(u)(i\lambda)^4 + \frac{1}{5!} f^V(u)(i\lambda)^5 + \dots$$

e, tenuto conto che: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ecc.:

$$y + ix = f(u) + f'(u)i\lambda - \frac{1}{2}f''(u)\lambda^2 - \frac{1}{3!}f'''(u)i\lambda^3 + \frac{1}{4!}f^{IV}(u)\lambda^4 + \frac{1}{5!}f^V(u)i\lambda^5 - \dots$$

Uguagliando le parti reali ed i coefficienti della parte immaginaria si ha:

$$y = f(u) - \frac{1}{2}f''(u)\lambda^2 + \frac{1}{24}f^{IV}(u)\lambda^4 - \dots \quad x = f'(u)\lambda - \frac{1}{6}f'''(u)\lambda^3 + \frac{1}{120}f^V(u)\lambda^5 - \dots$$

Tutti i tipi di rappresentazioni conformi sono ottenuti specificando la funzione $f(u)$ e, tramite le derivate di questa funzione, tutti gli altri termini dei secondi membri. Infatti specificare la funzione $f(u)$ equivale a stabilire a quale valore della y deve corrispondere il valore della latitudine, per ogni punto del meridiano fondamentale ($\lambda = 0$), stabilendo così come si deve trasformare questo stesso meridiano. Il numero delle rappresentazioni conformi è teoricamente infinito; tuttavia in pratica, il numero di rappresentazioni semplici, adatte per la cartografia, è molto limitato.

3.3 Equazione differenziale delle rappresentazioni equivalenti

Nelle rappresentazioni equivalenti il modulo di deformazione areale deve essere costante ed uguale ad 1; di conseguenza, l'equazione differenziale delle rappresentazioni equivalenti devono soddisfare la condizione:

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = r\rho \quad \text{ovvero:} \quad \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = r^2$$

utilizzando le coordinate isomeriche u e λ . Si dimostra poi che una rappresentazione non può insieme essere equivalente e conforme, perché non esistono funzioni: $x = x(\varphi, \lambda)$ e $y = y(\varphi, \lambda)$, che soddisfano insieme l'equazione differenziale delle rappresentazioni equivalenti e le equazioni differenziali delle rappresentazioni conformi: $\partial y/\partial u = \partial x/\partial \lambda$ e $\partial y/\partial \lambda = -\partial x/\partial u$ (anche se, nella pratica, fa sì che una rappresentazione equivalente sia la meno lontana possibile dalle condizioni di conformità ed isogonia).

4. La rappresentazione conforme di Gauss

4.1 Formule della rappresentazione

La rappresentazione conforme di Gauss è ormai usata per tutta la cartografia ufficiale italiana (inoltre con questo tipo di rappresentazione, i calcoli e le compensazioni di reti sull'ellissoide, di qualsiasi estensione, sono ridotti a calcoli e compensazioni di reti piane, con notevoli semplificazioni nelle formule).

Le equazioni della rappresentazione di Gauss si ricavano dalle sopraccitate funzioni di variabile complessa, imponendo che il meridiano fondamentale ($\lambda = 0$) si sviluppi in vera grandezza, lungo l'asse delle y :

$$y_{(\lambda=0)} = f(u) = \int_0^u r \, du = \int_0^\varphi \rho \, d\varphi$$

Questa condizione è sufficiente a definire la rappresentazione, perché si possono determinare tutte le derivate delle funzioni di variabile complessa, nota la funzione $f(u)$:

$$f'(u) = r = N \cos \varphi \qquad f''(u) = \frac{dr}{du} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{du} = -r \sin \varphi = -N \sin \varphi \cos \varphi$$

e così via per le derivate successive. I valori di questa funzione (ovvero le lunghezze l_φ dell'arco di meridiano compreso fra le latitudini 0 e φ) sono tabulati sulle Tavole dell'Ellissoide e, volendo ottenere un'espressione di l_φ , si ricorre ad uno sviluppo in serie della funzione integranda ρ che l'integrata diventa:

$$f(u) = l_\varphi = A\varphi - B \sin 2\varphi + C \sin 4\varphi - D \sin 6\varphi + \dots$$

dove i coefficienti A, B, C, D, \dots dipendono dai valori dell'eccentricità e^2 e del semiasse equatoriale a , cosicché si ha, per fusi limitati:

$$y = l_\varphi + \frac{1}{2} \lambda^2 N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{24} \lambda^4 N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)$$

$$x = \lambda N \cos \varphi + \frac{1}{6} \lambda^3 N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{1}{120} \lambda^5 N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2)$$

$$\text{dove: } t = \tan \varphi \text{ e } \eta^2 = \frac{N - \rho}{\rho} = \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi$$

La serie, per valori di λ limitati a qualche grado, converge rapidamente e, ad una latitudine media, il termine in λ^4 vale 4 cm per $\lambda = 1/40 \text{ rad} \equiv 1^\circ.5$, ed il termine in λ^5 vale 8 cm per $\lambda = 1/20 \text{ rad} \equiv 3^\circ$. Dopodiché partendo dalla relazione inversa della funzione: $y + ix = f(u + i\lambda)$:

$$u + i\lambda = g(y + ix)$$

e sviluppando in serie, in maniera analoga, si ottengono le formule inverse della rappresentazione che forniscono le coordinate geografiche φ e λ , in funzione delle coordinate x e y della rappresentazione.

Pertanto denotata con φ_1 la latitudine dell'estremo di un arco di meridiano, di lunghezza y , si ha:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{x^2}{2N_1^2} (1 + \eta_1^2) t_1 + \frac{x^4}{24N_1^4} (5 + 3t_1^2 + 6\eta_1^2 - 6\eta_1^2 t_1^2) t_1$$

$$\lambda = \frac{x}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{x^3}{6N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) + \frac{x^5}{120N_1^5 \cos \varphi_1} (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4 + 6\eta_1^2 + 8\eta_1^2 t_1^2)$$

dove: $t_1 = \tan \varphi_1$ e $\eta_1^2 = \left(\frac{N - \rho}{\rho} \right)_{\varphi=\varphi_1}$, e N_1 è la gran normale, calcolata per la latitudine φ_1 .

Anche il valore φ_1 , essendo noto y , si può ricavare dalle Tavole dell'Ellissoide. In pratica, il calcolo delle coordinate Gaussiane, note le coordinate ellissoidiche e viceversa, si esegue agevolmente mediante le Tavole, predisposte dall'IGM o con le formule di Ballarin (valevoli con errori rispettivamente inferiori al millimetro o al millesimo di secondo, fino ad una longitudine di 15°).

4.2 Reticolato geografico

Ponendo $\lambda = cost$, nelle equazioni della rappresentazione conforme di Gauss, si ottengono le equazioni parametriche del meridiano, caratterizzato dallo specifico valore di longitudine: $x = x(\varphi)$ e $y = y(\varphi)$, ed analogamente, ponendo $\varphi = cost$, nelle stesse formule, si ottengono le equazioni parametriche del parallelo, caratterizzato dallo specifico valore di latitudine: $x = x(\lambda)$ e $y = y(\lambda)$. Le trasformate dei meridiani e dei paralleli sono delle linee alquanto complesse (in particolare, quelle dei paralleli sono prossime ad archi di parabola). La fig. 12 mostra il reticolo geografico del semiellissoide compreso fra le longitudini $\pm 90^\circ$. In particolare, poiché la proiezione di Gauss è prossima a quella ottenuta proiettando i punti dell'ellissoide, dal centro su un cilindro tangente al meridiano fondamentale, i meridiani di latitudine $\pm 90^\circ$, si scindono in due semirette parallele all'asse dell'equatore.

Allora se si vogliono ridurre le fortissime deformazioni, occorre limitare il valore della differenza di longitudine dei punti, rispetto al meridiano fondamentale, per cui la rappresentazione è fatta per fusi di una determinata ampiezza, per ognuno dei quali si assume un diverso meridiano di riferimento. In questo caso, il valore di longitudine adottato è la differenza fra la longitudine di un punto e quella del meridiano di riferimento (nella fig. 13, i fusi hanno un'ampiezza di 20° e, sotto ogni fuso, si legge la longitudine del meridiano di riferimento). Tuttavia nelle applicazioni pratiche, i fusi non superano l'ampiezza di 6° , ovvero la longitudine non supera il valore di: $3^\circ \cong 1/20 \text{ rad}$, che permette di semplificare notevolmente le formule, in quanto i termini in λ^4 , contenuti in espressioni di grandezze adimensionali, risultano dell'ordine di $0.5 \cdot 10^5$ e possono, in generale, essere trascurati.

4.3 Angolo fra la trasformata di un meridiano e l'asse delle ordinate

L'angolo γ che, in un punto P della rappresentazione, la tangente alla trasformata del meridiano forma con la parallela all'asse y della rappresentazione (fig.14), è uguale all'angolo che la tangente alla trasformata

del parallelo forma con la parallela all'asse x , dato che, per essere la rappresentazione conforme, le trasformate del meridiano e del parallelo, passanti per un punto, formano un angolo di retto.

