

# IL TRATTAMENTO DELLE OSSERVAZIONI “CENTRO” DELLA GEOMATICA

Luigi Mussio  
Politecnico di Milano – DICA  
Piazza L. da Vinci, 32 – 20133 Milano  
Tel. 02-2399-6501, Fax. 02-2399-6602  
e-mail luigi.mussio@polimi.it

**Riassunto** – Studiare gli aspetti matematici salienti delle discipline del rilevamento significa innanzitutto prendere in considerazione le stesse discipline del rilevamento (dalla geodesia e cartografia alla fotogrammetria ed alla fotogrammetria digitale, come pure dalle tecniche di posizionamento alle reti geodetiche e topografiche), mettendone in evidenza proprio gli aspetti matematici. Dopodiché l'elenco delle principali caratteristiche del trattamento delle osservazioni parte dalla statistica descrittiva, fa riferimento alla stima di parametri di modelli ed alle relative classi di problemi, ed affronta i problemi dell'inferenza statistica multivariata, per applicare il tutto alla compensazione di reti di tipo geodetico ed alla geodesia integrata, intesa nel suo senso più ampio. L'odierno prorompere della geomatica prende infine in considerazione temi fondamentali della geomatica applicata, quali il mondo dei GIS e dei LIS, e la galassia delle immagini, nonché l'attuale fase di passaggio dal trattamento delle osservazioni alla geomatica (intesa come una nuova disciplina). Questa ultima ha l'ambizione per prendere in considerazione non solo gli aspetti numerici e quantitativi dei dati, ma anche quelli tematici e qualitativi, ad esempio, con la foto-interpretazione di sequenze, immagini, mappe, scene e modelli 3D. In questo modo, la foto-interpretazione e la cartografia informatica (cui fa riferimento tutto il mondo dei GIS e dei LIS, per quanto riguarda gli aspetti più legati alle discipline del rilevamento) s'avvicinano e scambiano importanti contributi con le tecnologie dell'informazione. Un altro aspetto, non secondario, delle odierne trasformazioni in atto è il progressivo interesse delle stesse discipline del rilevamento per le scienze umane, in parte corrisposto, nella volontà di queste ultime di darsi strumenti quantitativi per misurare la qualità. Pertanto un invito sommerso è a non avere paura del nuovo, aprendosi alle nuove frontiere, ma tenendo ben saldo il nucleo delle conoscenze, per evitare una diaspora incontrollata e pericolosa che potrebbe addirittura portare all'estinzione del settore disciplinare. D'altra parte, questo pericolo è reale, stante l'enorme interesse di tutti per le discipline del rilevamento (dalla produzione di strumenti e mezzi di calcolo e rappresentazione alle più svariate applicazioni), a fronte di una quasi nulla loro approfondita conoscenza, dei loro fondamenti e del loro indissolubile legame con la matematica e la fisica.

## INTRODUZIONE

L'avvio del presente lavoro fa riferimento ad una lezione metodologica del compianto Prof. Mariano Cuniatti, sulla possibilità di dare corpo ad una disciplina. La ricerca scientifica si è occupata, da sempre, dei fenomeni fisici per analizzarne le componenti, individuare i legami fra queste e rappresentarli, schematicamente, in forma matematica.

Poiché le componenti dei fenomeni fisici sono grandezze fisiche e nelle relazioni matematiche che rappresentano questi fenomeni vanno introdotte le misure di queste grandezze, la metrologia si è necessariamente trovata coinvolta con questi problemi. Da un punto di vista metrologico, conviene esaminare il procedimento con cui sono nate queste relazioni matematiche e come la misurazione si è appropriata di queste relazioni, per farle divenire strumenti di misura.

Prendendo in esame il fenomeno meccanico del moto di un punto lungo una traiettoria, in questo fenomeno

si individuano due grandezze: la lunghezza della traiettoria e la durata del percorso. Dal confronto di più punti che, contemporaneamente, percorrono la stessa traiettoria ed, in particolare, dal superarsi reciproco fra questi punti mobili, nasce l'ipotesi che il moto di questi sia caratterizzato da una particolare qualità, ovvero una nuova grandezza: la rapidità.

Lo studio del comportamento delle varie grandezze presenti (lunghezza della traiettoria, durata del percorso e rapidità dei punti mobili) ha portato a fissare un legame matematico fra tali grandezze. Legame che, pur essendo suggerito dall'esperienza, supera la stessa, per divenire una definizione. In questo modo, nasce una nuova grandezza, definita tramite il legame che, nel fenomeno considerato, la lega alle altre due grandezze. Questa nuova grandezza è la velocità, definita e misurata tramite la ben nota relazione matematica.

Il procedere dell'indagine scientifica è tutto costellato di operazioni come questa: introduzione di nuove grandezze legate alla schematizzazione matematica di un fenomeno. Gli esempi si possono trarre da tutte le varie branche della scienza; infatti nella molteplicità dei fenomeni presenti in natura e studiati dall'indagine scientifica, sono moltissimi quelli presentati sotto forma di legge fisica:

- dalla geometria: l'area del rettangolo è data dal prodotto della sua lunghezza per la sua larghezza;
- dalla meccanica: il lavoro compiuto è il prodotto di una forza per la lunghezza dello spostamento;
- dalla elettrostatica: la capacità di un conduttore è il rapporto fra la carica elettrica ed il potenziale;
- dalla chimica: la densità di una sostanza è il rapporto fra la massa del corpo ed il suo volume.

Da tutti questi esempi, è facile generalizzare la definizione di legge fisica in metrologia: si ha una legge fisica, quando due classi di grandezze, già definite e misurate in maniera autonoma, sono riconosciute appartenere ad un'unica classe di grandezze.

La struttura matematica delle leggi fisiche più semplici fa uso delle, altrettanto più semplici, operazioni elementari della matematica, quali:

- l'addizione per la somma di due fenomeni comparabili fra loro;
- la sottrazione per la differenza, a mo' di confronto, di due fenomeni comparabili fra loro;
- il moltiplicazione con il prodotto:
  - per un numero, nel caso qualcosa si ripeta identico a se stesso,
  - per un'altra grandezza, se si ricerca una terza grandezza derivata;
- la divisione con il quoziente:
  - dove il divisore è un numero, nel caso delle sopraccitate ripetizioni,
  - dove il quoziente è un numero, se si confrontano stesse grandezze,
  - dove nulla è un numero, se si ricerca una terza grandezza derivata.

Ovviamente strutture matematiche più complesse (a partire dalle radici, per passare poi alle funzioni, al calcolo infinitesimale, ecc.) sono necessarie per la modellazione di leggi fisiche, a loro volta, più complesse.

La struttura, formale e concettuale, di una legge fisica è l'uguaglianza fra due grandezze e sussiste fra le misure corrispondenti, se si introduce un coefficiente, chiamato equivalente di conversione. L'insieme delle definizioni di classi di grandezza e delle leggi fisiche che stabiliscono l'uguaglianza fra classi di grandezze già definite, opportunamente coordinate fra loro, costituiscono un modello di comportamento dei fenomeni fisici, attinenti ad una determinata branca della fisica. Sulla validità del modello che non è mai definitiva, essendo sempre possibile un miglioramento, si fonda la validità delle operazioni di misura, eseguite tramite definizioni o leggi fisiche. E' storia contemporanea riconoscere, nell'ambito delle tecniche di rilevamento, la centralità del trattamento delle osservazioni.

D'altra parte, questo ha una storia antichissima, come mostrato dalla geometria, con i famosi teoremi di Talete e Pitagora. Il primo, originariamente nello spazio 3D, è alla base della fotogrammetria.

“Il re è rimasto impressionato dal modo in cui hai misurato la piramide,... limitandoti a collocare il tuo bastone al limite dell'ombra proiettata dalla piramide stessa; formatisi, al contatto con il sole, i due triangoli, dimostrasti che la proporzione esistente fra la lunghezza del bastone e della piramide era la stessa che intercorreva fra quella delle due ombre” (Plutarco, da Erodoto).

Secondo una leggenda, Pitagora di Samo ha scoperto il suo teorema nel salone del palazzo di Samo, del tiranno Policrate, osservando le piastrelle quadrate del pavimento. Se avesse tagliato in due una piastrella lungo una diagonale, avrebbe ottenuto due triangoli rettangoli uguali; inoltre l'area del quadrato, costruito sulla diagonale di uno dei due triangoli rettangoli, risultava il doppio dell'area di una piastrella, perché composto da quattro mezze piastrelle. Studiando meglio la forma delle piastrelle, si accorse che un quadrato formato da alcune piastrelle, opportunamente disposte, si scomponesse in due quadrati e due rettangoli la cui diagonale era uguale all'ipotenusa dei due triangoli rettangoli in cui si divideva ciascuno rettangolo. Allora disposti diversamente i quattro triangoli rettangoli, la figura centrale era ancora un quadrato, pari alla somma dei due quadrati ottenuti dalla prima scomposizione. Pertanto non fu difficile passare al caso generale di triangoli non – isosceli ed una definizione più tarda affermò che “in ogni triangolo rettangolo, il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale (cioè equivalente) ai quadrati dei lati (ovvero alla loro somma) che contengono l'angolo retto” (Euclide d'Alessandria).

Come noto, il suddetto teorema permette di calcolare distanze ed è basilare in geodesia e cartografia.

## **PARTE I – LE DISCIPLINE DEL RILEVAMENTO**

### **1. Geodesia e cartografia**

La rappresentazione dell'altimetria è un problema di ricostruzione di superfici. L'ellissoide è la superficie planimetrica di riferimento e la superficie fisica della terra (a partire, altimetricamente, dal geoide) o altra superficie di interesse (compreso il geoide) è rappresentata per curve di livello, sezioni o profili e punti quotati. La superficie della terra è corrugata fino ad oltre 8000 *m* in altezza e ad oltre 10.000 *m* in profondità. L'ideale superficie marina ed il suo prolungamento sotto i continenti (detta geoide) si scosta dall'ellissoide, fino a 60 – 100 *m*, e la superficie fisica (stazionaria) del mare ha una sua topografia dell'ordine di alcuni metri fino ad una decina di metri negli oceani. Tutto ciò impone l'assunzione, quale superficie di riferimento

per l'altimetria, di una superficie più complessa di natura fisica e non solo geometrica. In un ambito abbastanza ristretto (10 – 20 Km), il comportamento dell'altimetria può essere approssimato ad una sfera locale; comunque occorre accertarsi che il geode non sia localmente altamente corrugato, come nelle zone montuose e nelle zone geologicamente o tettonicamente complesse. Solo in un ambito ristrettissimo ( $\leq 100$  m), la geometria cartesiana ortogonale 3D può essere assunta quale geometria di riferimento.

Invece tutto quanto fa riferimento all'ellissoide approssima abbastanza bene la planimetria della superficie terrestre, tanto globalmente (ellissoidi geocentrici) quanto localmente (ellissoidi localmente orientati). Superfici meno complesse, quali la sfera (locale) ed il piano (tangente) approssimano abbastanza bene la planimetria, rispettivamente, in un ambito di 50 – 100 Km (campo geodetico) e 10 – 20 Km (campo topografico). La rappresentazione dell'ellissoide pone i problemi posti da tutte le superfici riemanniane che, essendo a doppia curvatura, ovvero non – euclidee, non sono sviluppabili su un piano senza deformazioni. E' necessario definire criteri di deformazione accettabili, per poter trasferire (mappare) punti, linee e regioni dell'ellissoide sul piano della rappresentazione. Il criterio più antico è quello di mantenere contenute le deformazioni, dando vita a rappresentazioni afilattiche. Criteri più rigorosi scelgono di mantenere indeformati gli angoli, ovvero localmente la scala dando vita a rappresentazioni conformi o isogoniche, oppure le aree, dando vita a rappresentazioni equivalenti. Per quanto già detto, non si possono avere rappresentazioni contemporaneamente conformi ed equivalenti. Fra le rappresentazioni conformi sono di interesse:

- la carta stereografica polare ottenuta per proiezione dal polo opposto su un piano tangente nei poli;
- la carta cilindrica di Mercatore, ottenuta per proiezione dal centro su un cilindro tangente all'equatore;
- le carte coniche di Lambert, ottenute per proiezione dal centro su un cono tangente ad un parallelo;
- le carte cilindriche trasverse di Gauss, ottenute per proiezione dal centro su un cilindro tangente ad un meridiano.

Per costruzione, la carta stereografica polare, quelle di Lambert e quelle di Gauss sono di interesse (mantengono limitate le deformazioni), rispettivamente, nelle regioni polari, in una zona prossima al parallelo di tangenza ed in un fuso prossimo al meridiano di tangenza. Fra le rappresentazioni equivalenti sono di interesse:

- la carta cilindrica di Lambert, ottenuta per proiezione dall'asse polare su un cilindro tangente all'equatore (essa è una delle migliori rappresentazioni dell'intero planisfero, fortemente deformato solo nelle regioni polari);
- la carta poliedrica o policentrica di Cassini – Soldner, ottenuta per proiezione dal centro sul piano tangente nel punto di interesse (detta proiezione è, a rigore, afilattica e solo quasi equivalente, tuttavia la buona equivalenza e la policentricità danno a questa carta un interesse catastale).