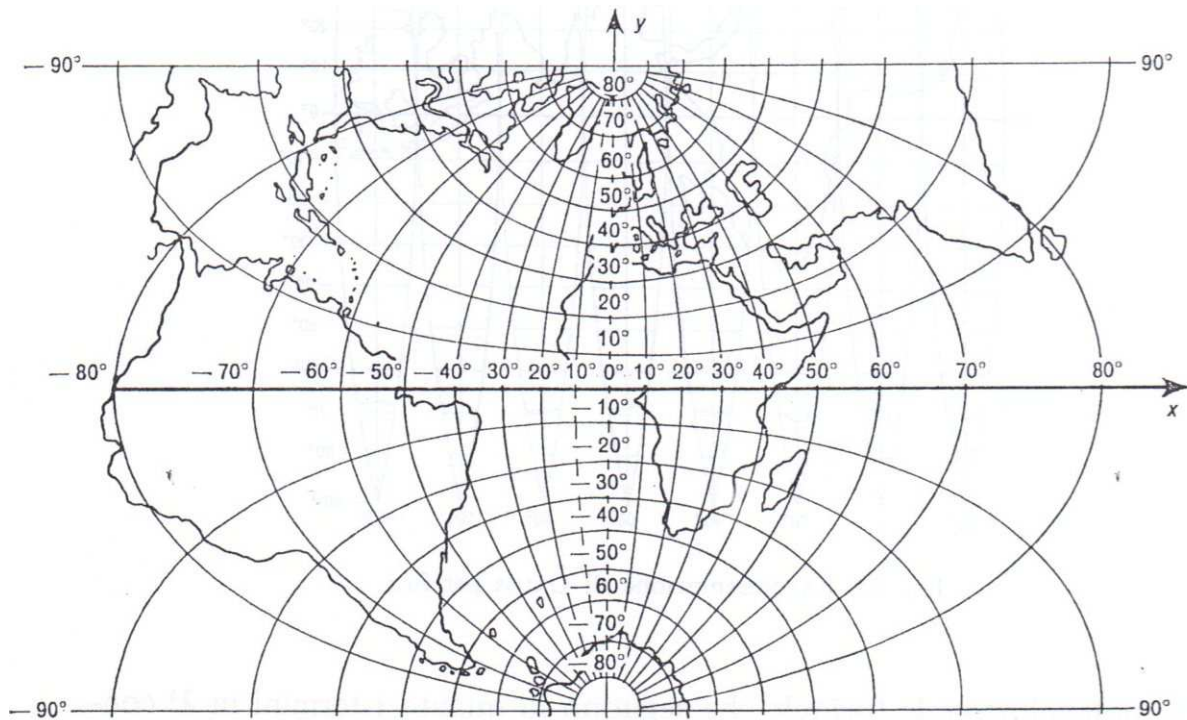


Fig. 12 – Reticolato geografico della rappresentazione di Gauss

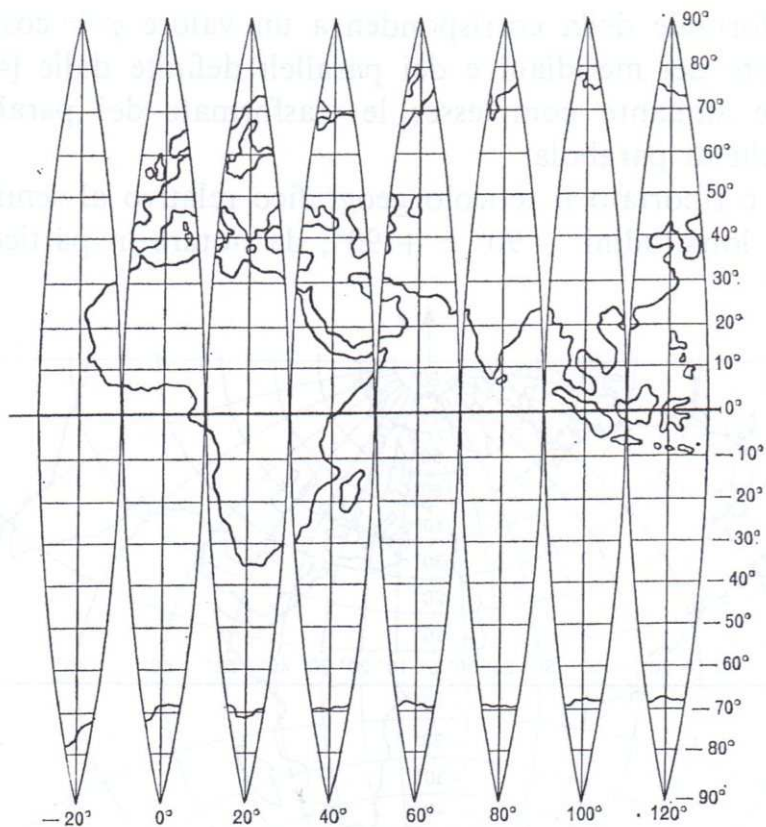


Fig. 13 – Rappresentazione di Gauss per fusi

Pertanto considerando il triangolo infinitesimo rettangolo che ha per lati un elemento dp di trasformata del parallelo e per cateti dx e dy , si ha:

$$\tan \gamma = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\lambda} d\lambda \Big/ \frac{dx}{d\lambda} d\lambda = \frac{dy}{d\lambda} \Big/ \frac{dx}{d\lambda}$$

dove si considera solo la variabilità con la longitudine, perché si considera un elemento di parallelo.

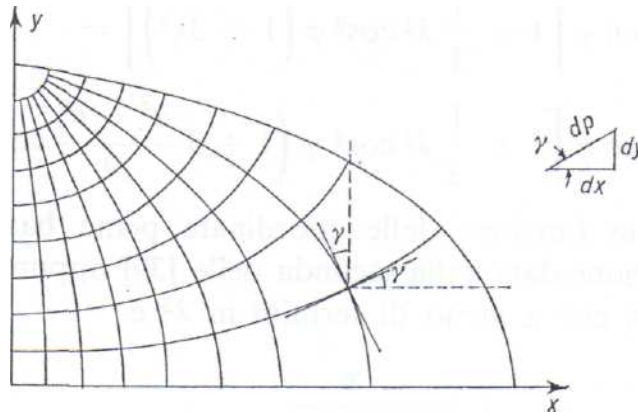


Fig. 14 – Angolo fra la trasformata di un meridiano e l'asse cartografico

Eseguendo le due derivate, contenute nella espressione precedente, e trascurando i termini in λ^4 e superiori (e così, di conseguenza, anche i termini in η^2 e η^4), si ha:

$$\frac{dy}{d\lambda} = \lambda N \sin \varphi \cos \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi (5 - t^2) + \dots \right) \quad \frac{dx}{d\lambda} = N \cos \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi (1 - t^2) + \dots \right)$$

e, sempre trascurando i termini in λ^4 e superiori (essendo anche: $t = \tan \varphi$):

$$\tan \gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} \cos^2 \varphi (1 + t^2) + \dots \right) = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi + \dots$$

Dopodiché sviluppando in serie la funzione arcotangente: $\gamma = \tan \gamma - \frac{\tan^3 \gamma}{3} + \frac{\tan^5 \gamma}{5} - \dots$, con la stessa approssimazione, si ottiene:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{1}{3} \lambda^3 \sin \varphi - \frac{1}{3} \lambda^3 \sin^3 \varphi + \dots = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{3} \lambda^2 \cos^2 \varphi \right) + \dots$$

Inoltre per un fuso avente l'ampiezza di 6° (dove: $|\lambda| \leq 3^\circ$), con la stessa procedura, si ottiene:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{3} \lambda^2 \cos^2 \varphi (1 + 3\eta^2) \right) + \dots = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{3} \lambda^2 \cos^2 \varphi \left(1 + 3 \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi \right) \right) + \dots$$

con un'approssimazione di $0.01''$ e non trascurando il termine in η^2 (che dà un contributo di qualche centesimo di secondo sessagesimale). Infine $\tan \gamma$, è ottenuta in funzione delle coordinate piane ed a meno di termini in λ^3 e superiori, sostituendo l'espressione: $\lambda = x/N \cos \varphi$, in quest'ultima espressione da cui:

$$\tan \gamma = \frac{x}{N} \tan \varphi \left(1 + \frac{1}{3} \frac{x^2}{N^2 \cos^2 \varphi} + \dots \right)$$

4.4 Modulo di deformazione lineare

Poiché la rappresentazione è conforme, basta ricavare l'espressione del modulo di deformazione (lineare) lungo il parallelo dato, calcolando: $m_p^2 = m^2 = g^* = g/r^2 = ((\partial x/\partial \lambda)^2 + (\partial y/\partial \lambda)^2)/r^2$. Dopodiché in base alle derivate parziali, rispetto a λ , delle equazioni della rappresentazione conforme di Gauss (trascurando i termini in λ^4 e superiori), si ha:

$$m^2 = 1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad m = \sqrt{1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi} \cong 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi$$

dove: $N = r \cos \varphi$, e ponendo: $\lambda = x/N \cos \varphi$, cosicché la stessa espressione diventa:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2N^2}$$

Per avere il modulo di deformazione di un segmento di retta che congiunge sulla rappresentazione un punto P'_1 (di coordinate x_1 e y_1), ed un punto P'_2 (di coordinate x_2 e y_2), occorre integrare, a meno di termini dell'ordine di $(x/N)^4$, l'elemento:

$$ds_e = \frac{ds_r}{m} = ds_r / \left(1 + \frac{x^2}{2N^2} \right) \cong ds_r \left(1 - \frac{x^2}{2N^2} \right)$$

e indicando con ϑ l'angolo di direzione del segmento orientato $P'_1 P'_2$ con la parallela all'asse y , cosicché:

$$ds_r = \frac{dx}{\sin \vartheta} \quad \text{si ha:} \quad ds_e = \frac{dx}{\sin \vartheta} - \frac{1}{2 \sin \vartheta} \frac{x^2}{N^2} dx$$

Dopodiché integrando fra x_1 e x_2 , si ottiene la lunghezza $s_e = P_1 P_2$ del segmento di linea (che corrisponde sull'ellissoide al segmento di retta $P'_1 P'_2$):

$$s_e = \frac{x_2 - x_1}{\sin \vartheta} - \frac{1}{\sin \vartheta} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{2N^2} dx$$

e come lecito, dando a N^2 un valore medio costante pari a $\rho_m N_m$ (ovvero al raggio della sfera locale calcolato in un punto intermedio fra P'_1 e P'_2), si ottiene:

$$s_e = \frac{x_2 - x_1}{\sin \vartheta} - \frac{1}{6\rho_m N_m} \frac{x_2^3 - x_1^3}{\sin \vartheta} = \frac{x_2 - x_1}{\sin \vartheta} - \frac{1}{6\rho_m N_m} \frac{x_2 - x_1}{\sin \vartheta} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$$

Infine indicando con: $s_r = (x_2 - x_1)/\sin \vartheta$, la lunghezza del segmento $P'_1 P'_2$, sempre a meno di termini dell'ordine di $(x/N)^4$ e superiori, si ha:

$$s_e = s_r \left(1 - \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{6\rho_m N_m} \right) \quad \text{e} \quad m_{12} = \frac{s_r}{s_e} = 1 + \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{6\rho_m N_m}$$

L'espressione del modulo di deformazione (lineare) del segmento di retta $P'_1 P'_2$ sulla rappresentazione è dedotta senza esaminare il tipo di linea sull'ellissoide, ma si mostra, nel prosieguo, come questo rappresenti praticamente anche il modulo di deformazione (lineare) di un arco di geodetica (così come si è già mostrato la sufficiente approssimazione delle geodetiche con altre linee sull'ellissoide).

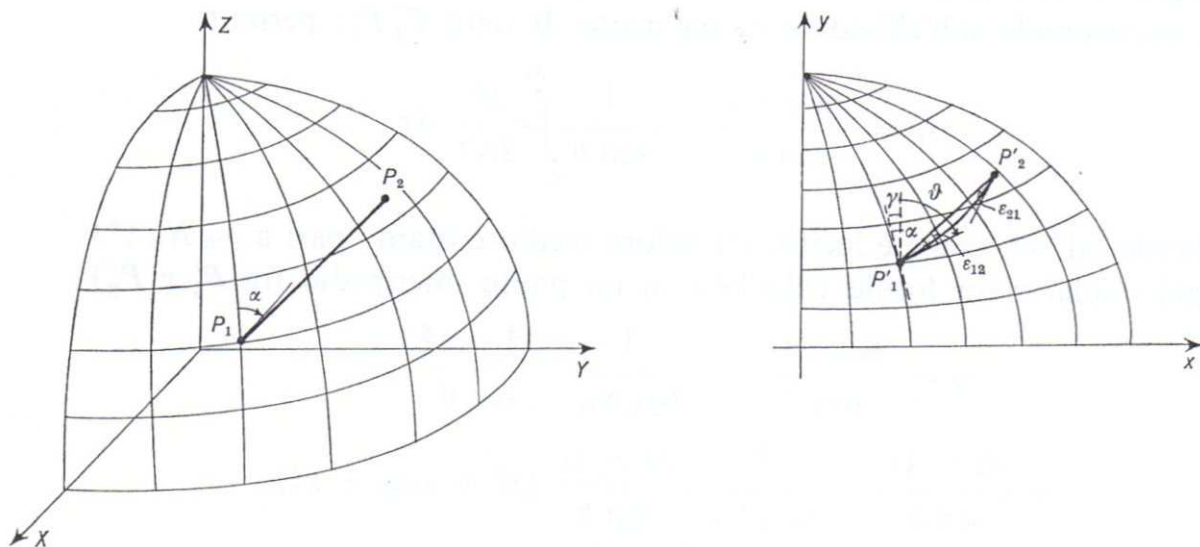


Fig. 15 – Angolo di direzione della tangente alla trasformata della geodetica

4.5 Trasformate delle geodetiche sul piano della rappresentazione conforme

Un arco di geodetica P_1P_2 sull'ellissoide è trasformato sul piano della rappresentazione di Gauss in un segmento di linea, congiungente i punti corrispondenti $P'_1P'_2$ (come mostra la fig.15), che gode della proprietà di formare con la trasformata del meridiano un angolo uguale all'azimut che la geodetica forma con il meridiano, data la rappresentazione conforme. Allora dato l'azimut α della geodetica in P_1 , la tangente alla trasformata della geodetica in P'_1 forma, con l'asse delle y , un angolo ϑ , pari a: $\vartheta = \alpha - \gamma$, dove γ è la convergenza del meridiano. Pertanto dallo studio della trasformata della geodetica, si deduce che l'angolo ε_{12} , fra la tangente alla trasformata in P'_1 ed il segmento rettilineo congiungente gli estremi P'_1 e P'_2 , è:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{6\rho_c N_c} (y_1 - y_2)(2x_1 + x_2) \quad (\text{e} \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{6\rho_c N_c} (y_2 - y_1)(2x_2 + x_1) \quad \text{in } P'_2)$$

dove teoricamente ρ_c e N_c sono calcolati nel punto che divide il segmento $P'_1P'_2$ nel rapporto: 1:2, da P'_1 (e viceversa nel rapporto: 2:1, sempre da P'_1 , ovvero nel rapporto: 1:2, da P'_2), mentre in pratica si usano i valori medi ρ_m e N_m , validi per zone della rappresentazione, estese di qualche grado in latitudine e con una longitudine inferiore a 3° . Gli angoli ε_{12} e ε_{21} sono chiamati riduzione angolare alla corda e, per individuare la giacitura della trasformata della geodetica rispetto alla corda, congiungente gli estremi, vale la regola che, se ε_{ij} è positivo, ruotando in senso orario, a partire dalla parallela all'asse y , si incontra prima la trasformata e poi la corda, viceversa se ε_{ij} è negativo, si incontra prima la corda e poi la trasformata.

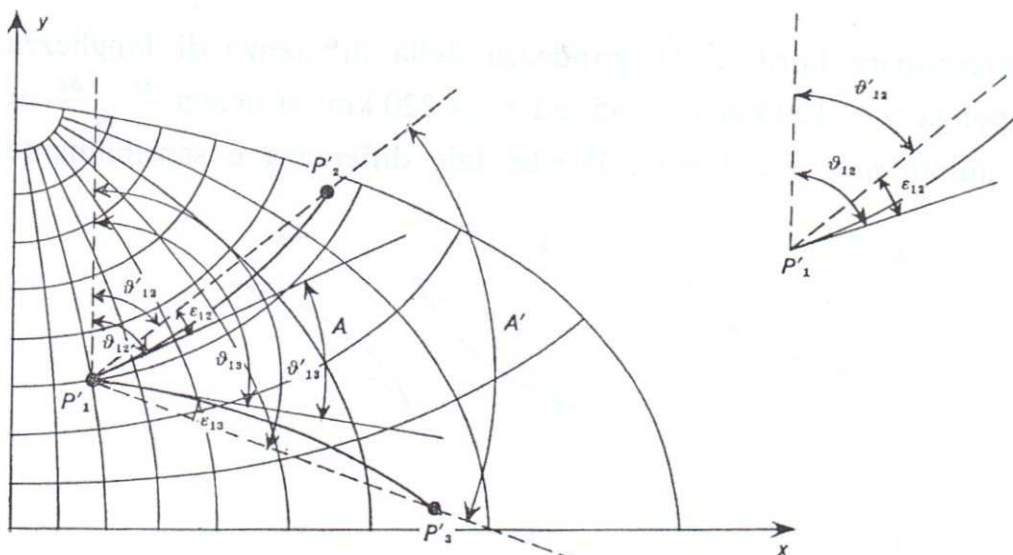


Fig. 16 – Riduzione dell'angolo tra le trasformate di due geodetiche all'angolo tra i segmenti-corda

Come mostra la fig. 16, se ϑ_{12} è l'angolo di direzione della tangente alla trasformata con la parallela all'asse y condotta per P'_1 , l'analogo angolo ϑ'_{12} (per la corda) risulta: $\vartheta'_{12} = \vartheta_{12} + \varepsilon_{12}$ e, considerando poi una

seconda trasformata $P'_1 P'_3$, uscente dal punto P'_1 , si ha: $\vartheta'_{13} = \vartheta_{13} + \varepsilon_{13}$, per cui l'angolo A' fra le due corde vale: $A' = \vartheta'_{13} - \vartheta'_{12} = (\vartheta_{13} + \varepsilon_{13}) - (\vartheta_{12} + \varepsilon_{12}) = (\vartheta_{13} - \vartheta_{12}) + \varepsilon_{13} - \varepsilon_{12} = A + \varepsilon_{13} - \varepsilon_{12}$, dove l'angolo A , fra le tangenti alle trasformate, è uguale all'angolo fra le geodetiche sull'ellissoide, data la rappresentazione conforme.

Le riduzioni angolari alla corda, per valori di longitudine inferiori a 3° , sono molto piccole e ponendo, come caso estremo; $y_1 - y_2 = 200 \text{ km}$, $2x_1 + x_2 = 600 \text{ km}$ ed assumendo: $\rho_c = N_c = 6.3 \cdot 10^3 \text{ km}$, si ottiene: $\varepsilon_{12} = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cong 100''$. La fig. 17 riporta alcuni esempi che mostrano come la trasformata della geodetica si disponga rispetto alla corda che ne unisce gli estremi.

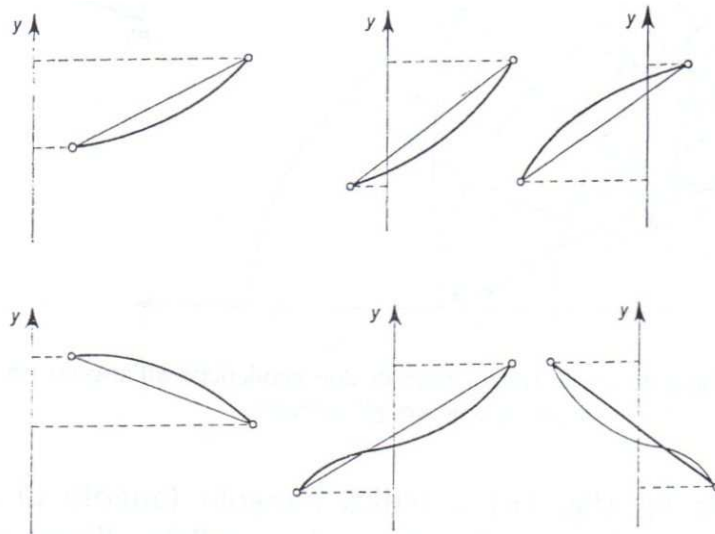


Fig. 17 – Comportamento della trasformata di un arco di geodetica rispetto al segmento-corda

Infine la differenza relativa, fra la lunghezza s_t della trasformata $P'_1 P'_2$ e la lunghezza s_c della corda, vale:

$$\frac{s_t - s_c}{s_t} = \frac{x_1(x_1 + s_t \sin \alpha) s_t^2 \cos^2 \alpha}{24N^4}$$

Per determinare l'ordine di grandezza della differenza di lunghezza, si pone, come caso estremo, $s_t = 100 \text{ km}$, $\alpha = 45^\circ$ ed $x_1 = 220 \text{ km}$, si ricava: $(s_t - s_c)/s_t \cong 10^{-8}$, da cui: $s_t - s_c \cong 1 \text{ mm}$. Poiché tale differenza è sensibilmente inferiore all'errore della misura più precisa della distanza s_t , si ha che, per fusi di ampiezza non superiore a 6° , le lunghezze degli archi di trasformata sono pressoché uguali alle lunghezze delle corde congiungenti i loro estremi (ed il modulo di deformazione lineare, di un arco di trasformata, è lo stesso di quello di un segmento). Invece il modulo di deformazione (lineare), di un arco di geodetica, può raggiungere (anche per fusi limitati a 6°), valori sensibilmente più alti e, considerando un arco di trasformata lungo circa 100 km , disposto in parallelo all'asse y (in corrispondenza di un'ascissa: $x_1 = x_2 = 200 \text{ km}$), si ha: $m_{12} = 1,0005$, ovvero una differenza di lunghezza dell'ordine di 50 m .