Si rammenti comunque che il concetto di proiezione è puramente indicativo; tutte le carte sono rappresentazioni, perché alcune sofisticate correzioni matematiche alterano di molto la proiezione geometrica. I dati geometrici che informano sulla localizzazione, forma, dimensione degli oggetti e costituiscono gli elementi topologici del sistema, si caratterizzano diversamente per quanto riguarda l'altimetria e la planimetria.

Nel primo caso, si tratta di modelli digitali del terreno (DTM), dove le problematiche attengono alla ricostruzione di superfici o di oggetti, mentre nel secondo si fa riferimento a problematiche tipiche di cartografia informatica, quali i descrittori di forme ed il *matching* di mappe. Attraverso un modello digitale è possibile valutare e stimare una serie di parametri:

- altezze (DEM);
- pendenze;
- curvature;
- volumi;
- variazioni di quota;
- movimenti di punti individualizzabili;
- deformazioni di superfici;
- velocità di movimento o deformazione.

Gli output altimetrici sono modelli digitali e possono essere articolati in modi diversi:

- per curve di livello e linee di rottura;
- per sezioni, regolarmente cadenzate e costituite da punti equispaziati, oppure a profili, lungo linee caratteristiche e costituiti da punti di interesse;
- per punti quotati sui vertici di un reticolo regolare, a maglia quadrata;
- per punti quotati sui vertici di una triangolazione di Delaunay.

Gli output planimetrici, ottenuti tanto attraverso la restituzione fotogrammetrica digitale, quanto con l'ortoproiezione e prospettivizzazione, tutte con sovrapposizione di elementi vettoriali d'interesse, quali:

- parametrature e punti geodetici;
- altimetria;
- linee principali di tessitura morfologica (orografia, idrografia, infrastrutturazione);
- limiti amministrativi;
- toponomastica e simboli convenzionali,

si collocano nell'ambito della produzione di carte tecniche e tematiche.

## **2. Fotogrammetria**

Le sorgenti di dati della fotogrammetria derivano, tanto da sensori digitali, quanto ormai più raramente da immagini analogiche digitalizzate. E' altrettanto vero che viste o scenografie, opportunamente modellizzate, possono costituire altri dati in uno spazio immagine da trasformare nello spazio oggetto. Usualmente la trasformazione dallo spazio modello allo spazio oggetto è solo un passaggio intermedio ma, di recente, tecniche ausiliarie dei sistemi informativi, quali l'intelligenza artificiale, i sistemi esperti, la realtà virtuale, ecc. possono produrre modelli *ad hoc* di interpretazione della realtà. Oggigiorno l'elaborazione di immagini digitali o digitalizzate avviene esclusivamente su computer. I prodotti di una restituzione fotogrammetrica sono una

mappa numerica 3D da archiviare in una banca dati. Da questa, con tecniche di cartografia informatica è possibile derivare carte o immagini (ortoproiezioni se ortogonalizzate; viste o scenografie se prospettivizzate) cui superimporre elementi vettoriali di interesse.

La trasformazione dallo spazio immagine allo spazio oggetto è modellizzabile attraverso le procedure classiche della fotogrammetria analitica. A meno di correzioni più o meno grandi al modello geometrico, la trasformazione principale è rappresentata dal teorema di Talete nello spazio. Diretta conseguenza del suddetto teorema sono le relazioni tra punti immagine, punto di presa e punti oggetto, e dall'invarianza del rapporto fra le tangenti di direzione interne ed esterne discendono le equazioni di collinearità. L'alterazione rispetto alla trasformazione proiettiva è data, oltreché da correzioni dovute all'orientamento interno, anche dalla rifrazione atmosferica e dalla curvatura terrestre, quando non si opera in un sistema geocentrico o, comunque, cartesiano ortogonale. Si chiamano polinomi di autocalibrazione, i polinomi contenenti parametri per modellizzare la distorsione del sensore, la deformazione dell'immagine, la rifrazione atmosferica e, talvolta, la curvatura terrestre. L'orientamento esterno può essere eseguito in due fasi:

- formazione del modello;
- ricostruzione dell'oggetto a partire dal modello formato.

La prima fase è detta di orientamento relativo di una coppia di immagini e provvede, in base al principio di complanarità fra punti immagine e punti di presa, alla formazione del modello in un sistema di riferimento arbitrario e ad una scala arbitraria. Un oggetto di superficie cilindrica cui appartengono anche i punti di presa (ovvero, in generale, avente forma di quadrica nelle stesse condizioni di presa) costituisce una configurazione critica (cilindro critico) che impedisce la formazione del modello. La seconda fase è detta di orientamento assoluto e provvede con una trasformazione di similitudine (o trasformazione S) nello spazio 3D alla ricostruzione dell'oggetto, imponendo il sistema di riferimento e la scala. Allo scopo, come nel caso delle equazioni di collinearità, sono necessarie informazioni dall'esterno fornite dai punti di appoggio.

La procedura di orientamento esterno (o di orientamento assoluto) può essere eseguita congiuntamente per parecchie immagini (o parecchi modelli), eseguendo la triangolazione aerea, oppure il concatenamento di prese terrestri. In questo caso, blocchi di strisciate di immagini (o di modelli formati da coppie di immagini) concorrono congiuntamente alla ricostruzione dell'oggetto tramite la triangolazione aerea a stelle proiettive, usando equazioni di collinearità, oppure a modelli indipendenti, usando trasformazioni di similitudine. Le relazioni matematiche delle stelle proiettive collegano punti immagine ai punti di appoggio e legano tra loro punti immagine (su diverse immagini) ad uno stesso punto oggetto (benché incognito). Analogamente le relazioni matematiche dei modelli indipendenti collegano punti modello ai punti di appoggio e legano tra loro punti modello (su diversi modelli) ad uno stesso punto oggetto (benché incognito). Il ricoprimento longitudinale lungo la strisciata e quello trasversale fra le strisciate consente un'abbondante ridondanza delle viste (punti di legame) di punti oggetto su più immagini (su più modelli). L'adozione della tecnica del *cross block*, blocco aggiuntivo perpendicolare alle strisciate principali, raddoppia la ridondanza ed irrigidisce il blocco. In fotogrammetria terrestre le ridondanze sono di più difficile definizione ma altrettanto necessarie. L'adozione della tecnica di misurare, in ogni caso, triplette o, quanto meno, coppie di punti vicini fra loro costituisce un ulteriore irrigidimento del blocco e dà garanzie di sicurezza rispetto alla presenza indesiderata degli errori grossolani più grandi. La ridondanza in un blocco di strisciate aumenta la precisione,



Nel passaggio dallo spazio immagine allo spazio oggetto, alle equazioni e agli algoritmi di elaborazione classici, si aggiungono quelli relativi alla parte radiometrica, al riconoscimento semantico di caratteristiche morfologiche (*feature extraction*) ed alla stereocorrelazione automatica delle informazioni (*image matching*). Tutta la procedura può essere fatta e ripetuta, tramite la scomposizione in piramidi di immagini. Questa strutturazione in multirisoluzione, indicata come piramidale, consente di gestire le fasi operative in forma ricorsiva. Si parte dal livello di minimo dettaglio, si passa ad un livello superiore più definito e si continua, ciclicamente, fino al primo, restringendo ad ogni passaggio l'area di ricerca ed affinando, nel contempo, il posizionamento. Le operazioni fondamentali della fotogrammetria digitale si possono sintetizzare in:

- ❑ pretrattamento, dove con operazioni di filtraggio dell'immagine si separa il segnale dal rumore;
- ❑ *feature extraction* (che costituisce la parte semantica della fotogrammetria digitale e la più complessa per una completa automazione) durante la quale avviene il riconoscimento di modelli e configurazioni caratteristiche: punti, linee o figure;
- ❑ *matching*, ovvero istituzione di una corrispondenza omologa fra due o più immagini (per questioni di affidabilità e robustezza), detto areale, se eseguito per punti, basato sulle *feature*, nel caso di utilizzo di linee e relazionale, se strutturato per entità, quali figure, con i loro attributi e le loro relazioni;
- ❑ restituzione, visualizzazione e rappresentazione,

dove queste ultime operazioni rimandano a tecniche di cartografia informatica.

#### **4. Tecniche di posizionamento**

Fra le misure geodetiche, il sistema GNSS (GPS, GLONASS e Galileo) è certamente il più innovativo e, in gran parte, ha scalzato, la topografia classica dall'inquadramento geodetico, all'infittimento topografico, come pure dal posizionamento dei punti d'appoggio per la fotogrammetria ai problemi di controllo di movimenti e deformazioni, ecc. Accanto al sistema GPS, esistono altre tecniche basate su osservazioni geospaziali (Doppler, SRL, VLBI), ma per diverse ragioni, nessuna di queste ha lo stesso impatto, sulla totalità delle discipline del rilevamento. Il sistema GNSS è composto di tre segmenti:

- ❑ spaziale, costituito da una costellazione di satelliti attivi, posti ad altissima quota, cosicché le loro orbite risentano pochissimo degli effetti locali del campo gravitazionale terrestre;
- ❑ di controllo, costituito da un gruppo di stazioni, nella regione equatoriale, per il tracciamento dei satelliti ed il calcolo delle loro effemeridi predette (sistemi di controllo indipendenti permettono invece il calcolo delle effemeridi precise);
- ❑ utente, costituito da uno o più ricevitori, da posizionarsi nei vertici di una rete (uso statico) o a bordo di veicoli in movimento (uso cinematico).

L'informazione emessa dai satelliti e ricevuta dai ricevitori consiste di due segnali di diverse lunghezze d'onda (portanti) variamente modulati da due codici pseudocasuali, così da poter trasmettere insieme informazioni ausiliarie, più un messaggio per la navigazione. L'informazione raccolta dai ricevitori permette di ricavare le distanze satelliti – ricevitori (pseudorange) e registrare le fasi dei due segnali emessi, opportunamente campionati. Allo scopo è necessario:

- ❑ la copertura, per tutta la durata della sessione, di almeno quattro satelliti, per le tre coordinate spaziale del punto e l'*offset* dell'orologio, per la determinazione in tempo reale e comunque di una rete consistente anche nel caso di post – processamento;
- ❑ l'uso di due ricevitori (modalità di base singola), oppure meglio più ricevitori (modalità di basi multiple: ad esempio, quadrilateri trilaterati), in quanto un ricevitore singolo permette, ovviamente, solo il suo posizionamento assoluto, molto meno preciso del posizionamento relativo;
- ❑ la correzione di una serie di errori dovuti alle orbite, alla rifrazione atmosferica (ionosferica e troposferica), agli orologi, alle eventuali perdite di contatto satelliti – ricevitori (*cycle slips*), facendo attenzione affinché il collegamento satelliti – ricevitori avvenga solo con un percorso diretto, evitando così indesiderate riflessioni (multi – path).

La correzione della rifrazione ionosferica ha imposto l'uso di ricevitori a doppia frequenza, relegando quelli a singola frequenza alla determinazione di basi corte (ovvero interne al campo topografico). L'individuazione ed eliminazione dei cycle – slips è, ancora oggi, oggetto di studio e ha dato vita a diverse tecniche di combinazione di fase e pseudorange, delle due portanti, oppure di differenziazione delle fasi, ecc. Il trattamento delle osservazioni GNSS si effettua normalmente con programmi di calcolo automatico dedicati, scientifici e/o commerciali che operano talvolta modellando i vari fenomeni e gli errori di cui ne sono stati affetti ed, altre volte, differenziando le fasi: una volta, due volte (differenze doppie) o tre volte (differenze triple), così da eliminare almeno la parte costante degli errori. Il risultato del trattamento dati GNSS è la stima delle tre componenti cartesiane di ciascuna base misurata. Tali componenti sono riferite ad un ellissoide geocentrico, da doversi orientare, localmente, per dare alle componenti delle basi significati propri della planimetria e dell'altimetria, dove quest'ultima deve essere ulteriormente corretta per la variazione dell'ondulazione del geoide. L'usuale compensazione 3D di reti piano – altimetriche fornisce le coordinate tridimensionali dei vertici, a partire dalle componenti delle basi misurate e dall'imposizione delle coordinate di un punto fisso.