4.6 Cartografia ufficiale italiana

La carta ufficiale italiana, alla scala 1:25.000, è disegnata nella rappresentazione conforme di Gauss e, onde limitarne le deformazioni lineari, è eseguita per fusi di ampiezza 6° . Poiché il punto più ad occidente e quello più ad oriente del territorio italiano distano, in longitudine, circa 12° , la carta è divisa in due fusi (come mostra la fig. 18) con i meridiani di riferimento rispettivamente a 9° e 15° est di Greenwich. Il primo fuso (fuso Ovest) si estende, ad oriente, fino al meridiano di Roma Monte Mario ($\lambda = 12^\circ 27' 08'' .40 EG$) ed una zona di sovrapposizione, con il secondo fuso (fuso Est), arriva al meridiano $12^\circ EG$. La zona di sovrapposizione, ovvero la zona rappresentata due volte, è utile per eliminare difficoltà riguardanti punti al limite dei due fusi. Il fuso est si estende verso oriente, per ulteriori $30'$, per coprire anche una piccola parte della penisola salentina che altrimenti andrebbe rappresentata in un terzo fuso.

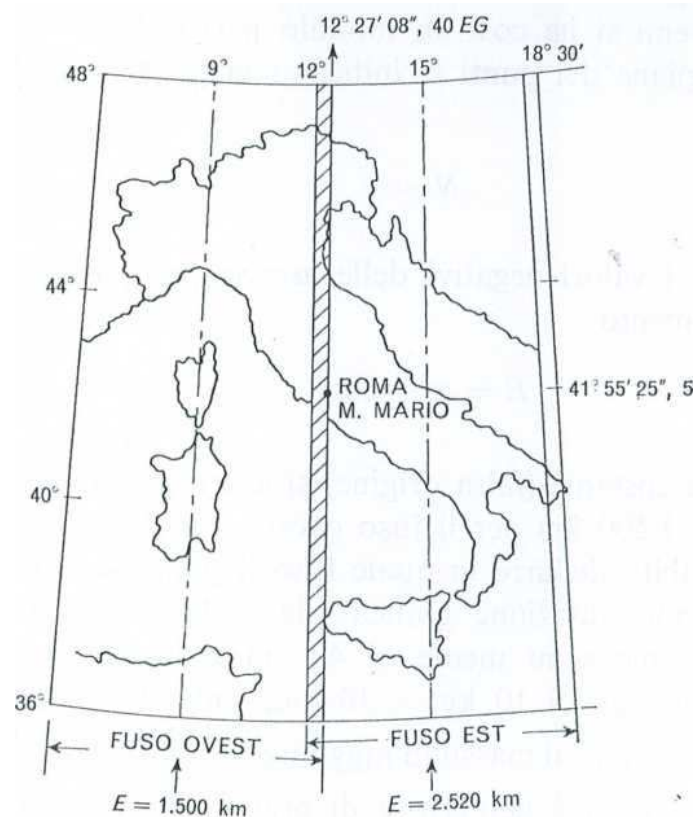


Fig. 18 – Fusi della cartografia italiana

In un fuso di 6° d'ampiezza, il modulo di deformazione (lineare) varia tra 1 (per $\lambda = 0$) e 1.0008 (per $\lambda = 3^\circ$). Inoltre per ridurre alla metà le deformazioni massime, si contrae la rappresentazione moltiplicando le coordinate piane per il coefficiente 0.9996, con la conseguenza di avere un modulo di deformazione costante pari a 0.9996, sull'asse delle y (che rappresenta il meridiano di riferimento) ed un modulo di deformazione agli estremi del fuso di 1.0004, avendo così un modulo pari a 1, lungo due linee intermedie fra il meridiano di riferimento ed i meridiani estremi. In generale, le coordinate piane dei punti si indicano con le lettere N ed E , cosicché si ha: $N = y$, mentre per evitare i valori negativi delle ascisse, nei punti ad ovest del meridiano di riferimento, si pone: $E = x + cost$, dove il valore della costante (chiamata falsa

origine) si assume pari a 2.520 km , per il fuso est, ed a 1.500 km , per il fuso ovest (cosicché si deduca subito, dal valore di questa coordinata in un punto, in quale fuso si trovi il punto medesimo).

Dato che la rappresentazione grafica alla scala $1:25.000$ è suddivisa in fogli, aventi dimensioni medie di: $40\text{ cm} \times 40\text{ cm}$, corrispondenti alle dimensioni reali di: $10\text{ km} \times 10\text{ km}$, sulla diagonale (pari a circa 56 cm) si ha una deformazione che non supera il valore di $4 \times 560/10.000 = 0.22\text{ mm}$ (cioè dell'ordine dell'errore di graficismo). Di conseguenza, i risultati di misure grafiche, fatte nell'ambito di un foglio, si possono ritenere non affette da deformazioni, nei limiti della precisione conseguibile. Tutto ciò non si verifica invece nel paragone fra le distanze, misurate sul terreno, e le distanze, dedotte dalle coordinate piane dei punti, perché la deformazione, in generale, supera gli errori di misura (ad esempio, in confronto a precisioni strumentali relative, variabili fra 10^{-5} e 10^{-6} , fanno riscontro deformazioni relative di distanze nella rappresentazione che possono raggiungere il valore di 10^{-4}).

I fogli al 25.000 (chiamati tavolette) sono tagliati secondo le trasformate di meridiani e paralleli, con una differenza di latitudine di $5'$ e longitudine di $7'30''$, corrispondenti in media a dimensioni di: $40\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ (come mostra la fig. 19). In questo modo, le rette: $x = cost$ e $y = cost$, sono inclinate, rispetto ai bordi del foglio, dell'angolo γ (tra la trasformata del meridiano e l'asse verticale) il cui valore, nel punto al centro del foglio, è riportato sul bordo. Anche queste rette sono riportate sui fogli, con un intervallo di 1 km , e costituiscono il cosiddetto reticolato chilometrico.

La carta, rilevata per la scala: $1:25.000$, è disegnata anche alle scale: $1:50.000$ e $1:100.000$ (come illustra la fig. 20). Ogni foglio, alla scala $1:100.000$, contraddistinto da un numero, con le stesse dimensioni medie, comprende quattro quadranti, alla scala $1:50.000$, contrassegnati con i numeri romani **I**, **II**, **III** e **IV**. Ogni quadrante è suddiviso in quattro tavolette, alla scala $1:25.000$, individuate dalle sigle: **NO**, **NE**, **SO** e **SE** (come illustra la fig. 21).

Infine per l'unificazione delle cartografie europee, i rilievi di vari Stati sono collegati e si è eseguito un calcolo generale dei punti di inquadramento, orientando l'ellissoide in prossimità di Bonn. Le coordinate ellissoidiche e gaussiane sono leggermente diverse da quelle ottenute separatamente (su alcune tavolette, è riportato anche il reticolato chilometrico, denominato UTM, leggermente spostato, rispetto al reticolato originale).

5. Altre rappresentazioni

5.1 Rappresentazione di Mercatore

Se si impone che l'ascissa di un punto sia uguale all'arco di equatore, compreso tra il meridiano passante per il punto ed il meridiano fondamentale, si assume: $x = a\lambda$, essendo a il semiasse equatoriale. Dalla prima delle equazioni differenziali delle rappresentazioni conformi, si ottiene: $\partial y/\partial u = a$, in modo che, tenendo presente l'integrale della latitudine ridotta, si ha:

$$y = au = a \ln \left(\left(\frac{1 - esen\varphi}{1 + esen\varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