## 5. Reti geodetiche e topografiche

Le reti geodetiche e topografiche, quali strumenti finalizzati al posizionamento (discreto) di precisione o alta precisione di punti, possiedono un vasto campo applicativo che spazia dall'inquadramento geodetico all'accatastamento, dalle opere ingegneristiche al controllo di deformazioni, e sono di ausilio a tecniche collaterali quali la fotogrammetria (appoggio fotogrammetrico) e la navigazione. Le fasi essenziali in cui si può suddividere l'organizzazione di una rete sono:

- ❑ progetto;
- ❑ impianto;
- ❑ rilevamento;
- ❑ calcolo;
- ❑ analisi;
- ❑ collaudo.

Queste fasi vanno trattate complessivamente, anche se esistono scelte differenziate, a seconda del tipo di

applicazione per cui si intende realizzare una rete. Il trattamento delle osservazioni funge da controllore delle varie fasi, operazione affatto ambiziosa od addirittura fuori luogo, perché la sempre maggiore automazione del rilevamento e l'enorme quantità di dati, abbastanza facilmente disponibili, richiede severi controlli della qualità dell'informazione acquisita.

Il progetto da realizzarsi a priori, in quanto non richiede la conoscenza delle osservazioni, necessita di:

- acquisizione di informazioni preesistenti;
- simulazione, dove si determina la configurazione della rete posizionando i vertici e definendo i lati e le osservazioni;
- ottimizzazione, attraverso la quale le procedure progettuali sono iterate fino ad ottenere una soluzione ottimale, avendo cura di eseguire, nel contempo, un controllo sull'affidabilità della configurazione:
  - l'ottimizzazione di ordine zero determina un sistema di riferimento ottimale;
  - l'ottimizzazione di primo ordine riguarda la configurazione delle misure;
  - l'ottimizzazione di secondo ordine si riferisce ai pesi delle osservazioni;
  - l'ottimizzazione di terzo ordine è rivolta ad un miglioramento parziale dei risultati ottenuti dalle due precedenti, considerate informazioni a priori.

L'impianto dipende, essenzialmente, dalla destinazione d'uso nel tempo; a riguardo, si deve rivolgere particolare attenzione alla molteplicità di riferimenti stabili e sicuri ed alla documentazione monografica. Il rilevamento mette in gioco la strumentazione ed, in base a quest'ultima, lo schema logistico, composto da:

- tecniche geospaziali (GPS, Doppler, SLR, VLBI) attraverso le quali si realizza l'ossatura del rilievo in aree di grande e media estensione;
- strumentazione topografica (total station, autolivello automatico), utilizzabile anch'essa per ottenere l'ossatura del rilievo in aree ben più piccole (grandissima scala) ed altrimenti, da legame tra l'ossatura del rilievo ed i sistemi che consentono una rappresentazione continua: spaziale per l'appoggio fotogrammetrico, e temporale, nei problemi di controllo;
- strumentazione speciale (estensimetri, flessimetri, clinometri, collimatori automatici, giroscopi, livellazione idrostatica) particolarmente indicata per problemi di controllo;
- immagini ottiche, a microonde (radar ad apertura sintetica, ovvero SAR interferometrico) e laser scanning, grazie alle quali è possibile selezionare campi di punti densi e precisi;
- piattaforme inerziali, ottime per la navigazione in combinazione con il GPS (cinematico).

Gli schemi del rilevamento mettono in gioco:

- metodi geospaziali, dove si deve porre particolare attenzione a realizzare un campionamento di punti quanto più possibile regolare ed alla copertura dei satelliti, oltretutto alla durata delle sessioni di misura;
- topografia classica, facente uso degli schemi tradizionali di triangolazione – trilaterazione, poligonali, intersezioni (in avanti o all'indietro), inoltre schemi topologicamente identici per le livellazioni;
- topografia speciale;

- triangolazione aerea (o dallo spazio) o concatenamento di prese terrestri.

Le misure geodetiche concernenti il campo della gravità sono, accanto alle misure geometriche, altrettanto fondamentali. Ciò significa che le grandezze caratterizzanti il campo anomalo del potenziale gravitazionale terrestre (anomalia di gravità, anomalia del potenziale, ondulazione del geoido e deviazione della verticale) intervengono, sia a correggere quelle misure geometriche che, riferendosi alla direzione della verticale, sono influenzate dal campo gravitazionale terrestre, sia direttamente, perché l'eventuale modificazione della crosta terrestre non è solo un fatto geometrico, ma anche un fenomeno fisico, ovvero una variazione significativa (piccola, ma vicina) della distribuzione di massa negli strati superficiali della crosta terrestre. Lo schema logico del calcolo di compensazione delle reti attua, in successione, le seguenti fasi:

- pre – trattamento delle osservazioni;
- ricerca dei valori approssimati dei parametri e robustezza qualitativa;
- compensazione a minimi quadrati:
  - iterazioni non – lineari su tutte equazioni <sup>1</sup>;
  - riproduzione dei pesi (stabilizzazione iterativa) e regressione multipla sui parametri di servizio;
- robustezza matematica;
- test di validazione:
  - criteri di stima ottimali: statistica della normalità;
  - criteri di stima robusti: statistica della robustezza.

In fase di analisi, si desumono informazioni sull'attendibilità dei risultati e si rendono i risultati comprensibili all'esterno. Invece i controlli interni vertono su:

- condizionamento del sistema: non si è stimato alcun parametro (o gruppo di parametri) che non era/no stimabile/i, in quanto non direttamente od indirettamente osservato/i;
- affidabilità e controllabilità delle osservazioni: nessuna osservazione (o gruppo d'osservazioni) determina/no da sola/e, oppure al più con un'altra (od un altro gruppo identico) , un parametro (o un gruppo di parametri avente la stessa dimensione);
- robustezza dello schema di misura.

I parametri di controllo esterno indicano che il lavoro è stato fatto a regola d'arte e si qualificano in:

- accuratezza e precisione (fedeltà, dipendente dall'accuratezza e precisione d'osservazione e dalla correttezza e consistenza del modello);
- sensibilità, rispetto a parametri particolari d'interesse (aree, volumi, spostamenti, deformazioni), dipendente dalla precisione ed accuratezza dei parametri stimati e dalla propagazione di covarianza;
- sicurezza e ripetitività (la seconda di particolare interesse nei problemi di controllo).

---

<sup>1</sup> Le equazioni presenti possono essere equazioni di osservazione (principali e secondarie), di pseudo – osservazione e di vincolo.

Inoltre la ripetitività richiede una molteplicità di riferimenti stabili e sicuri nel tempo, come pure garanzie contro perdite di informazioni, necessarie per l'aggiornamento di mappe e nei problemi di controllo. L'effettuazione di misure geodetiche concernenti il campo della gravità coinvolge problemi molto delicati e complessi, sia dal punto di vista metrologico per la elevatissima precisione richiesta nelle misure, sia per quanto riguarda il trattamento analitico di tutti i dati ricavati dalle misure. La geodesia integrata è, allo stato attuale delle conoscenze, il metodo più moderno ed efficace, per tenere conto insieme delle misure geometriche e delle misure geodetiche concernenti il campo della gravità.

## PARTE II – TRATTAMENTO DELLE OSSERVAZIONI

### 1. Statistica descrittiva

Un discorso preciso sulla statistica descrittiva si avvia con la definizione di variabile statistica e di variabile casuale, la postulazione di un'identità formale fra le stesse e la presentazione delle loro principali statistiche. Le variabili statistiche sono il risultato di esperimenti e, pertanto, sono concrete (ovvero costituite da dati reali od osservazioni, come la totalità dei dati a referenza spaziale, tempo varianti e non, quali, ad esempio, le misure geodetiche e geomatiche), finite (perché qualsiasi esperimento incontra evidenti limiti di spazio, tempo ed altre condizioni limitative) e discrete (perché qualsiasi esperimento è eseguito con una determinata accuratezza). Conseguentemente esse sono caratterizzate da un insieme di valori argomentali (eventualmente raggruppati in classi), associati a frequenze elementari (assolute, come risultato di un conteggio, oppure relative, se la totalità è normalizzata ad uno) ed alle frequenze cumulate delle frequenze elementari.

Le variabili casuali sono modelli interpretativi e, pertanto, sono astratte (ovvero costituite da dati ideali od osservabili) ed, in generale, illimitate e continue (anche se, raramente, ad eccezione della teoria dei giochi, esse possono essere finite e discrete). Conseguentemente esse sono caratterizzate da un campo d'esistenza, associato ad una funzione densità di probabilità ed ad una funzione distribuzione di probabilità (comunemente detta: probabilità). L'identità formale fra variabili statistiche e variabili casuali discende dalla loro completa indistinguibilità, a valle della loro definizione. Allora la presentazione delle principali statistiche può essere eseguita congiuntamente per entrambe.

Per le variabili ad una dimensione, le principali statistiche rispondono alla quantizzazione delle idee di: centro, dispersione, simmetria e curtosi (comportamento delle code). Come noto, il centro può essere indicato tramite la moda, la mediana, le medie (aritmetica, geometrica, armonica, ponderata, potata, ecc.) od altro, la dispersione può essere valutata in base all'ampiezza, ai quantili, alla varianza, agli scarti assoluti medio o mediano, ecc., mentre gli indici di asimmetria e curtosi hanno, solitamente, poche varianti.

Per le variabili a due dimensioni, le principali statistiche (oltre a quelle monodimensionali marginali o condizionate) rispondono alla quantizzazione dell'idea di dipendenza. Come noto, dipendenza è un concetto molto generale che, fra totale e completa indipendenza e perfetta dipendenza (o dipendenza in legge), si articola in connessione (dipendenza vaga e generica), regressione (quasi-dipendenza funzionale) e correlazione (quasi-dipendenza lineare). Ancora numerosi sono gli indici ed i coefficienti che esprimono il grado della dipendenza o meno (si noti, a riguardo, come tutti siano normalizzati ad uno, assumendo anche valori negativi, fino a meno uno, se non intrinsecamente positivi).

Per le variabili a più di due dimensioni, a rigore, occorre continuare lo studio del loro raggrupparsi (come con

gli indici di nuvolosità, ecc.). Tuttavia nel caso frequente in cui il modello interpretativo è fornito dalla variabile casuale normale, questo studio è del tutto superfluo. Si ricordi, inoltre, che detta variabile casuale è completamente caratterizzata dal vettore delle medie e dalla matrice di varianza-covarianza, cosa che rende superflue altre statistiche del centro, della dispersione e della dipendenza (covarianza comporta correlazione, ovvero dipendenza lineare e niente altro) e del tutto inutili le statistiche superiori (la variabile casuale normale è simmetrica e l'indice di curtosi vale, in ogni caso, tre).

Ulteriori vantaggi dell'adozione, quale modello interpretativo, della variabile casuale normale sono dati dall'invarianza della distribuzione di probabilità di detta variabile casuale, rispetto a trasformazioni lineari della variabile casuale stessa, e dell'ottimalità della stima dei parametri di modelli, supportati dalla variabile casuale normale, se le ipotesi di corrispondenza fra dati e modelli sono perfettamente soddisfatte (ovvero se i dati non sono affetti, in alcun modo, da dati anomali). A tutto ciò, si aggiunge la linearità dei sistemi da risolvere per la stima dei parametri di modelli, fatto di primaria importanza, in quanto solo i sistemi lineari ammettono, senza eccezioni e purché non-singolari, soluzioni esattamente determinabili, indipendentemente dal numero di equazioni ed incognite di cui si compongono.

La statistica descrittiva termina con alcuni teoremi limite. Fra questi il teorema di Bernoulli (o legge dei grandi numeri) mostra la convergenza, in probabilità, delle frequenze di una variabile statistica alle probabilità di una corrispondente variabile casuale, mentre il teorema di Gauss (o limite centrale della statistica) mostra la convergenza, in legge, della combinazione lineare (ovvero delle somme, come caso particolare) di variabili casuali qualsiasi, purché aventi ciascuna dispersione comparabile con le altre, alla variabile casuale normale. I due teoremi giustificano, rispettivamente, la comparazione fra variabili statistiche e variabili casuali, al di là della sopracitata identità formale, e le operazioni di media aritmetica, ponderata o potata fra osservazioni dirette per aumentare la normalità del comportamento dei dati.

## **2. Stima di parametri di modelli**

La teoria della stima ha lo scopo di definire proprietà, caratteristiche e modalità della stima dei parametri di modelli i quali sono da interpretarsi, come già detto, quali variabili casuali, sono concepiti come popolazioni di dati ideali (od osservabili), costituenti un universo da cui estrarre dati reali (od osservazioni), costituenti, a loro volta, campioni da interpretare, pertanto, come le suddette variabili statistiche. L'operazione d'estrazione è detta campionamento e, se i dati sono fra loro indipendenti, come avviene, auspicabilmente, nelle osservazioni dirette di fenomeni, il campionamento è detto bernoulliano; schemi di campionamento più complessi, attinenti alle problematiche della progettazione, simulazione ed ottimizzazione, sono considerati estranei agli scopi del presente lavoro.

Le principali proprietà delle stime sono la correttezza, la consistenza, l'efficienza e la sufficienza che, in base al significato letterale dei nomi, significano capacità di stimare parametri il cui centro coincide con il centro dei parametri dell'intera popolazione, capacità di stimare parametri con precisione ed accuratezza sempre maggiori, ed al limite infinite, al crescere della numerosità del campione, capacità di stimare parametri qualitativamente migliori delle informazioni presenti direttamente nelle osservazioni, capacità di stimare parametri conservando tutta la ricchezza di informazioni già presente nelle osservazioni dirette. Una proprietà aggiuntiva delle stime, estranea al corpus della statistica tradizionale, è la robustezza, intesa come capacità di stimare parametri indistorti, nonostante la presenza di eventuali dati anomali.

Le caratteristiche delle stime forniscono spesso, contemporaneamente, le modalità operative per effettuare

le stime stesse. Infatti sono operativi tanto il metodo della minima varianza, ottimale per la statistica tradizionale, quanto diverse procedure robuste, certamente subottimali, ma capaci di evitare indesiderate distorsioni nelle stime. Altrettanto operativi sono il metodo della massima verosimiglianza ed il metodo dei minimi quadrati, una particolarizzazione del primo nel caso in cui le stime avvengono in ambito lineare ed il modello interpretativo è fornito dalla variabile casuale normale. Si ricordi che, in questo caso, si ha l'ottimalità delle stime, in quanto tanto il metodo dei minimi quadrati, quanto quello della massima verosimiglianza, da cui discende, danno risultati perfettamente coincidenti con il metodo della minima varianza.

Tutto ciò conferma l'adozione del metodo dei minimi quadrati per il trattamento statistico delle osservazioni, agevola le sue generalizzazioni ed estensioni a tecniche complementari e giustifica un modo di procedere che prevede la centralità di detto metodo e riconduce ad esso, per quanto possibile, importanti tecniche complementari (cluster analysis, regressione multipla, analisi di varianza, delle componenti di varianza e della struttura di covarianza, procedure robuste). Si noti, in quest'ambito, il ruolo fondamentale ed indispensabile giocato dall'indissolubilità del legame fra un certo tipo di statistiche classiche elementari, la normalità e la linearità, per quanto riguarda tanto la definizione statistica delle metodologie, quanto la loro applicazione con elevate capacità risolutive in appropriati algoritmi numerici.

### 3. Classi di problemi

I problemi ai minimi quadrati si presentano, in generale e nell'ambito specifico delle discipline geodetiche e geomatiche, usualmente ripartiti in due classi fondamentali:

- ❑ problemi reticolari (o di compensazioni di reti);
- ❑ problemi d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti.

Le stesse due classi si incontrano anche in problemi affini, quali ad esempio:

- ❑ i campionamenti delle osservazioni, l'ottimizzazione della configurazione di rilevamento e/o dello schema di misura, oppure dei pesi delle osservazioni;
- ❑ la "cluster analysis", l'analisi di varianza, la regressione multipla, l'analisi fattoriale (o studio delle componenti principali);
- ❑ lo studio dell'affidabilità delle osservazioni e le procedure di validazione dei dati e di stima dei parametri con procedure robuste.

In ogni caso, tutti i problemi ai minimi quadrati possono essere interpretati, topologicamente, come un grafo, dove:

- ❑ i parametri principali ed ausiliari (o di servizio) costituiscono i nodi dello stesso grafo.
- ❑ le osservazioni, i vincoli e le pseudo-osservazioni sovrappesate e non (come pure, le informazioni a priori, le osservabili secondarie e le condizioni numeriche di regolarizzazione) i lati del grafo;

Si noti, a riguardo, come l'interpretazione data dalla topologia sia indispensabile per una corretta comprensione dei casi e sottocasi in cui si articolano le suddette classi fondamentali. Le due classi

fondamentali, già precedentemente enunciate, si articolano in vari e svariati casi e sottocasi, illustrati, dettagliatamente, nel prosieguo.

I problemi reticolari (o di compensazione di reti) presentano come osservabili:

- ❑ differenze prime dei parametri;
- ❑ funzioni delle differenze prime dei parametri.

Il primo caso ha numerosi esempi, anche fuori dalle discipline geodetiche e geomatiche:

- ❑ discretizzazione di equazioni differenziali del primo ordine, tipiche della fisica, della chimica e delle scienze della terra;
- ❑ problemi di trasporto: schemi di circuitazione, traffico, circolazione e transazione, reti di comunicazione, distribuzione e telecomunicazione ed è costituito, per le suddette discipline, dalle reti di differenza di potenziale.

Il secondo caso è, invece, tipico delle discipline geodetiche e geomatiche, anche se non esclusivo (a questo caso, infatti, fanno riferimento ben particolari discretizzazioni di equazioni differenziali, sempre riferite ai sopracitati raggruppamenti di discipline fisiche e naturalistiche), e si articola nei seguenti sottocasi:

- ❑ l'informazione fluisce completa, bidirezionalmente, come nelle reti di differenza di potenziale, lungo ogni lato del grafo;
- ❑ l'informazione fluisce completa, unidirezionalmente, lungo ogni lato del grafo, costituendo nel suo fluire almeno un albero sul grafo stesso;
- ❑ l'informazione è irradiata, in modo completo, da alcuni nodi verso altri (senza ritorno), senza che né i primi, né i secondi si scambino alcuna informazione, costituendo nel suo fluire tanti alberi (costituiti da un solo livello, oltre la radice) sul grafo stesso, quanti sono i nodi d'emanazione;
- ❑ l'informazione è irradiata, in modo parziale, nelle stesse condizioni del sottocaso precedente, cosa che richiede l'individuazione di due o più co-alberi (sempre costituiti da un solo livello, oltre le radici) capaci di completare l'informazione trasmessa;
- ❑ l'informazione è irradiata, in modo parziale, senza restituzioni particolari.

Le osservabili differenze seconde dei parametri e loro funzioni richiedono la complessa sostituzione dei lati del grafo con triangoli fra i tre nodi interessati. Le osservabili differenze di ordine superiore e loro funzioni fanno riferimento, addirittura, a poligoni fra tutti i nodi coinvolti, cosa che rende la loro analisi ancora più complessa. Per queste ragioni, ad eccezione della discretizzazione di equazioni differenziali di secondo ordine o di ordine superiore e di loro trasformazioni funzionali, la loro adozione è estremamente rara.

Per quanto riguarda la determinazione del numero di parametri principali, nel caso in cui i problemi ai minimi quadrati adottino lo schema principe delle equazioni d'osservazione, questo è sempre tale da determinare difetti di rango e singolarità del sistema da risolvere per cui sono necessari vincoli o pseudo-osservazioni sovrappesate.

I problemi d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti presentano come osservabili funzioni dirette dei parametri principali, il cui numero, sempre nel caso in cui si voglia adottare il suddetto schema principe delle equazioni d'osservazione, non è mai tale da determinare difetti di rango e singolarità del sistema da risolvere. A tutto ciò, fanno eccezione eventuali problemi di sovra-parametrizzazione, rispetto al campionamento delle osservazioni effettuate, per cui sono indicate condizioni numeriche di regolarizzazione. Esempi di problemi di interpolazione ed approssimazione di campi di punti sono dati da:

- ❑ ricostruzione (*fitting*) di linee, superfici, ipersuperfici aventi come dominio lo spazio 3D;
- ❑ descrittori di forma (*form descriptors*): contorni di figure (piane e/o gobbe), superfici (chiuse) di oggetti;
- ❑ centratura (*matching*) di segmenti, figure (immagini, mappe, disegni), oggetti (compresi modelli virtuali 3D) comunque conformati.

I problemi d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti, relativi alla ricostruzione di linee sono, ovviamente, assimilabili a quelli dello studio delle serie temporali storiche o di breve periodo, oppure frutto di simulazioni. Inoltre lo studio di serie temporali congiunto alla soluzione dei problemi reticolari (o di compensazione di reti) e/o d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti, illustrati in precedenza, permette indagini accurate sugli aspetti dinamici delle osservabili a referenza spaziale di cui ai suddetti problemi, dando un'interpretazione unitaria a dati spazio-varianti e/o tempo-varianti.

Limitatamente alle discipline geodetiche e geomatiche, le equazioni d'osservazione dei problemi reticolari (e di compensazioni di reti) fanno uso, in generale, di modelli grigi dedotti dalla geometria del problema in esame, invece le equazioni d'osservazione dei problemi d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti fanno uso, in generale, di modelli neri. Come noto, una vasta gamma di metodi deterministici o stocastici, oppure misti risponde positivamente alla bisogna. I primi annoverano fra i più comunemente impiegati:

- ❑ l'interpolazione polinomiale;
- ❑ il metodo degli elementi finiti e l'interpolazione con funzioni splines;
- ❑ l'analisi di Fourier, nel dominio delle frequenze;
- ❑ lo studio, sempre nel dominio delle frequenze, con ondine (wavelets).

I secondi prevedono l'interpretazione dei fenomeni in studio come realizzazioni di un processo stocastico:

- ❑ stime di covarianza, filtraggio cross-validazione e predizione;
- ❑ studio della geometria frattale.

Uno studio dettagliato di esempi particolari e significativi di problemi reticolari (o di compensazioni di reti) può essere effettuato, nell'ambito delle discipline geodetiche e geomatiche, solo facendo riferimento a discipline specifiche, quali la geodesia, la navigazione, la topografia, la fotogrammetria ed il telerilevamento.

Al contrario, uno studio dettagliato di esempi particolari e significativi di problemi d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti richiede anche uno studio dei modelli neri.

Per una migliore comprensione si tenga presente che l'insieme delle quantità osservate è sempre costituito

da quattro parti distinte:

- ❑ le informazioni topologiche, ovvero i lati del grafo che indicano le connessioni esistenti fra i nodi del grafo stesso;
- ❑ le informazioni geometriche, ovvero la posizione ed altre caratteristiche degli stessi nodi;
- ❑ le informazioni metrologiche, ovvero le osservazioni (o quantità osservate) realmente effettuate;
- ❑ le informazioni stocastiche, ovvero la precisione delle osservazioni e le eventuali correlazioni fra queste.

Infatti questo insieme, altrimenti detto: base di dati, con riferimento a ciascuna delle sopraccitate quattro parti distinte, produce nei problemi ai minimi quadrati (come pure negli altri sopraccitati problemi affini), rispettivamente:

- ❑ la matrice disegno simbolica;
- ❑ la matrice disegno numerica;
- ❑ il vettore termine noto delle equazioni d'osservazione;
- ❑ la matrice di varianza-covarianza (a priori) delle quantità osservate o, più comunemente, se non esistono correlazioni fra le stesse quantità osservate, la matrice dei pesi.

Si noti che, con la sola eccezione delle osservazioni realmente effettuate, tutto quanto può essere noto già prima di compiere una sola osservazione. Da ciò derivano tutti i problemi di ottimizzazione della matrice di varianza-covarianza dei parametri:

- ❑ intervenendo nella matrice disegno per decidere sull'effettuazione o meno di ciascuna osservazione (1° ordine);
- ❑ sulla matrice di varianza-covarianza (a priori) delle quantità osservate per stabilire, note le osservazioni da effettuarsi, le precisioni delle stesse (2° ordine);
- ❑ su opportune parziali combinazioni dei due casi precedenti (3° ordine),

avendo cura di controllare, in ogni caso, l'affidabilità delle osservazioni, quale garanzia, sufficiente minimale, che il lavoro intrapreso, qualsiasi esso sia, risulti svolto a regola d'arte.

#### **4. Inferenza statistica multivariata**

La validazione dati e dei modelli si fonda sulle varie tecniche dell'analisi multivariata, di volta in volta, studiando la variabilità e l'interdipendenza fra gli attributi, entro una classe di oggetti. Essa prende in considerazione insiemi di dati, ciascuno relativo ad un oggetto della classe che contiene i valori osservati di certe variabili statistiche. Questi insiemi possono, talvolta, essere completi; mentre, a loro volta, le variabili osservate, sono in generale campioni estratti da variabili casuali, di tipo continuo o, raramente, discreto. Da una tale complessità di premesse, lo studio dell'analisi multivariata si può articolare, principalmente, nei seguenti punti.

- ❑ Semplificazione strutturale. Gli insiemi di dati devono essere ricondotti, se possibile, in forme più

semplici con cambi di variabili, in particolare, con trasformazioni capaci di sciogliere variabili connesse in variabili indipendenti.