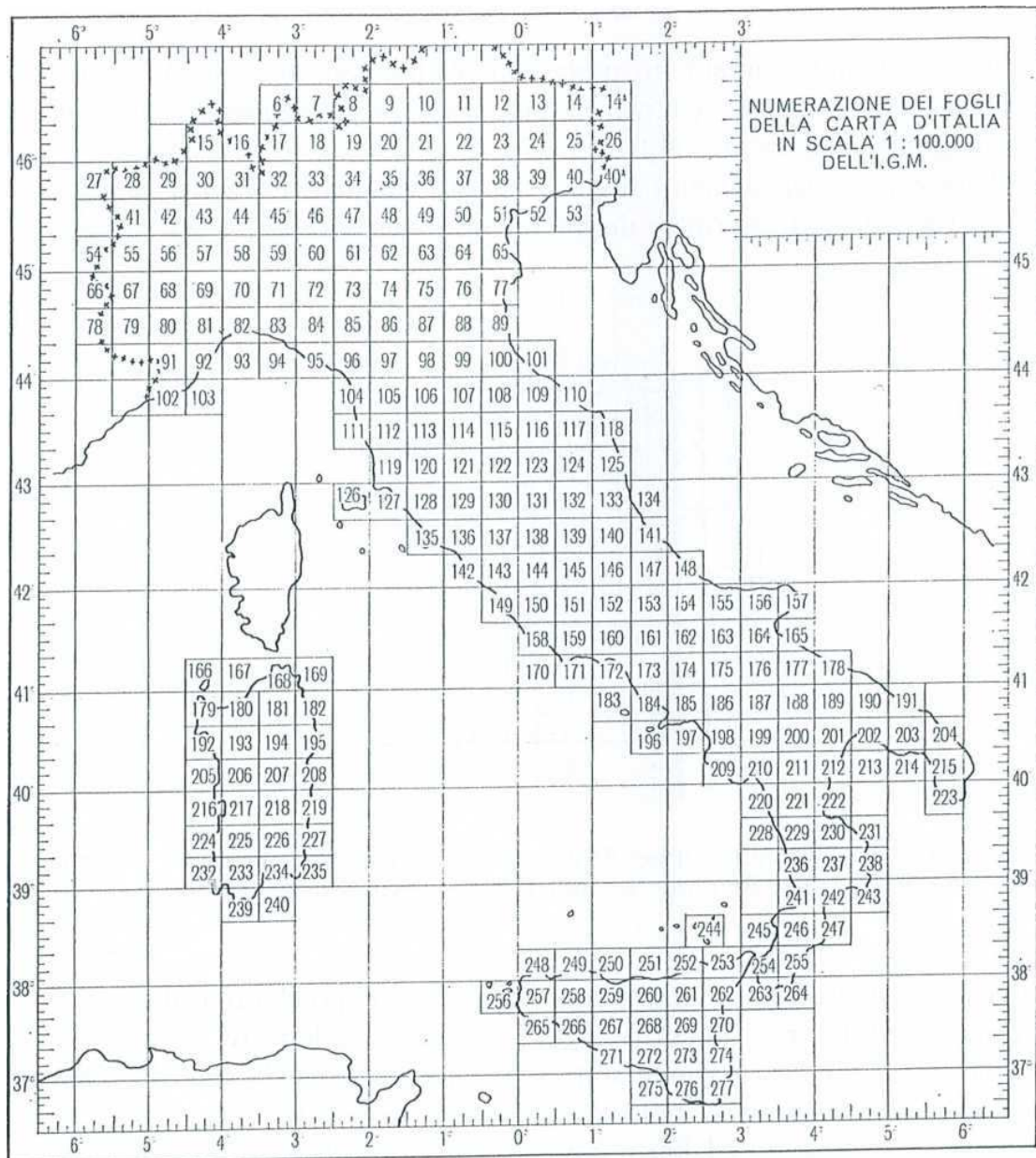


Fig. 20 – Suddivisione della carta d'Italia alla scala 1:100.000

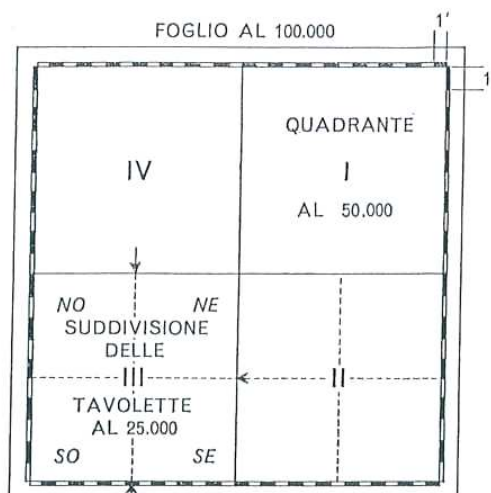


Fig. 21 – Suddivisioni del foglio alla scala 1:100.000

La seconda delle equazioni differenziali delle rappresentazioni conformi è identicamente soddisfatta, perché y non dipende da λ , così come x non dipende da u e φ . In questo modo, nel reticolato geografico (come illustra la fig. 22) i meridiani ed i paralleli sono evidentemente rappresentati da rette verticali ed orizzontali (l'asse x rappresenta l'equatore e l'asse y il meridiano fondamentale).

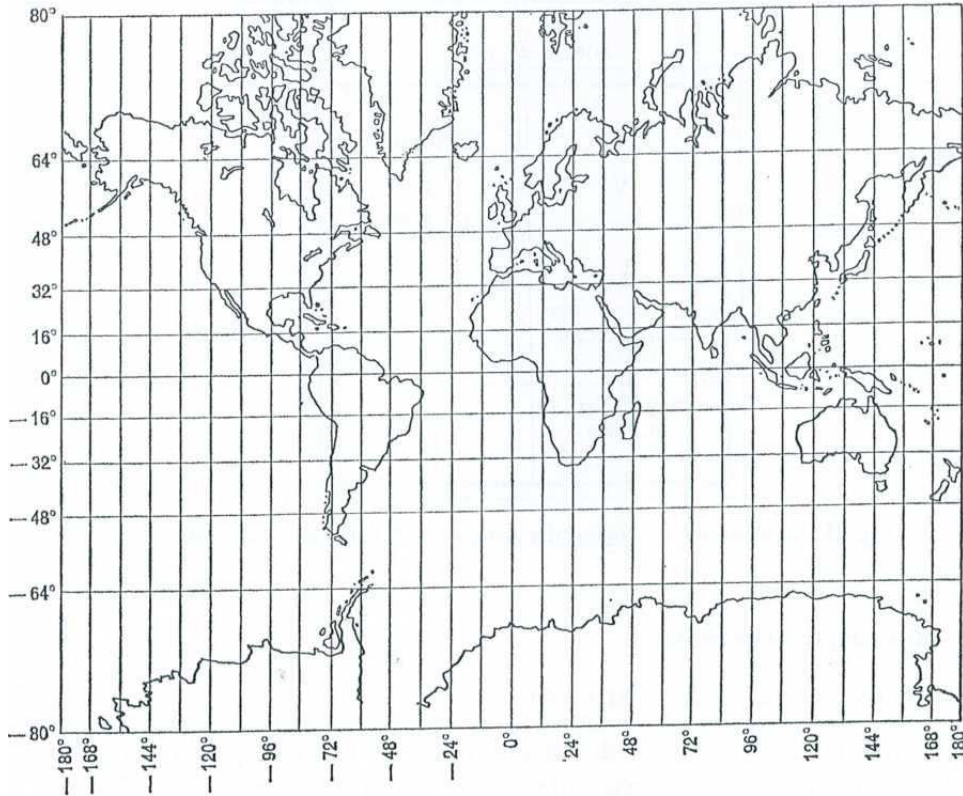


Fig. 22 – Reticolato geografico della rappresentazione di Mercatore

Poiché la rappresentazione è conforme, il modulo di deformazione (lineare) può essere calcolato in una direzione qualsiasi e, scegliendo la direzione del parallelo, si ha:

$$m_p = m = \sqrt{g^*} = \frac{a}{r} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos \varphi} \quad \text{essendo:} \quad r = \frac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

Allora lungo un parallelo, il modulo di deformazione (lineare) è costante, ma varia fortemente con la latitudine (come mostrato dalla tabella sottostante). Pertanto non è molto realistico usare la rappresentazione di Mercatore, in zone troppo lontane dall'equatore, dato che, ai poli, il modulo di deformazione (lineare) tende all'infinito.

$\varphi = 0$	10°	20°	40°	60°	80°
$m = 1$	1.0154	1.0638	1.3036	1.9950	5.7400

La rappresentazione di Mercatore sono molto utilizzate per la navigazione (come carte nautiche ed aeronautiche). Infatti presa sull'ellissoide una linea (lossodromia) che taglia i meridiani secondo un azimut costante, dal triangolo rettangolo infinitesimo che ha elementi: ds , per l'ipotenusa e per i cateti: $r d\lambda$ e $\rho d\varphi = r du$, si ottiene l'equazione della lossodromia:

$$\tan \alpha = \frac{r d\lambda}{r du} = \frac{d\lambda}{du} = \text{cost}$$

Dalle equazioni della rappresentazione di Mercatore, si ricava poi: $d\lambda = dx/a$ e $du = dy/a$, da cui deduce che la trasformata della lossodromia ha per equazione:

$$\tan \alpha = \frac{dx}{dy} = \text{cost}$$

ovvero la lossodromia è rappresentata da una retta che forma, con le trasformate dei meridiani, un angolo pari all'azimut della lossodromia stessa. Per trovare l'angolo della rotta (ovvero l'azimut) che porta da un punto ad un altro, è sufficiente congiungere i punti rappresentativi sulla carta e leggere l'angolo che questa retta forma con le trasformate dei meridiani.

Il percorso risulta più lungo di quello riferito alla geodetica che congiunge gli stessi punti (come nella navigazione ortodromica), ma questo richiede teoricamente una continua variazione dell'angolo di rotta. In effetti, per i lunghi percorsi, si determinano sulla carta un certo numero di punti intermedi che giacciono sulla geodetica e si naviga, dall'uno all'altro, secondo una lossodromia.

5.2 Rappresentazione di Flamsted o naturale

Preso come origine un punto O , di coordinate φ_0 e λ_0 , si assume:

$$y = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho d\varphi \quad \text{e} \quad x = r(\lambda - \lambda_0) = N \cos \varphi (\lambda - \lambda_0)$$

ovvero l'ordinata di un punto P è uguale all'arco di meridiano, compreso tra le latitudini dei punti O e P , e l'ascissa è uguale all'arco di parallelo compreso fra il punto P ed il meridiano di riferimento per O . Poiché le derivate, rispetto a φ e λ , delle equazioni della rappresentazione di Flamsted, risultano:

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = (\lambda - \lambda_0) \frac{dr}{d\varphi} = -(\lambda - \lambda_0) \rho \sin \varphi \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = r$$

Dall'equazione differenziale delle rappresentazioni equivalenti, si deduce che questa rappresentazione è equivalente, cosicché è unitario il suo modulo di deformazione areale.