- ❑ Classificazione degli oggetti. L'analisi dell'insieme di dati deve porre in evidenza la presenza di gruppi (clusters), ovvero di sottoinsiemi di oggetti, caratterizzati da valori preferenziali degli attributi o di parte di essi, cercando di ricondurre a poco le notevoli variabilità presenti.
- ❑ Raggruppamento degli attributi (clustering). L'analisi degli insiemi di dati deve far ricadere, per quanto possibile, differenti variabili in un unico gruppo.
- ❑ Analisi della connessione (semplice negazione dell'indipendenza). Gli insiemi di dati devono essere studiati rispetto alla dipendenza vaga e generica o meno fra le variabili contenute (ovvero all'essere in connessione di queste ultime).
- ❑ Analisi della dipendenza funzionale. Gli insiemi di dati devono essere studiati rispetto alla dipendenza funzionale o meno fra le variabili contenute (ovvero all'essere in regressione di queste ultime), con particolare riferimento alla dipendenza lineare o correlazione (ovvero all'essere in regressione lineare o correlate).
- ❑ Costruzione e verifica d'ipotesi. Il confronto probabilistico, fra statistiche campionarie e valori teorici di riferimento, permette di formulare un giudizio critico sui risultati ottenuti nelle varie tappe dell'analisi multivariata.

I tests di validazione dei modelli permettono di sottoporre a verifica, mediante opportuni controlli e confronti d'ipotesi, le stime effettuate come, del resto, tutti i risultati ottenuti nell'ambito della statistica. Al solito, si possono avere errori nel modello deterministico: presenza di errori grossolani nelle osservazioni, ed errori nel modello stocastico: presenza di errori sistematici nelle osservazioni, ovvero cattiva conoscenza delle varianze delle osservazioni e/o delle eventuali covarianze fra le osservazioni stesse. Un'opportuna sequenza di test permette di districarsi fra le varie cause d'errore.

Un giudizio sui risultati può essere espresso in termini numerici e statistici. I controlli di tipo numerico rispondono a problemi di condizionamento ed affidabilità che comunemente accompagnano e seguono il metodo dei minimi quadrati, comprensivo delle sue estensioni e generalizzazioni; pertanto tutto quanto riguarda i controlli di tipo numerico è considerato estraneo agli scopi del presente lavoro. I secondi comprendono i tests statistici per la valutazione di osservazioni e parametri, della loro dispersione e, se del caso, della loro dipendenza. Per quanto riguarda le osservazioni, la validazione avviene in termini di entità degli scarti - residui (oltretutto numericamente in termini di affidabilità delle osservazioni all'interno dello schema di misura) e consiste essenzialmente nell'individuazione ed eliminazione degli errori grossolani.

L'inferenza statistica (multivariata) è quella parte dell'analisi multivariata dedicata alla costruzione e verifica d'ipotesi (per problemi di controllo di qualità, oppure controllo e confronto d'ipotesi di altri problemi). Infatti il confronto probabilistico permette di formulare un giudizio critico sui risultati ottenuti, nelle varie tappe dell'analisi multivariata. Così con le usuali strategie dell'inferenza statistica, vari tests multipli consentono di discriminare, tanto stime di parametri da campioni normali, quanto statistiche di modelli non-parametrici (ovvero modelli *distribution free*).

A riguardo, l'aggettivo non-parametrico qualifica un particolare gruppo di tests statistici, sotto certe condizioni, sostitutivo dei test statistici classici. Infatti i test non-parametrici, rispetto ai test classici, presentano i seguenti vantaggi:

la loro comprensione è immediata ed elementare;  
le condizioni di validità sono meno forti (più ampie);  
i calcoli necessari non presentano in generale difficoltà computazionali.

D'altra parte, i test non-parametrici presentano alcuni svantaggi:

- molta informazione viene sprecata;
- la potenza del test è bassa.

Test poco potenti tendono ad essere troppo conservativi, cioè l'ipotesi fondamentale (o nulla) è accettata anche quando dovrebbe valere l'ipotesi alternativa. Pertanto i test statistici classici sono preferibili, quando le condizioni di validità sono soddisfatte.

In quest'ottica, ipotesi stringenti sulla normalità dei campioni e l'estrema specificità della grandezza da sottoporre al confronto d'ipotesi (coefficienti d'asimmetria e indici di curtosi, quantili nelle code) fanno dei test di Pearson et al. e Hawkins alcuni dei più potenti test noti, proprio per questo riportati nel seguito, pur convenendo sulla loro circoscrizione a classi di problemi particolari (ad esempio, individuazione ed eliminazione di dati anomali).

Invece quando le condizioni di validità non sono soddisfatte, ad esempio, se la distribuzione della popolazione non è quella normale, oppure se gli elementi della popolazione non sono statisticamente indipendenti, oppure se le varianze della popolazione sono significativamente diverse fra loro, allora i tests statistici non-parametrici devono essere utilizzati. Tutto ciò vale in particolare quando i campioni sono piccoli. Infatti una delle condizioni di validità dei tests classici è la dimensione grande dei campioni. L'analisi multivariata di campioni di fenomeni vari richiede spesso:

- il confronto fra medie di campioni aventi diversa varianza;
- il confronto fra varianze di campioni non statisticamente indipendenti;
- il confronto fra contingenze di campioni con distribuzione diversa da quella normale.

In questi casi, i test statistici non-parametrici sono indispensabili.

Gli oggetti del giudizio critico sono, come detto, i risultati ottenuti nelle varie tappe dell'analisi multivariata, in particolare: frequenze relative, contingenze, medie campionarie o altri indicatori del centro (di una popolazione), varianze campionarie o altri indicatori della dispersione, coefficienti di correlazione campionari o altri indicatori della correlazione.

I test multipli si differenziano per i diversi oggetti in esame, come pure per la distribuzione di appartenenza della popolazione cui i campioni si riferiscono, se normale, oppure altra (spesso sconosciuta). In generale, comunque, tutti i campioni sono supposti fra loro indipendenti, mentre se quest'ipotesi non è soddisfatta, occorre procedere, come per i modelli non-parametrici, adottando strategie assolutamente generali, ma assai poco potenti, cioè meno capaci di discriminare fra ipotesi alternative vicine, a parità di numerosità dei campioni. Parecchi test multipli, diversamente, rispondenti alla bisogna, fanno attenzione, in particolare, ai problemi pratici, legati alla loro applicazione ad esempi concreti. Per quanto riguarda, invece, i loro fondamenti teorici, questi si richiamano, in generale:

- ❑ alla definizione assiomatica di probabilità;
- ❑ alla legge dei grandi numeri ed al limite centrale della statistica;
- ❑ ai teoremi della normalità: conservazione per trasformazioni lineari, identità fra indipendenza ed incorrelazione;
- ❑ alla definizione delle variabili casuali: chi quadrato, t di Student e F di Fisher;
- ❑ al calcolo di probabilità estremali (ad esempio di Kolmogorov–Smirnov e di Hawkins), ove necessario;
- ❑ al teorema di decomposizione ortogonale degli scarti;

e nello specifico, alla trasformazione della distribuzione di probabilità, secondo requisiti da definirsi, caso per caso, così come è costruito un determinato test multiplo. L'effettiva esecuzione di un qualsiasi test statistico si attua sempre compiendo i seguenti passi:

- ❑ formulazione di una determinata ipotesi fondamentale (o nulla);
- ❑ scelta del livello di significatività;
- ❑ costruzione di una statistica campionaria, a partire da dati osservati;
- ❑ partizione della distribuzione di probabilità della statistica campionaria;
- ❑ effettuazione del confronto d'ipotesi,

avendo cura di controllare la potenza del test, nel caso si voglia prendere in considerazione una o più ipotesi alternative (all'ipotesi fondamentale o nulla).

## **5. Compensazioni di reti di tipo geodetico**

Tutte le discipline del rilevamento, per quanto moderne, hanno bisogno dell'esperienza di geodeti e cartografi e della loro attitudine alla ricerca di accuratezza, precisione ed affidabilità per quanto riguarda:

- ❑ l'elaborazione dei dati;
- ❑ la detenzione dei dati anomali;
- ❑ la validazione dei modelli;
- ❑ l'analisi globale dei dati,

ovvero per quanto riguarda il trattamento delle osservazioni. Del resto, le scienze della terra seguono la tendenza generale che percorre, in questi tempi moderni, le scienze fisiche (e naturali), in generale, avvalendosi di un metodo (un'arte) allo scopo di:

- ❑ raccogliere dati provenienti da fenomeni o processi naturali (descrizione e rappresentazione delle loro caratteristiche, mediante un certo numero di parametri);
- ❑ sintetizzare tali dati (ricerca di un modello per una spiegazione plausibile);
- ❑ interpretare tali dati (inferenza statistica: controllo di qualità, controllo e confronto d'ipotesi), allo scopo di prevedere eventuali sviluppi futuri dei fenomeni o processi in esame.

L'articolazione in passi di tale metodo è la seguente:

- descrizione fedele (accurata e precisa) dei campi d'interesse;
- stime di minima varianza ed analisi multivariata;
- detezione degli errori di misura e modello;
- tecniche robuste ed inferenza non – parametrica.

Anche le scienze dell'informazione, con la debita differenza, hanno bisogno di una metodologia, il cui nucleo centrale è costituito dal trattamento delle osservazioni, per poter tenere conto della non completa attendibilità / affidabilità dell'estrazione del messaggio originale da inviare al destinatario (a causa degli effetti di rumore). Tale metodologia si articola nei seguenti passi:

- definizione del messaggio e circoscrizione dell'informazione;
- densificazione e segmentazione, numerazione ed ordinamento, raggruppamento e formalizzazione dell'informazione stessa;
- tecniche robuste ed inferenza non – parametrica;
- miglioramento della qualità dell'informazione;
- stime di minima varianza ed analisi multivariata.

Come evidente, il punto di partenza è diverso, il percorso rovescio, ma il punto d'arrivo poco dissimile. I dati relativi ad oggetti sono, come già detto in precedenza, dati a referenza spaziale. Una suddivisione prioritaria li distingue in costanti e tempo – varianti (periodici, aperiodici, misti: aperiodici con stagionalità, di rottura); inoltre possono essere classificati come funzione di un punto e funzione di differenze di un punto. Le funzioni di un punto rimandano a problemi di interpolazione:

- interpolazione di linee, sezioni o profili e serie temporali;
- ricostruzioni di superfici o ipersuperfici;
- descrittori di forma: contorni di figure o superfici di oggetti;
- matching (centratura) di figure (mappe, immagini), modelli o oggetti.

Le funzioni di differenze di punto richiamano problemi di compensazione di reti in senso esteso, come:

- le reti geodetiche alle loro varie scale e per le più svariate finalità;
- i blocchi fotogrammetrici dallo spazio, aerei e terrestri;
- reti di altra natura, ad esempio, reti di comunicazioni, trasporto e trasmissione.

In questi casi, si rivela imprescindibile la predeterminazione di un sistema di riferimento, in quanto, a differenza delle funzioni di punto, le osservabili per le funzioni di differenze di punto restano invariate per variazioni del sistema di riferimento. La stessa soluzione determinata da vincoli si ottiene, come noto, con pseudo – osservazioni di peso elevato; tuttavia il metodo ha una validità più estesa, potendo tenere conto di pseudo – osservazioni di peso qualsiasi:

- informazioni a priori;

- dati ausiliari: osservabili secondarie e/o parametri di servizio;
- condizioni di regolarizzazione.

La modellazione dei problemi può essere realizzata in modo ottimale, oppure quantomeno progressivamente migliorabile, grazie a tecniche di:

- campionamento, per i problemi relativi alle funzioni di punto;
- ottimizzazione delle configurazioni delle misure e dei pesi delle osservazioni, per i problemi relativi alle funzioni di differenze di punto.

Nel primo caso, tramite l'analisi di varianza (confronto fra varianza spiegata e varianza residua) si procede sequenzialmente al campionamento:

- progressivo, cioè all'acquisizione di nuove osservazioni, dove l'approssimazione non è accettabile;
- selettivo, cioè al diradamento delle osservazioni, dove l'approssimazione è più che accettabile.

Nel secondo caso si attua una strategia congiunta di:

- simulazione, dove si determinano una o più configurazioni di tentativo delle reti posizionando i vertici e definendone i lati e le osservazioni;
- ottimizzazione, attraverso la quale le procedure progettuali sono iterate fino ad ottenere una soluzione ottimale, avendo cura di eseguire, nel contempo, un controllo sull'affidabilità della configurazione.

Il modello funzionale, costituito dalle equazioni di osservazione, pseudo – osservazione e vincolo, rappresenta la parte deterministica; in esso si distinguono:

- modelli grigi, se esistono precise leggi fisiche e/o geometriche di cui si vogliono stimare i coefficienti;
- modelli neri, se si devono individuare modelli *ad hoc*, in assenza di leggi appropriate.

Accanto al modello funzionale si ha, sempre, un modello stocastico, spesso definito dai pesi delle osservazioni, quasi sempre, considerati noti a priori e, più raramente, ristimati a gruppi fino ad ottenere un punto di riproduzione. Un modello stocastico più generale coinvolge anche correlazioni tra osservazioni; tuttavia la difficoltà di definire queste ultime lo fa adottare, solo nel caso di impiego di processi stocastici, data la notevole dimensione dei dati analizzati e la conseguente consistenza delle stime effettuate.

Il metodo principale di stima dei parametri è costituito dai minimi quadrati. Infatti esso risulta essere di buona attendibilità, derivandone stime corrette e di minima varianza, nel caso si verifichi l'ipotesi di osservazioni appartenenti a popolazioni normalmente distribuite. In ogni caso, è di importanza determinante che il rapporto osservazioni – parametri sia globalmente e localmente ridondante. Solo in questo modo, il sistema è affidabile, cioè identifica gli errori, e controllabile, ovvero è in grado di localizzare gli errori stessi; si ricordi inoltre che il sistema deve essere, globalmente e localmente ben condizionato. La presenza di dati anomali altera la normalità delle osservazioni ed inficia l'utilizzo di questo modello di stima, fornendo risultati distorti

ed accettando tutti i dati, senza essere in grado di espellere quelli spuri. In alternativa ai minimi quadrati, esistono procedure robuste che si rivelano ottimali allo scopo, perché in grado di riconoscere ed espellere i dati anomali. La loro matematicizzazione fa riferimento:

- alla funzione di influenza;
- al punto di rottura, conseguente alla presenza di un punto di reiezione automatica.

In questo modo, è possibile individuare, nel primo caso, piccoli e medi errori grossolani, e nel secondo caso, anche grandi errori grossolani, oppure dar vita ad una differente spiegazione, ovvero adottare un diverso modello funzionale, quando grandi errori grossolani mostrano curiosamente notevoli analogie nel loro comportamento. Un giudizio sulla qualità della stima discende dall'utilizzo di opportuni test statistici, secondo le tecniche di inferenza statistica. E' necessario diversificare significativamente un'eventuale ipotesi alternativa, in modo da permettere che le probabilità associate alle ipotesi siano abbastanza disgiunte. Si dice che la potenza del test è elevata, quando le probabilità si disgiungono rapidamente al cambiare delle ipotesi. Esistono due classi di tests statistici:

- test classici che lavorano sotto ipotesi di normalità dei dati;
- test non – parametrici (*distribution free*) che hanno condizioni di validità più generali.

In entrambi i casi, i tests statistici permettono di valutare:

- la significatività dei parametri (regressione multipla);
- la grandezza dei residui o del rumore (data snooping);
- la presenza o assenza di correlazione, oppure altre forme di dipendenza (regressione, connessione);
- l'adattamento ad una distribuzione di probabilità,

come pure la significatività di altre grandezze statistiche derivate. L'adozione di modelli del secondo ordine amplifica le capacità di analisi ed interpretazione, tanto delle stime, quanto dell'inferenza statistica. Infatti:

- alcuni fenomeni, caratterizzati da leggi ben definite, sono deterministici o quasi, avendo una correlazione uguale o prossima ad uno;
- altri fenomeni, pressoché casuali, sono un insieme di eventi indipendenti o quasi, avendo una correlazione bassa uguale a zero;
- altri fenomeni ancora, pur non essendo deterministici, evidenziano tramite una correlazione abbastanza elevata una certa memoria che permane nell'andamento / comportamento del fenomeno stesso.

I fenomeni con una sufficientemente elevata correlazione, interpretati stocasticamente, ovvero come una realizzazione di un processo stocastico, avendo assunto un determinato gruppo d'invarianza per la definizione dello stesso, consentono di costruire una legge interna ai dati sfruttando i dati stessi. Questa legge (funzione di covarianza) permette di separare nei dati, tramite un'operazione di filtraggio, una parte correlata spiegata, detta segnale stocastico, da una parte accidentale residua, detta rumore aleatorio,

effettuando stime ottimali. La stessa legge consente una predizione del segnale e, tramite propagazione di covarianza, di suoi funzionali.

## **6. Geodesia integrata**

Lo scopo della geodesia e della geomatica è la determinazione e rappresentazione, in opportune forme, della posizione di punti e della loro variazione nel tempo. Le osservabili geometriche sono semplici, o più complesse, funzioni della posizione relativa tra due punti. Queste funzioni sono influenzate da vari campi fisici, come quello gravitazionale e quello della rifrazione atmosferica. Nelle loro diverse forme, le reti geodetiche ed i blocchi fotogrammetrici tengono conto delle osservabili geometriche per la determinazione delle posizioni (relative) tra i punti delle reti. Quando le misurazioni sono ripetute nel tempo, si possono valutare anche le variazioni temporali delle posizioni (relative); tuttavia è necessario imporre un sistema di riferimento arbitrariamente scelto per eliminare l'ambiguità dell'origine, dell'orientamento e della scala. Generalmente le osservabili geometriche sono funzioni non-lineari della distanza tra due punti e dipendenti dal tempo.

Nelle stesse equazioni, compaiono anche altri termini, come gli effetti del campo di gravità terrestre, le influenze della rifrazione atmosferica ed i parametri di calibrazione, a seconda delle procedure di acquisizione dei dati. La relazione tra le osservabili e i parametri geometrici, che descrivono la posizione dei punti della rete, è espressa attraverso modelli funzionali noti, spesso non-lineari, che devono essere linearizzati (usando valori approssimati per i parametri). Il difetto di rango del sistema è eliminato con l'introduzione di un sistema di riferimento. La relazione tra le osservabili geodetiche e i campi fisici può essere espressa con opportuni modelli stocastici linearizzati, dalle cui funzioni di covarianza (invarianti rispetto a opportuni gruppi di trasformazioni dei parametri), attraverso il filtraggio, si può ottenere il segnale stocastico.

I modelli stocastici possono servire per interpretare anche i parametri geometrici, come gli errori di misura sistematici o pseudo-sistematici, le altezze, le variazioni di altezza o di posizione, le proiezioni su mappe, il livello di grigio o di colore delle immagini, il contorno o altre caratteristiche delle figure, la superficie o altre caratteristiche degli oggetti. Gli eventuali movimenti delle posizioni dei punti possono essere modellati da un'opportuna funzione temporale. A loro volta, i parametri delle leggi di tale movimento possono essere modellati in funzione delle stesse posizioni dei punti. In questo modo, non solo i parametri di posizione, ma anche quelli di movimento (spostamenti e deformazioni) possono essere ricondotti alle osservazioni geometriche.

Se si hanno a disposizione campi densi di punti, gli elementi morfologici e le forme delle figure e degli oggetti possono addirittura essere modellati con modelli digitali continui. Se si trascura la loro eventuale dipendenza dal tempo, le equazioni delle osservabili geometriche vengono rappresentate da funzioni geometriche ben note e relativamente semplici. La dipendenza dal tempo, se presente, e gli aspetti morfologici possono essere rappresentati in modo deterministico interpolando i dati con polinomi o funzioni spline e, nel dominio delle frequenze, con l'analisi di Fourier o delle onde. Spesso si preferisce l'approccio stocastico nel caso in cui la serie temporale è lunga o il campo dei punti è vasto. In questi casi, le funzioni di covarianza, indispensabili nel prosieguo, sono definite a priori.

Generalmente si hanno a disposizione ripetizioni delle misurazioni, soprattutto nelle reti appositamente disegnate per il controllo delle deformazioni in situazioni critiche; invece per il controllo di movimenti lenti, le

reti contengono molti punti, ma le ripetizioni, se presenti, sono relativamente poche. Infine serie temporali lunghe di campi di punti vasti sono in generale rare. D'altra parte, con l'uso del metodo della collocazione, è naturale che si possa richiedere l'invarianza temporale solo per lunghe serie temporali e l'invarianza spaziale più l'isotropia (o la decomponibilità ortogonale) solo per vasti campi di punti. Secondo l'approccio tradizionale i diversi sistemi sono risolti sequenzialmente. Prima si determinano le influenze dei campi e i parametri di calibrazione, poi per ogni epoca, si effettua una compensazione della rete, e successivamente un'interpolazione dei dati per descrivere gli eventuali movimenti dei punti stessi in funzione del tempo. Infine i parametri caratteristici delle leggi di moto o degli aspetti morfologici sono modellati come funzioni delle posizioni geografiche. Gli ultimi due passi possono anche essere parzialmente scambiati fra loro, studiando dapprima gli aspetti morfologici e successivamente la loro evoluzione temporale.

Nell'approccio fornito dalla geodesia integrata (intesa nel suo senso più ampio), tutti i sistemi sono risolti contemporaneamente. Di conseguenza, dopo la linearizzazione delle equazioni di osservazioni e pseudo-osservazioni, le osservabili e gli altri dati sono raccolti in un unico sistema contenente parametri incogniti incorrelati e correlati, che possono essere interpretati come un segnale stocastico da filtrare dal rumore casuale. Per far questo, sono necessari compensazioni preliminari separate: ricavare la matrice di covarianza del segnale dalle stime dei parametri incogniti o dai residui e calcolare sigma zero, che rappresenterà la varianza del rumore. Questo può dare problemi nello stabilire i pesi dei diversi elementi. Comunque, ripetendo la procedura costituita dall'approccio integrato, l'incertezza circa il rapporto dei pesi può essere eliminato e si possono stimare opportuni valori per i pesi, trovando un loro punto di riproduzione. Inoltre si ipotizza l'assenza di dati anomali.

Dato che le osservazioni possono presentare errori grossolani o effetti non modellabili, deve essere applicata una conveniente strategia che combini insieme robustezza ed efficienza. Infatti le procedure robuste sono utili per l'identificazione di errori grossolani, mentre il metodo dei minimi quadrati è molto potente nello stabilire se questi possono essere accettati o meno. Il difetto di rango nell'insieme delle matrici, che descrive l'unico sistema di equazioni, è facilmente determinato. Infatti un sistema contenente ripetute osservazioni della rete ha un difetto di rango pari al numero dei parametri non determinabili delle funzioni di approssimazione che descrivono la variazione temporale della posizione dei punti. Inoltre i sistemi contenenti queste osservazioni insieme a modelli digitali continui (di campi di punti) hanno in generale lo stesso difetto di rango.

### **PRIMA CONCLUSIONE – Sugli aspetti metodologici delle discipline del rilevamento**

La formulazione di una conclusione metodologica fa ancora riferimento ad una lezione del sopraccitato Prof. Mariano Cunietti, sulla possibilità di dare corpo ad una disciplina scientifica. La lezione prende avvio da una citazione della Bibbia: "Ecco, un uomo stava ritto accanto ad un muro, tirato a piombo, con in mano un piombino. E Jahvè mi domandò: "Cosa vedi, Amos?" Risposi: "Un piombino". E il Signore mi disse: "Ecco, ho messo un piombino in mezzo al mio popolo, Israele". Il profeta Amos, nell'ottocento avanti Cristo, in questa sua visione, ammonisce i suoi conterranei: il popolo di Israele, e ricorda loro che sono posti costantemente sotto osservazione da parte di Dio. Il piombino che controlla la verticalità di un muro assurge a simbolo del controllo del comportamento morale. Non è del comportamento morale che si occupa il presente lavoro, ma è significativo che il concetto di osservazione strumentale con uno strumento geodetico: il filo a piombo, fosse presente in uno dei più antichi profeti. Vuol dire che, fin da allora, si controllavano strutture murarie al

fine della sicurezza, contro eventuali cadute pericolose o dannose. Posto questo richiamo che viene dai secoli passati ed avverte di una presenza vigile (richiamo che non è inutile anche per gli uomini e gli osservatori di oggi), quanto segue si inoltra nel vero e proprio discorso tecnico.

La lezione del Prof. Mariano Cunietti si sviluppa stabilendo, come una disciplina scientifica si definisca tramite il possesso delle seguenti caratteristiche: un metodo, una motivazione generale ed una comunità di operatori. Il metodo deve essere quantitativo; ovvero la disciplina richiede che si proceda tramite una quantificazione. La misura rende oggettivo e verificabile ogni risultato, permette confronti non ambigui ed esige un'analisi sistematica dei problemi che sono affrontati nell'ambito della disciplina, seguendo un procedimento deduttivo. Ogni situazione operativa deve essere inquadrata, come un caso particolare di una procedura operativa generale, e non risolta, come un caso speciale a sé stante. Da questa procedura generale devono essere dedotti tutti i possibili procedimenti specifici e da essa devono venire le risposte a tutti i quesiti, anche quelli relativi alla conoscenza delle incertezze, proprie di ogni operazione di misura. A sua volta, la sintesi delle misure analitiche deve potersi fondare su modelli matematici, propri della disciplina che, di volta in volta, devono potersi adattare al caso concreto da esaminare. Le procedure di analisi e di sintesi possono essere ampliate e rese generali, nel senso che la disciplina non può considerarsi inquadrata, rigidamente, in un metodo completamente definito. Gli ampliamenti devono essere generalizzazioni più vaste e non devono esaurirsi in un caso sporadico, anche se il caso sporadico può essere stato il motivo dell'ampliamento. La disciplina è scientifica quando il metodo permette a chiunque di applicarlo alle diverse situazioni concrete. La scienza richiede che si apra a tutti ed a tutti sia data facoltà di accedervi.