Invece il suo modulo di deformazione (lineare) che dipende dall'orientamento delle linee ha espressione:

$$m^2 = (1 + (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \alpha - (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi \sin 2\alpha + \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi \sin 2\alpha + (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha \equiv 1 - \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi \sin 2\alpha$$

dove l'approssimazione avviene a meno di termini in $(\lambda - \lambda_0)^2$, essendo i termini:

$$e^* = \frac{1}{\rho^2} ((\lambda - \lambda_0)^2 \rho^2 \sin^2 \varphi) = 1 + (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi$$

$$f^* = -r \frac{1}{\rho r} (\lambda - \lambda_0) \rho \sin \varphi = -(\lambda - \lambda_0) \sin \varphi$$

$$g^* = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

ricavati dalle derivate, rispetto a φ e λ , delle equazioni della rappresentazione di Flamsted. La deformazione lineare massima si ha per $\alpha = 45^\circ$ e 135° , cioè: $m_{max} = 1 \mp 1/2 (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi$, e si hanno i valori numerici (riportati nella tabella sottostante), per $\varphi = 45^\circ$.

$\lambda - \lambda_0 =$	10'	15'	30'	1°
$ m_{max} - 1 $	$1,03 \cdot 10^{-3}$	$1,54 \cdot 10^{-3}$	$3,09 \cdot 10^{-3}$	$6,17 \cdot 10^{-3}$

Per $\varphi = 0$, il modulo di deformazione (lineare) è nullo, in qualsiasi direzione (così lungo l'equatore la rappresentazione è conforme). Invece a latitudini maggiori, a causa delle forti deformazioni lineari, si rende indispensabile la rappresentazione per fusi, se la cartografia riguarda zone estese (tuttavia l'ampiezza è minore di quella che, a parità di deformazione, si utilizza nella rappresentazione di Gauss). La rappresentazione di Flamsted è talvolta detta sinusoidale, poiché y è solo funzione di φ , i paralleli sono rappresentati da rette parallele all'asse delle x , il meridiano passante per O è rappresentato dall'asse delle y (dove si ha: $\lambda = \lambda_0$ e $x = 0$) e gli altri meridiani sono rappresentati da curve che si discostano poco da una cosinusoide (infatti, prescindendo dalla variabilità dei raggi di curvatura ρ e N , si ha: $y = \rho(\varphi - \varphi_0)$ e $x = N(\lambda - \lambda_0) \cos(y/\rho + \varphi_0)$, che rappresenta una cosinusoide, per $\lambda = cost$).

La rappresentazione di Flamsted è stata impiegata per il primo disegno dei fogli, alla scala 1:100.000, della Carta d'Italia, impiegando fusi di 30' d'ampiezza.

5.2 Rappresentazione di Cassini-Soldner

La rappresentazione di Cassini-Soldner è stata usata dal Catasto Italiano ¹², per disegnare le mappe catastali, potendo eseguire, con notevoli semplificazioni, i calcoli dei punti d'inquadramento delle reti. Infatti preso un punto di riferimento O , di coordinate ellissoidiche φ_0 e λ_0 , le coordinate cartografiche x e y di un punto P di coordinate φ e λ , sono fatte coincidere con le coordinate geodetiche rettangolari X e Y di P , rispetto ad O , cosicché le equazioni della rappresentazione di Cassini-Soldner sono:

$$y = Y \quad \text{e} \quad x = X$$

$$\text{essendo:} \quad Y = \varphi_m (\varphi_P - \varphi_0) \quad X = (\lambda_P - \lambda_0) N_P \cos \varphi_P$$

$$\text{dove:} \quad \varphi_m = (\varphi_0 + \varphi_P) / 2 \quad \varphi_P = \varphi_0 + \frac{(\lambda_P - \lambda_0)^2 N_P \sin 2\varphi_P}{4\rho_P}$$

La rappresentazione di Cassini-Soldner è afilattica (perché non è conforme, né equivalente), ma le sue deformazioni lineari sono dello stesso ordine di quelle della rappresentazione di Gauss. Infatti si dimostra che, per un punto di ascissa x il modulo di deformazione (lineare), variabile con l'azimut α , a meno di termini di terzo ordine rispetto a x/N , vale:

$$m = 1 + \frac{x^2 \cos^2 \alpha}{2\rho_0 N_0}$$

Nella direzione normale al meridiano, passante per l'origine O , si ha il valore minimo di $m = 1$, ed il valore massimo, nella direzione parallela: $m = 1 + x^2 / 2\rho_0 N_0$. Inoltre per un elemento finito, congiungente due punti $P'(x_1, y_1)$ e $P'(x_2, y_2)$, sulla rappresentazione, il modulo di deformazione (lineare) vale, nella stessa approssimazione:

$$m = 1 + \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{6\rho_0 N_0} \cos^2 \alpha'_{12}$$

dove α'_{12} è l'angolo di direzione del segmento $P'_1 P'_2$ e la differenza fra questo angolo e l'azimut α_{12} (della geodetica $P_1 P_2$ sull'ellissoide), posto $\sigma = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, è:

¹² Attualmente il Catasto è oggetto di un grande rinnovamento che, partendo dall'adozione della carta (conforme) di Gauss ed includendo nel rilevamento catastale anche la terza dimensione (completamente assente nel Catasto tradizionale), arriva all'impiego delle le moderne tecniche di posizionamento GPS, affiancato dall'impiego di immagini digitali (a grande e grandissima scala) ed integrato con una strutturazione informatica dei geo-dati, di immagini raster e delle mappe tecniche e tematiche, all'interno di Sistemi Informativi Geografici (GIS) e Territoriali (LIS).

$$\alpha'_{12} - \alpha_{12} = -\frac{\sigma \cos \alpha'_{12}}{2\rho_0 N_0} \left(x_1 + \frac{1}{3} \sigma \sin \alpha'_{12} \right) - \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3} \frac{\sin \alpha'_{12} \cos \alpha'_{12}}{2\rho_0 N_0}$$

Infine il modulo di deformazione areale, in un punto di ascisse x , vale:

$$m_A = 1 + \frac{x^2}{2\rho_0 N_0}$$

Poiché i valori di x nelle applicazioni catastali non superano qualche decina di chilometri, m_A risulta sufficientemente prossimo ad 1, potendo così considerare la rappresentazione di Cassini-Soldner come praticamente equivalente. Se la rappresentazione fosse usata per una cartografia alla scala 1:25.000, si potrebbero adottare i criteri utilizzati per la cartografia basata sulla rappresentazione di Gauss. Tuttavia le carte del Catasto sono a scala più grande (1:1.000, 1:2.000 ed 1:4.000) ed anche la zona rappresentata, nell'intorno dell'origine, è limitata, in modo tale che i calcoli delle coordinate dei punti di inquadramento del rilevamento possano essere eseguiti sul piano della rappresentazione. Tutto ciò significa che le differenze ottenute fra le distanze e gli angoli, definiti fra i punti della rappresentazione, e le distanze e gli angoli, misurati sull'ellissoide, devono essere inferiori alle tolleranze di misura. In base alle tolleranze ammesse per le misure nel rilevamento catastale, la zona rappresentata può anche essere estesa fino a comprendere punti distanti circa 70 km dall'origine. La deformazione angolare massima: $\max(\alpha'_{12} - \alpha_{12})$, raggiunge così il valore di circa 6" e le deformazioni lineari massime raggiungono il valore di 6 cm, su un chilometro. In questo modo, il territorio nazionale italiano risulta diviso in 35 zone, per ognuna delle quali è definita un'origine (così tuttavia ciascuna zona è rappresentata su un diverso piano tangente per il quale, dati un rilevamento ed una rappresentazione solo 2D, cioè in mancanza della terza dimensione, si hanno scarsi elementi di trasformazione da uno all'altro)¹³.

APPENDICE – CENNI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE¹⁴

La fondazione dell'Analisi matematica, tra la fine del '600 e l'inizio dell'800, ed il suo incontro con la Geometria, a sua volta, divenuta anche "analitica" e "proiettiva" (proprio nel corso del '600), fa sì che l'intera Geometria promuova, al suo interno, una nuova branca, denominata Geometria differenziale, dove proprio la Geodesia e la Cartografia, in pieno sviluppo durante il '700 ed il primo '800, danno contributi rilevanti.

¹³ Al termine della ripresentazione dell'intera prima parte del libro Topografia Generale di Giuseppe Inghilleri, resta da segnalare come, in generale, si sia preferito usare le espressioni: coordinate riferite al geoide e coordinate ellissoidiche, al posto di coordinate astronomiche e coordinate geografiche (facendo riferimento alle prime solo per i problemi di geodesia astronomica ed alle seconde solo per i problemi di Cartografia), allo scopo di evitare inutili confusioni. Infatti aggiungendo all'elenco le coordinate geodetiche (in questo lavoro, nominate solo in ambito locale, nei due sistemi: polare e cartesiano ortogonale) ed anche le coordinate polari geocentriche, talvolta sussiste una certa confusione nei termini. D'altra parte, se usi molteplici non possono pretendere denominazioni univoche, il singolo uso deve comunque richiedere sempre la rigorosa definizione dei termini usati, per le grandezze oggetto di studio (pena proprio la suddetta pericolosa confusione).

¹⁴ L'appendice a seguire è liberamente ripresa da Wikipedia, per presentare alcuni elementi base di Geometria differenziale e qualche semplice complemento di Analisi matematica, complessivamente e dettagliatamente, molto utili per una migliore comprensione del testo presentato. Chi scrive non è un matematico, ma un geomatico, attento agli aspetti matematici del contenuti presenti. Di conseguenza, rimandando alla vastissima letteratura specialista, per approfondire i vari aspetti, qui solo enunciati, questa raccolta intende favorire un approccio trasversale ed interdisciplinare, tanto per chi si avvicina alla Geomatica dall'esterno (seppure con una sufficiente base di Matematica), quanto per chi proprio dalla Geomatica vuole capire il vasto mondo matematico su cui poggiano le sue basi fondamentali. Del resto, proprio la Geodesia e la Cartografia, insieme all'Astronomia, sono state tanta parte della storia della Matematica.