La motivazione generale, che giustifica l'istituzione di una disciplina, metodologicamente coerente deve essere di carattere generale e non settoriale. La conoscenza, in generale, e la conoscenza scientifica, in particolare, procede tramite una spirale illimitata di analisi e di sintesi. L'analisi scompone l'oggetto della conoscenza nei suoi elementi concettuali. La sintesi ricostruisce l'oggetto, come rappresentazione mentale unitaria, tramite un'opportuna unione di elementi concettuali, separati dall'analisi. Nel campo della conoscenza scientifica, il prodotto della sintesi è un modello concettuale, in generale, di tipo matematico. La conoscenza scientifica, applicata alla realtà oggettiva, ammessa come esistente per assioma, dapprima separa i vari campi, settori, elementi, componenti: le discipline scientifiche; successivamente tenta una sintesi sempre più allargata. Nell'ambito di ogni disciplina, la conoscenza scientifica non perde le sue caratteristiche di razionalità ed intersoggettività. Inoltre per costituire la disciplina scientifica, relativa ad un determinato componente della realtà occorre delimitare gli oggetti ai quali la disciplina si interessa. A compiere questa delimitazione concorre una motivazione che sia meno generale di quella generale e generica contenuta nella conoscenza. Un insieme di oggetti ben delimitato, un insieme di relazioni usabili per il modello sintetico, una motivazione autonoma e generale distinta dalle applicazioni sono gli elementi che servono a caratterizzare ogni disciplina scientifica. Per quanto diversi siano gli oggetti presi in considerazione, i problemi da risolvere, di volta in volta, e le applicazioni dei risultati sintetici, tutto deve essere ricondotto alle motivazioni generali proprie della disciplina, così come il metodo deve essere quello deduttivo: dal generale al particolare.

La comunità degli operatori che si interessano alle problematiche, con il metodo e le motivazioni sopra descritte, è assai varia, anche se non numerosissima. E' una comunità culturalmente eterogenea che deve essere portata a sentirsi unita dal metodo e dalle motivazioni, e deve cercare di rendere più omogenee le procedure, nel comune sforzo di una sempre maggiore scientificità. La scientificità della disciplina dipende

dallo spirito critico dei membri della comunità che ad essa si interessa. Lo spirito critico richiede apertura verso gli altri, nulla deve essere tenuto nascosto, ma tutto reso il più chiaro e trasparente possibile. Lo spirito critico deve richiedere la verifica dei risultati ottenuti e le osservazioni devono essere vagliate con lo scopo di accertarne il grado di attendibilità. La comunità scientifica è tale solo se in se stessa sente lo stimolo di accrescere e diffondere conoscenza. Non è una comunità quella che non aiuta tutti a capire le sue procedure ed i suoi risultati particolari. Non è una comunità scientifica quella che operando nell'ambito di una disciplina non si sente stimolata a ricercare, da un lato, ed a fare scuola, dall'altro.

La lezione del Prof. Mariano Cunietti si conclude, in modo interlocutorio, ritornando alla stessa citazione della Bibbia da cui ha preso avvio. Non è consentito tirare le fila di questo discorso, perché non ha una tessitura. Al più, esso può considerarsi la trama su cui l'ordito delle azioni future potranno tessere una tela e giungere a qualche conclusione. Come Amos, sono solo visioni (non profetiche e non hanno Jahvè come suggeritore), ma come Amos si avverte, si considera e si indica. Una disciplina scientifica potrà nascere, solo, da una discussione approfondita sulla sua struttura logica, sulla sua costituzione scientifica, sulle implicazioni operative a proposito delle quali si sono accesi alcuni violenti sprazzi di luce che forse hanno fatto intravedere qualcosa.

#### **APPENDICE A – Non avere paura del nuovo**

E' una moda (forse tutta italiana, ma forse non solo, perché peggiorare le cose è sempre molto facile), cambiare tutto, in modo gattopardesco, affinché non cambi niente. Il riferimento alla filosofia di Tancredi Falconieri (citato appena sotto, per esteso), giovane nipote del principe di Salina (due dei protagonisti del romanzo *Il Gattopardo* di Giuseppe Tomasi di Lampedusa <sup>2</sup>), non è casuale, ma volontario. Infatti questa filosofia, schiettamente esposta dal nipote allo zio, alla vigilia della spedizione dei mille in Sicilia, è indicatrice di una volontà conservatrice, in senso deteriore, perché si avvale delle incertezze e delle ambiguità del nuovo con l'intento di conservare il peggio del vecchio.

In questa ottica, sembra avvenire il discorso sulla modifica dei settori scientifico-disciplinari, dove ciascuno cerca di mantenere proprie posizioni di privilegio, eventualmente a scapito di altri, costruendosi *ad hoc* una corte, cioè inglobando settori affini, in senso più o meno lato, data una richiesta di riduzione del numero totale degli stessi. Infatti poiché è evidente che chiunque ambisce ad essere un centro importante e non una periferia marginale, il tutto si riduce ad una lotta di potere. Pertanto i potenti di sempre rimangono potenti, pur nel pieno rispetto dei cambiamenti formali richiesti, mentre tutti i piccoli subiscono nuovi aggravii che si aggiungono agli aggravii vecchi, comunque rimasti.

Tutto ciò vale anche per il settore scientifico-disciplinare Topografia e Cartografia, ovvero Geomatica, seguendo la moda di dare ai nomi connotati più moderni. A riguardo, molto meglio sarebbe stato proporre Geodesia e Geomatica, così da ribadire una nobile origine che pochi altri possono invece vantare. In ogni caso, il primo passo è stato riscrivere la declaratoria che ha visto alcuni esercizi, disposti sugli opposti versanti della innovazione e della conservazione, purtroppo incapaci di dialogo. Quanto segue è un tentativo di sintesi, libero da interessi di parte, a partire dall'interessante segnalazione di un amico e collega su una brevissima definizione, già vigente in ambito internazionale.

Se vogliamo che tutto rimanga come è, bisogna che tutto cambi! (Giuseppe Tomasi di Lampedusa).

---

<sup>2</sup> Giuseppe Tomasi di Lampedusa, *Il Gattopardo*. Universale economica Feltrinelli, Milano, 1999.

Il settore scientifico-disciplinare s'interessa dell'attività scientifica e didattico/formativa denominata Geomatica: un insieme di discipline (basate su trattamenti rigorosi dei dati), aventi per oggetto: acquisizione, filtraggio, restituzione, analisi e gestione di dati a referenza spazio-temporale, cioè dati di natura metrica e/o tematica, identificati dalla loro posizione e qualificati dalla accuratezza, precisione ed affidabilità di rilevamento.

- L'acquisizione comprende: metodi, tecniche, strumenti e sistemi di rilevamento, inclusi procedure di calibrazione, studio di errori caratteristici e loro propagazione;
- il filtraggio: tecniche di riduzione, compensazione o rimozione di errori;
- la restituzione: tecniche di modellazione 3D, editing di dati e inserimento in DB;
- l'analisi: studi di serie temporali di dati per monitoraggio e controllo, segmentazione e classificazione di immagini (ottiche, LiDAR, SAR e SONAR), inferenza e predizione;
- la gestione: formazione, manutenzione e aggiornamento di DB topografici e GIS (con funzioni per l'interoperabilità ed estensioni per DB dinamici, compresi sistemi Internet e Geoservizi).

Le discipline del rilevamento comprendono:

- la geodesia (fisica, geometrica e spaziale);
- la topografia;
- la fotogrammetria (dallo spazio, aerea e terrestre);
- la foto-interpretazione;
- la cartografia (tecnica e tematica);
- il telerilevamento (dallo spazio, aereo e terrestre);
- la navigazione (spaziale, aerea, marittima e terrestre).

Esse si fondano a livello di modelli e metodi (statistici e numerici) di analisi dei segnali, e di strumenti informatici (di acquisizione e archiviazione dei dati, e di calcolo e rappresentazione di risultati). Gli strumenti operativi sono:

- il trattamento delle osservazioni;
- gli approcci matematici integrati;
- l'elaborazione, l'analisi e l'interpretazione di immagini, mappe, scene, modelli 3D e sequenze (acquisiti da fotogrammetria digitale e telerilevamento).

Queste discipline riguardano:

- metodi e tecniche di rilevamento;
- modelli di elaborazione (georeferenziazione e restituzione) e gestione;
- classificazione tematica dei contenuti, di dati finalizzati alla conoscenza della superficie della terra o porzioni di essa (ivi compreso l'ambiente urbano, le infrastrutture ed il patrimonio architettonico e archeologico).

Le principali applicazioni riguardano:

- ❑ lo studio del campo di gravità globale e locale;
- ❑ l'istituzione, la realizzazione ed il mantenimento di reti, per la definizione di datum globali e locali;
- ❑ il posizionamento statico o cinematico di punti e/o sensori con sistemi satellitari e inerziali;
- ❑ la produzione e l'aggiornamento di cartografia, ortofoto, DTM, DB topografici e GIS, con tecniche topografiche, fotogrammetriche, LiDAR e SAR;
- ❑ la produzione di modelli 3D di ambienti urbani;
- ❑ il rilevamento per finalità catastali e di pianificazione territoriale;
- ❑ il rilevamento di beni culturali (architettonici, ambientali, archeologici) ed oggetti industriali a piccola scala;
- ❑ il controllo di movimenti e deformazioni di terreno (compresa la geodinamica globale ed a scala continentale e regionale), di grandi strutture e di monumenti;
- ❑ il tracciamento di opere ed infrastrutture;
- ❑ il rilevamento metrico di manufatti civili ed industriali, in fase di costruzione;
- ❑ il cosiddetto *reverse engineering*;
- ❑ il posizionamento, la cosiddetta *security* e la cosiddetta *safety* (un'endiadi inglese, a fronte di un solo termine italiano) di anziani e disabili.

Per loro natura, questi contenuti hanno applicazioni anche in altri settori, con i quali si ha interazione d'interesse e di studio.

Questa lunga citazione serve ad ulteriore commento del titolo di questa appendice. Infatti in questi ultimi tempi, le discipline del rilevamento sono come soggette ad una forza centrifuga che, mentre cresce il loro stesso numero e maggiormente il numero delle loro possibili applicazioni, allontana le une rispetto alle altre. Pertanto altri settori scientifico-disciplinari contribuiscono alle suddette crescite, seppure parzialmente e soprattutto settorialmente, molto spesso, tendendo ad erodere/sottrarre competenze, anziché condividere conoscenze ed esperienze comuni, benché provenendo da origini diverse e lontane. Allora un certo senso di smarrimento e disagio è naturalmente comprensibile.

Invece indulgiare/indulgere con questi sentimenti è un gravissimo errore che può portare alla dissoluzione dell'intero scientifico-disciplinare, come pure alla sua diluizione in un qualsiasi macrosettore eterogeneo. Di contro, è necessario ribadire, con forza, la centralità del settore scientifico-disciplinare ogni qual volta siano richieste alte precisioni nel posizionamento e/o nella rappresentazione, come pure certificare un dato livello di precisione, di fronte ad altri prodotti d'uso comune, quando le elevate precisioni non siano richieste. Solo così le nobili origini ed una lunga storia sono difese e, altrettanto interessanti, passi futuri prossimi (in quanto nulla è dato sapere, riguardo il futuro lontano) saranno ancora possibili.

E' un'opportunità ed una sfida: a tutti l'augurio sincero di saperla cogliere positivamente. D'altra parte, anche recentemente o poco più addietro, esperienze positive sono fatte e meritano d'essere citate. Infatti i gruppi di lavoro e di studio, istituiti in ambito nazionale (con la loro effettiva attività e lo spirito di collaborazione formatosi), i dottorati di ricerca consortili specifici (o le varie anime specifiche, all'interno di dottorati di ricerca d'ateneo più ampi) e la partecipazione qualificata alle principali associazioni scientifiche internazionali sono

certamente punti d'eccellenza. La loro memoria e la loro auspicata continuazione, nonché il loro possibile miglioramento, sono un invito, caldo e pressante, proprio per tutti.

### **PARTE III – GEOMATICA APPLICATA**

#### **1. Il prorompere della geomatica**

Di fronte all'odierno prorompere della geomatica, studiare il trattamento delle osservazioni nelle scienze geodetiche e cartografiche richiede di prendere in considerazione la geomatica stessa, il mondo dei GIS e dei LIS, e la galassia delle immagini. Dopodiché un elenco di metodologie e procedure, a seguire la statistica descrittiva e l'inferenza statistica elementare, presenta problemi di stima di parametri, a minimi quadrati, con modelli lineari e non-lineari, e controlli numerici e statistici. I suddetti modelli lineari hanno la forma delle equazioni di condizione pure, delle equazioni di condizione con parametri (solitamente ridotte ad equazioni d'osservazione) e delle equazioni di condizione con parametri e vincoli (solitamente ridotte ad equazioni d'osservazione e pseudo-osservazione).