Geometria differenziale delle curve

Una curva è una funzione continua, in un intervallo dei numeri reali, in questo caso specifico, con derivata prima mai nulla su tutto l'intervallo e sufficientemente regolare (ovvero differenziabile con derivate continue fino ad un ordine alto). L'immagine di tale funzione è chiamata supporto e, se essa è iniettiva (cioè a ciascun punto della curva corrisponde un punto distinto nel piano o nello spazio 3D), la curva si dice semplice. La sua lunghezza, definita su un intervallo chiuso ed invariante per cambi dei suoi parametri, è pari a:

$$L = \int_a^b |f'(t)| dt .$$

Sistema di Frenet

Un sistema di Frenet è un sistema di riferimento mobile di vettori ortonormali, dipendenti dal parametro: $e_i(t)$, con $i = 1, 2$ o 3 , che definisce il dominio della funzione ed è capace di descrivere il comportamento locale della curva. Per definire questo sistema è necessario supporre che la curva sia regolare, cioè che tutte le sue derivate (tante quanti sono i vettori ortonormali) siano linearmente indipendenti (ovvero formino una base). In questo caso, il sistema è definito, a partire da questa base, con il procedimento algebrico di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, e le curvature generalizzate sono definite come:

$$\chi_i(t) = \frac{\langle e'_i(t), e_{i+1}(t) \rangle}{|f'(t)|}$$

Le curvature determinano la curva e, date più funzioni, sufficientemente differenziabili, esiste un'unica curva avente quelle curvature, a meno di traslazioni ed altre isometrie dello spazio euclideo. Il sistema di Frenet e le curvature generalizzate non dipendono dalla parametrizzazione scelta, cosicché è sempre possibile cambiare la parametrizzazione di una curva, applicando a questa una biiezione (cioè una corrispondenza biunivoca) differenziabile e crescente (ovvero con derivata positiva), per trasformarla in un'altra equivalente.

□ In due dimensioni

Il cerchio osculatore

Nel piano, il primo vettore di Frenet è la tangente alla curva, nel generico punto, in esame, mentre il secondo vettore è il vettore normale alla tangente, nella direzione in cui curva. Infatti la curvatura: $\kappa(t)$, indica lo spostamento della curva dalla retta tangente ed il suo reciproco: $1/|\kappa(t)|$, è chiamato raggio di curvatura. Il cerchio osculatore è il cerchio tangente alla curva, di raggio pari a: $1/|\kappa(t)|$, ed approssima la curva, intorno al generico punto, in esame, fino al secondo ordine (ovvero con le stesse derivate prima e seconda della funzione, nel generico punto, in esame).

□ In tre dimensioni

Nello spazio 3D, un sistema di Frenet è caratterizzato dai vettori tangente, normale e binormale.

Vettore tangente

Il vettore tangente è il primo vettore di Frenet, è dato dal rapporto: $e_1(t) = f'(t)/|f'(t)|$, ed inoltre, se la funzione è parametrizzata secondo la lunghezza d'arco, è semplicemente: $e_1(t) = f'(t)$.

Vettore normale

Il vettore normale misura quanto la curva differisce da una linea retta, è il secondo vettore di Frenet che, con il vettore tangente, genera il piano osculatore della curva, nel generico punto, in esame, e ha la seguente espressione:

$$e_2(t) = \frac{f''(t) - \langle f''(t), e_1(t) \rangle e_1(t)}{|f''(t) - \langle f''(t), e_1(t) \rangle e_1(t)|}$$

Vettore binormale

Il vettore binormale misura quanto la curva esce dal piano osculatore (in questo modo, una curva ha torsione nulla, se e solo se è una curva piana), è il terzo vettore di Frenet, è ortogonale al piano osculatore ed è definito, con il prodotto vettore, come: $e_3(t) = e_1(t) \times e_2(t)$.

Prima curvatura o flessione e seconda curvatura o torsione

La prima e la seconda curvatura generalizzate sono rispettivamente chiamate flessione e torsione, e sono date da:

$$\kappa(t) = \chi_1(t) = \frac{\langle e_1'(t), e_2(t) \rangle}{|f'(t)|} \qquad \tau(t) = \chi_2(t) = \frac{\langle e_2'(t), e_3(t) \rangle}{|f'(t)|}$$

Il loro reciproco: $1/\kappa(t)$ e $1/|\tau(t)|$, sono rispettivamente il primo ed il secondo raggio di curvatura, nel generico punto, in esame.

Formule di Frenet-Serret

Le formule di Frenet-Serret sono delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, la cui soluzione è il sistema di Frenet che descrive la curva. I coefficienti dell'equazione differenziale sono dati dalle curvatures generalizzate, rispettivamente, nel piano e nello spazio 3D:

$$\begin{bmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) \\ -\kappa(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \\ e_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix}$$

Infatti la Geometria differenziale (nel caso specifico, delle curve) è una branca della Matematica che, con il calcolo infinitesimale, studia le curve, nel piano e nello spazio 3D, come pure le superfici, nello spazio 3D.

Geometria differenziale delle superfici

Una parametrizzazione è un'applicazione, infinitamente differenziabile in uno insieme aperto e connesso. In uno spazio 3D, dato un sistema di coordinate bidimensionale, l'immagine di questa applicazione è una superficie parametrica: $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, dove u e v sono i parametri coordinati del dominio bidimensionale A . Una superficie si dice regolare, se soddisfa quantomeno le seguenti proprietà:

- ❑ le sue funzioni sono continue, con due derivate continue, in un insieme aperto;
- ❑ la matrice Jacobiana ha rango due (cioè le derivate non si annullano mai in uno stesso punto, ovvero la somma dei quadrati dei minori di ordine due è positiva);
- ❑ la corrispondenza tra la superficie parametrica e lo spazio 3D è iniettiva (cioè a ciascun punto della superficie corrisponde un punto distinto dello spazio 3D).

Linee coordinate

Se sul dominio A si prende un punto t_0 , per esso, passano due curve: $u_0 = u(t_0)$ e $v_0 = v(t_0)$. In corrispondenza a questo punto del dominio, esiste un punto: $(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, della superficie cui corrispondono le curve: $x = \phi(u_0, v_0)$, $y = \psi(u_0, v_0)$, $z = \chi(u_0, v_0)$. Per ricavare le tangenti e le normali in questo punto, si fissa prima un valore dei parametri coordinati e poi l'altro, ottenendo una famiglia di curve, chiamate linee coordinate (che possono essere anche ortogonali):

$$\phi(u, v_0), \psi(u, v_0), \chi(u, v_0) \quad \text{e} \quad \phi(u_0, v), \psi(u_0, v), \chi(u_0, v)$$

Derivando da queste curve, si ricavano i vettori tangenti ed i vettori normali, con i loro versori:

$$\vec{T}_u = \{\phi_u(u, v_0), \psi_u(u, v_0), \chi_u(u, v_0)\} \quad \text{e} \quad \vec{T}_v = \{\phi_v(u_0, v), \psi_v(u_0, v), \chi_v(u_0, v)\}$$
$$\vec{n} = \pm \vec{T}_u \times \vec{T}_v \quad \hat{n} = \pm (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) / \sqrt{(\vec{T}_u \times \vec{T}_v)^2}$$

Piano tangente

Una superficie regolare parametrica ammette sempre un piano tangente in un punto: $P_0 = P(x_0, y_0, z_0)$, che è il luogo geometrico contenente tutte le tangenti in quel punto:

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \phi_u(u_0, v_0) & \psi_u(u_0, v_0) & \chi_u(u_0, v_0) \\ \phi_v(u_0, v_0) & \psi_v(u_0, v_0) & \chi_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Prima forma differenziale di Gauss

Dato nel punto t_0 , il vettore tangente del piano: $(u'(t_0), v'(t_0))$, a questo vettore, corrisponde un vettore tangente su una data superficie: $u'(t_0)\vec{T}_u + v'(t_0)\vec{T}_v$, la cui lunghezza deriva dal differenziale del vettore:

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right)^2 = E(du)^2 + Fdudv + G(dv)^2$$

che è la prima forma differenziale o quadratica di Gauss (data anche dal prodotto scalare: $\vec{u} \cdot \vec{v}$), dove:

$$E = \|\vec{T}_u\|^2 = \phi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2 \quad F = \langle \vec{T}_u, \vec{T}_v \rangle = \phi_u \cdot \phi_v + \psi_u \cdot \psi_v + \chi_u \cdot \chi_v \quad G = \|\vec{T}_v\|^2 = \phi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2$$

ed anche: $\phi_u = \partial x / \partial u$, $\phi_v = \partial x / \partial v$, $\psi_u = \partial y / \partial u$, $\psi_v = \partial y / \partial v$, $\chi_u = \partial z / \partial u$, $\chi_v = \partial z / \partial v$.

Allora la lunghezza di un segmento, sulla stessa superficie, è pari a:

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'^2 + Fu'v' + gv'^2} dt$$

ed analogamente, l'area di questa superficie ed un qualunque integrale di superficie diventano:

$$A = \iint_A dS = \iint_A \sqrt{EG - F^2} du dv$$

$$I = \iint_A f(x, y, z) dS = \iint_A f(x(uv), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

essendo l'elemento di superficie: $dS = |\vec{T}_u \cdot du \times \vec{T}_v \cdot dv| = |\vec{T}_u \times \vec{T}_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv$. Pertanto la prima forma differenziale o quadratica di Gauss è un determinante e, poiché i coefficienti sono i coefficienti di una metrica sulla superficie, questa matrice è anche un tensore metrico:

$$\det |I_G| = \det \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 \quad \text{dove: } I_G = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$$

Seconda forma differenziale di Gauss

La seconda forma differenziale o quadratica di Gauss è una proprietà intrinseca della superficie e rappresenta le proprietà di curvatura della stessa (potendosi ricavare direttamente dai vettori tangente e normale, e dalla prima forma differenziale di Gauss). Infatti dato il versore normale:

$$\hat{n} = \pm \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\sqrt{(\vec{T}_u \times \vec{T}_v)^2}} = \pm \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

ed i coefficienti: $L = \vec{T}_{uu} \cdot \hat{n}$, $M = \vec{T}_{uv} \cdot \hat{n}$, $N = \vec{T}_{vv} \cdot \hat{n}$, si ottiene la seconda forma differenziale o quadratica di Gauss:

$$\Gamma = L(du)^2 + 2M du dv + N(dv)^2$$

dove esplicitando i suoi coefficienti, si hanno le seguenti espressioni:

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad M = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad N = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_{vv} & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

che, a loro volta, permettono di scrivere la seconda forma differenziale o quadratica di Gauss come il determinante di un'altra matrice:

$$\det(\Pi_G) = \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} \quad \text{dove:} \quad \Pi_G = \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}$$

Curvature normali

Le curvature normali di una superficie, in un punto P , nelle direzioni delle linee u e v , sono:

$$k(P, u) = \Pi_G \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|} \right) \quad k(P, v) = \Pi_G \left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right)$$

Curvature principali e curvatura di Gauss

Le curvature principali: $k_1(P)$ e $k_2(P)$, sono i due valori, massimo e minimo, della curvatura normale, (corrispondenti alle direzioni del piano tangente, collegate ai due versori normali), e la curvatura Gaussiana o curvatura totale è la loro media geometrica: $K(P) = \sqrt{k_1(P)k_2(P)}$. Per trovare le due direzioni secondo le quali le curvature principali sono massima e minima, utilizzando l'operatore di Weingarten: $W_p = I_G^{-1}\Pi_G$, si risolve un problema agli autovalori:

$$(I_G - k I_G) \vec{w}_p = 0 \quad \det(I_G - k I_G) = 0$$

dove: l'incognita k fornisce gli autovalori e \vec{w}_p è l'autovettore corrispondente a ciascun autovalore. In questo modo, la suddetta curvatura Gaussiana o curvatura totale ha espressione:

$$\det(I_G^{-1} \Pi_G) = \frac{\det(\Pi_G)}{\det(I_G)} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \text{mentre:} \quad \text{Tr}(I_G^{-1} \Pi_G) = \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

è la media aritmetica delle due curvature.

Teoremi ed identità della geometria differenziale

Teorema di Stokes

Data una forma ω (di dimensioni $n - 1$), definita a supporto compatto su una varietà differenziabile ed orientata Ω (di dimensioni n) la cui frontiera è $\partial\Omega$, vale l'identità integrale:

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

dove $d\omega$ è la derivata esterna di ω , definita per mezzo della sola struttura di varietà. Ovvero l'integrale di ogni forma differenziale, a supporto compatto sulla frontiera di una varietà orientata, è pari all'integrale della sua derivata esterna valutato su tutta la varietà.

Teorema del gradiente

Data una forma ϕ (di dimensione 0, cioè un campo scalare), definita su una curva differenziabile γ la cui frontiera è $\partial\gamma$ ed è costituita dai due estremi P e Q della curva, vale l'identità integrale:

$$\int_{\gamma} d\phi = \int_{\partial\gamma} \phi = \phi(Q) - \phi(P)$$

essendo: $d\phi$ la derivata di ϕ e dove l'integrale è solo funzione degli estremi della curva ed indipendente dal percorso della curva stessa. Ovvero l'integrale di ogni forma differenziale esatta non è funzione del percorso, ma solo degli estremi e, su un dominio contraibile (cioè una curva semplice e chiusa), è nullo.

Teorema della divergenza

Dati un insieme V , compatto e delimitato da una superficie chiusa liscia ∂V , ed un campo vettoriale differenziabile, almeno una volta, con continuità (cioè di classe C^1) F , definito in un intorno di V , si ha:

$$\int_V \nabla \cdot F \, dv = \oint_{\partial V} F ds$$

essendo: $ds = n \, dS$ un elemento di superficie e n il versore normale uscente. Ovvero il flusso del campo, attraverso la superficie chiusa liscia, coincide con l'integrale della divergenza dello stesso campo, svolto nel volume di cui la superficie è frontiera.

Identità di Green

Dati due funzioni scalari ϕ e ψ , definite nella stessa regione V , con ϕ derivabile due volte con continuità e ψ derivabile con continuità, ed un campo vettoriale: $F = \psi \nabla \phi$ (dove: $\nabla \phi$ è il gradiente di ϕ), per il teorema della divergenza (ed essendo: $\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$), si ha la prima identità di Green:

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_{\partial V} \psi (\nabla \phi \cdot n) dS = \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

dove n è il versore uscente normale all'elemento di superficie dS , ∂V la superficie che delimita la regione V , $\nabla^2 \phi$ il laplaciano di ϕ e $\partial \phi / \partial n$ la derivata rispetto alla direzione n (per cui si ha la relazione: $\psi \nabla \phi \cdot n = \psi \partial \phi / \partial n$).

Inoltre dati due funzioni scalari ϕ e ψ , definite in una regione V , tuttavia entrambe derivabili due volte con continuità, ed un campo vettoriale: $F = \psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi$ (dove: $\nabla \phi$ è il gradiente di ϕ e $\nabla \psi$ il gradiente di ψ), per il teorema della divergenza, si ottiene la seconda identità di Green:

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{\partial V} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

dove n è il versore uscente normale all'elemento di superficie dS , ∂V la superficie che delimita la regione V , $\nabla^2 \phi$ e $\nabla^2 \psi$ i laplaciani di ϕ e ψ , e $\partial \phi / \partial n$ e $\partial \psi / \partial n$ le derivate rispetto alla direzione n (per cui si hanno le relazioni: $\psi \nabla \phi \cdot n = \psi \partial \phi / \partial n$ e $\phi \nabla \psi \cdot n = \phi \partial \psi / \partial n$).

Infine date due funzioni scalari ϕ e ψ , definite in una regione V , con ψ derivabile due volte con continuità, mentre si ha: $\phi = G(x, y)$, ovvero la funzione di Green del laplaciano (cosicché: $\nabla^2 G(x, y) = \delta(x - y)$, essendo δ il simbolo di Krönecker), per il teorema della divergenza, si ottiene la terza identità di Green:

$$\int_V (G(x, y) \nabla^2 \psi(x)) dV_x - \psi(y) = \int_{\partial V} \left(G(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} \right) dS_x$$

dove n è il versore uscente normale all'elemento di superficie dS e ∂V la superficie che delimita la regione V

Teorema del rotore

Dati una curva piana γ , semplice (cioè liscia a tratti) e chiusa, un dominio piano D di cui γ è la frontiera, ϕ una funzione liscia e F un campo vettoriale, si ha:

$$\oint_{\Gamma} F d\Gamma = \iint_S \nabla \times F dS$$

essendo: $S = \phi(D)$ l'immagine del dominio piano e $\Gamma(t) = \phi(\gamma(t))$ l'immagine della curva piana, semplice e chiusa. Ovvero l'integrale di linea, pari alla circuitazione del campo lungo la curva piana, semplice e chiusa (cioè la frontiera della superficie), è uguale all'integrale di superficie, pari al flusso del rotore del suddetto

campo vettoriale, attraverso il dominio piano (cioè una superficie regolare, dotata di bordo). Il teorema del rotore permette di ottenere una condizione equivalente alle proprietà conservative di un campo vettoriale. Infatti se la circuitazione del campo è nulla, ad essa, corrisponde ad un flusso del rotore uguale a zero (che è proprio alla condizione di irrotazionalità del campo stesso): $\nabla \times F = 0$.

Teorema di Green

Date una curva piana ∂S , semplice (cioè liscia a tratti), chiusa e positivamente orientata, una superficie S la cui frontiera è ∂S e due funzioni ϕ e ψ , con derivate parziali continue, su una regione aperta che contiene S , si ha:

$$\oint_{\partial S} (\phi dx + \psi dy) = \iint_S \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy$$

Ringraziamenti

L'autore intende ringraziare gli ingegneri, allievi del corso di Geomatica e Trattamento delle Osservazioni del Tirocinio Formazione Attivo (TFA) per la classe A072 Topografia generale, nell'anno accademico 2012/2013: Marco Baccanelli, Chiara Bogoni, Chiara Caffarata, Laura De Santis, Alessio Gherbi, Carlo Lanzi, Placido Piazzese, Chiara Porporato, Davide Ravelli, Angelo Rossi, Michele Soardi che, durante il loro corso di studi, hanno contribuito ad editare la prima parte del libro Topografia generale di Giuseppe Inghilleri, come attività complementare per un seminario didattico, integrativo al programma ufficiale per le Scuole medie superiori.

BIBLIOGRAFIA DI RIFERIMENTO

- Ciconetti G. (1927): Geodesia e Topografia. Stabilimento tipo – litografico del Genio Civile, Roma.
 Pizzetti P. (1928): Trattato di Geodesia teoretica. Nicola Zanichelli, Bologna.
 Cassinis G. (1938): Lezioni di Topografia con elementi di Geodesia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
 Cicconetti G. (1938): Trattato di Geodesia e Topografia. Vallardi, Milano.
 Boaga G. (1943): Elementi di Geodesia e Topografia. CEDAM – Casa Editrice Dott. Antonio Milani, Padova.
 Cassinis G. (1955): Complementi di Topografia e Geodesia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
 Solaini L. (1956): Topografia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
 Marussi A. (1957): Corso di Geodesia. Università degli Studi di Trieste, Trieste.
 Dore P. (1960): Geodesia e Topografia. Casa Editrice del Prof. Riccardo Pàdon, Bologna.
 Aquilina C.F. (1963): Lezioni di topografia. CEDAM – Casa Editrice Dott. Antonio Milani, Padova.
 Mazzon C (1970): Lezioni di Geodesia. Istituto Idrografico della Marina, Genova.
 Solaini L., Inghilleri G. (1972): Topografia. Levrotto e Bella, Torino
 Inghilleri G. (1974): Topografia Generale. UTET, Torino.
 Birardi G. (1978): Corso di Topografia. Pitagora Editrice, Bologna.
 Folloni G. (1982): Principi di Topografia. Ed. Patron, Bologna.

http://it.wikipedia.org/wiki/Geometria_differenziale_delle_curve
http://it.wikipedia.org/wiki/Superficie_parametrica
http://it.wikipedia.org/wiki/Operatore_di_Weingarten
http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Stokes
http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_gradiente
http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_della_divergenza
http://it.wikipedia.org/wiki/Identità_di_Green
http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_rotore
http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Green