Questi modelli sono del tutto generali e, ad essi, possono essere ricondotti casi particolari, costituiti da parametri di servizio, osservabili secondarie ed equazioni di condizione generiche. Invece i modelli non-lineari prendono in considerazione la non-linearità del modello funzionale, del modello stocastico e della norma (particolarmente utile nel caso di procedure robuste, alternative ai minimi quadrati). Per quanto riguarda i controlli numerici, sono affrontati il problema del condizionamento dei parametri del sistema e dell'affidabilità dello schema di misura. Invece per quanto riguarda i controlli statistici, l'inferenza statistica per i minimi quadrati e le loro estensioni è innanzitutto rivolta alla certificazione dell'auto-consistenza e della cross-validazione dei dati.

Inoltre sempre indispensabile e fondamentale è procedere all'individuazione ed eliminazione dei dati anomali, nonché alla corretta gestione di tecniche multilivello. Altri problemi complementari, comunque rilevanti, riguardano le correlazioni e la sequenzialità. Infatti le correlazioni presenti nelle osservazioni e/o nelle informazioni a priori danneggiano, in generale, la precisione delle stime dei parametri, ad eccezione della correzione degli errori sistematici (nei cui confronti è comunque meglio non parlare di correlazioni, per evitare discorsi troppo ampollosi). Invece la sequenzialità serve a prendere in considerazione il trattamento dei dati e la loro analisi statistica, passo dopo passo, rispettivamente attraverso l'innovazione e l'aggiornamento del calcolo, e per mezzo dell'inferenza statistica sequenziale.

Allora fare un discorso pertinente sulla geomatica applicata è una sfida ed alcuni rischi devono subito essere messi in evidenza, per essere certamente evitati. Il primo è rifugiarsi in discorsi di nicchia di cui il principale è quello di tono scienziato. Infatti la geodesia e le sue scienze affini sono importantissime, così come l'astronomia sua scienza – sorella e la matematica, essenzialmente un linguaggio artificiale (anche se in buona parte ricollegabile a strutture fisiche della mente umana e sicuramente fondato, almeno nelle sue parti più semplici ed antiche, su chiare analogie con il mondo della natura) con il quale entrambe, a lungo, hanno intrecciato stimoli, partecipazioni e benefici. Tuttavia un solo discorso scienziato è limitato e perde di vista l'obiettivo dichiarato di presentare almeno alcune applicazioni possibili della geomatica.

Pertanto il primo rischio è un discorso dall'alto, essenzialmente accademico, dove le applicazioni sono esempi centellinati, ovvero presentati in piccole dosi, forse con un po' di fastidio e quasi solo per dovere.

Tuttavia un secondo rischio, altrettanto grande, è fare una grande abbuffata d'esempi, senza alcuna logica propositiva, alcuna strutturazione sistematica ed alcuna motivazione scientifico – tecnologica: una abbuffata, senza limiti, né misura, tanto per gradire, perché gli innumerevoli esempi di tutti possono essere ripetuti, disorganici e caotici. D'altra parte, se è vero, come è vero, che gli esempi sono di tutti ed innumerevoli, solo il loro raggruppamento, la loro classificazione e la loro interpretazione, ancorché basata su aggregazioni minime, fa servire davvero la presentazione degli esempi.

Altrimenti la grande carrellata d'esempi, senza limiti, né misura, suona solo come un liberi tutti di fare tutto quello che si vuole, senza progetto, senza razionamento e senza controllo, ovvero senza alcun fondamento scientifico – tecnologico cui assoggettarsi e rispondere: come in un grande bricolage. Tuttavia è ben chiaro che, se gli esempi non sono mai la pura messa in pratica di una teoria astratta che, a sua volta, proprio sugli esempi può affinarsi, correggersi ed avanzare, senza alcun fondamento scientifico – tecnologico, gli stessi esempi, da soli, diventano una povera cosa. D'altra parte, non è neppure il caso di parlare di cultura popolare, infatti è ben noto a tutti che già l'agrimensura dell'antichità, più remota, si rifaceva alla geometria ed alla misura del tempo, e ha anche contribuito alla loro fondazione.

Non un rischio, ma un'attenzione lessicologica deve essere posta all'uso dei termini: geomatica applicata ed applicazioni della geomatica; essi sono sinonimi. Capita infatti di sentire discettare dell'esistenza, o meno, delle scienze applicate e/o delle applicazioni della scienza. Tuttavia questi discorsi, fuori da una cerchia ristrettissima di filosofi della scienza e di veri scienziati che, con grande cognizione di causa, partecipano allo stesso dibattito, sono solo discorsi di sciocchi che, senza molte vere conoscenze, fanno discorsi a vanvera. Un ottimo parallelo può essere fatto con altre parole in libertà, come a fare sistema e/o squadra, dove nel caso specifico tutto ciò significa disprezzare la ricerca di base, libera, isolata e fortuita, togliere ad essa i mezzi, ancorché minimi, di sussistenza e mettere in stato di soggezione chi la sviluppa.

Per contro, ciò significa privilegiare, sostenere e difendere, a spada tratta, progetti spesso megalomani (per lo più, votati a sicuro fallimento), purché altisonanti (cioè capaci di ben propagandare l'immagine, senza tenere debito conto dei meriti specifici), e/o attività pratiche di piccolo cabotaggio, purché immediatamente molto redditizie. Allora fare un discorso pertinente sulla geomatica applicata è presentare una raccolta ragionata d'esempi, mettendo bene in evidenza, perché questi servono a spiegare qualcosa sulla geomatica (a prescindere dall'ovvia considerazione che alcuni esempi sono presentati, perché in possesso di chi li intende presentare). Di certo, è una sfida, ma anche, e soprattutto, una bella opportunità e, di conseguenza, un rischio che vale la pena correre.

Nuove tecniche del rilevamento, quali la geodesia spaziale (sistema GNSS), la topografia automatica (sistema "laser – scanning", strumenti integrati, strumentazione speciale per il controllo) e la fotogrammetria digitale (sistemi ottici: NOAA, LANDSAT, SPOT, IKONOS, ecc. e nel campo delle microonde: SAR; camere Three – lines, CCD), hanno trasformato profondamente le metodologie di acquisizione di informazioni metriche e tematiche. Contemporaneamente l'esigenza di interpretare ed integrare fra loro le informazioni acquisite è divenuta fondamentale; conseguentemente la cartografia numerica ed i sistemi informativi a referenza spaziale: geografici (GIS) e territoriali (LIS) assumono importanza ancora maggiore.

Le nuove tecniche di rilevamento stanno aprendo nuove possibilità, nel campo dell'acquisizione, dell'elaborazione e della restituzione di informazioni metriche e tematiche, e conseguentemente incentivano nuovi studi, sia sperimentali (acquisizione dei dati), che modellistico - informatici (trattamento delle

osservazioni). Pertanto si comprende che le finalità degli studi e delle ricerche nell'ambito delle discipline del rilevamento devono essere duplici. Da un lato, teorico – informatiche: individuare i metodi più rigorosi ed implementare i suddetti algoritmi in programmi di calcolo. Dall'altro, operative: definire le modalità, più semplici e corrette, di acquisizione delle informazioni, per ogni diversa tecnica.

È necessario sottoporre a critica le metodologie di acquisizione e di trattamento dei dati, fino ad ora impiegate, e definire nuove metodologie. Si deve poi provvedere alla stesura, all'implementazione, alla sperimentazione ed alla documentazione di nuovi programmi. È indispensabile sottolineare che attualmente sono disponibili sul mercato, alcuni pacchetti software realizzati all'estero. Tuttavia non è auspicabile l'utilizzo di tali programmi (fuorché per eventuali confronti), perché l'acquisizione, a scatola chiusa, è errata metodologicamente, ostacola lo sviluppo della ricerca su basi solide e, anzi frequentemente, lascia dietro di sé numerosi dubbi non risolvibili, solo per pigrizia.

Scopo degli studi e delle ricerche da effettuarsi in questo campo è lo sviluppo di metodologie e procedure innovative nell'ambito dell'elaborazione di sequenze, immagini e mappe derivate da sensori digitali, telerilevate e non. Si tratta, da un lato, di implementare in programmi le metodologie analitiche tradizionali; dall'altro, di sfruttare i vantaggi delle procedure digitali, così da sostituire l'operatore umano in una serie di funzioni ripetitive e lente. In quest'ambito, altri interessanti contributi sono offerti dai GIS e dai LIS che vogliono costituire un'interfaccia fra i dati rappresentativi della realtà, i modelli di interpretazione della stessa e le diverse comunità interessate alla loro consultazione ed al loro utilizzo.

Le discipline del rilevamento sembravano ormai consolidate ed anche esaurite, come possibilità di ampliamento e di approfondimento. In campo geodetico, topografico, fotogrammetrico e cartografico, ogni problema sembrava risolto, ogni esigenza soddisfatta. La rivoluzione culturale, scientifica e tecnologica, provocata insieme dalla conquista dello spazio e dal prorompere della geomatica, sia sul versante della strumentazione, sia su quello della teoria dei modelli e dell'informatica grafica, ha dischiuso nuovi orizzonti applicativi. Per affrontare queste nuove frontiere, occorre un modo nuovo di procedere, di considerare le cose: una nuova filosofia comportamentale, quasi una nuova disciplina: la geomatica.

## **2. Il mondo dei GIS e dei LIS**

Il mondo dei GIS e dei LIS è un mondo complesso, fortemente strutturato ed interdisciplinare. Le banche dati ed i sistemi informativi sono strumenti indispensabili e fondamentali, per molteplici attività pubbliche e private che singoli individui, gruppi più o meno grandi di essi ed intere collettività si trovano ad operare. Dai semplici archivi di dati ai sistemi evoluti diretti al supporto di decisioni, un'enorme quantità di dati è catalogata, elaborata ed analizzata, per ottenere informazioni ed indicazioni a fini di studio e/o di programmazione. In questo contesto, i GIS ed i LIS hanno lo stesso ruolo, operano con le stesse modalità ed assolvono gli stessi compiti, per tutto ciò che riguarda le problematiche dell'ambiente e del territorio.

Come noto, la maggiore e più rilevante differenza fra le usuali banche dati ed i comuni sistemi informativi, da un lato, ed i GIS ed i LIS, dall'altro, sta nell'essere questi ultimi a referenza spaziale. Si ricordi inoltre che basi di dati dinamiche sono capaci di cogliere, accanto alla distribuzione spaziale, anche l'andamento temporale dei fenomeni e processi tempo - varianti. Pertanto studi e progetti, sull'ambiente ed il territorio, alle varie scale d'interesse, sui manufatti e gli oggetti ivi consistenti, sui beni culturali ed ambientali e su ogni altro oggetto in esame che possa essere studiato tanto nella sua estensione spaziale, quanto nel suo andamento temporale, sono i più importanti campi d'elezione per l'utilizzo dei GIS e dei LIS.

La loro generalità, flessibilità ed interdisciplinarietà sono la ragione del loro successo e della loro diffusione. Contemporaneamente proprio queste caratteristiche fanno, degli stessi, un mondo complesso e fortemente strutturato. Infatti concorrono alla realizzazione ed alla gestione dei GIS e dei LIS: le piattaforme hardware, con tutte le periferiche del caso, i sistemi software, con le necessarie estensioni ad altri sistemi software esterni, le varie e diverse basi di dati e le amministrazioni, gli enti o gli organismi che li hanno raccolti, validati ed organizzati, i modelli di analisi ed interpretazione e l'insieme delle discipline scientifiche e tecniche che li hanno generati, le comunità spesso molto estese e variegate dei loro fruitori.

Può sembrare strano l'accostamento pesante fra GIS e LIS, da un lato, ed analisi statistica, dall'altro. Infatti tipicamente i primi fanno riferimento a problemi di cartografia numerica e subordinatamente di fotogrammetria e telerilevamento, mentre la seconda costituisce una particolare branca della statistica, della matematica o della matematica applicata. Tuttavia questo accostamento, usuale nelle Università dei paesi dell'Europa Centrale e Settentrionale, è più che opportuno e ben fruttifero, in quanto permette di valutare l'incertezza dei dati contenuti, di formulare complessi modelli interpretativi e di superare, almeno in parte, le rigidità imposte dai sistemi commerciali software, attualmente in uso.

L'avvento dei GIS e dei LIS rende superata la cartografia tradizionale. Rappresentazioni cartografiche di tipo tecnico e/o tematico, a partire da basi di dati originali, come pure derivate o elaborate, costituiscono esclusivamente uno dei possibili prodotti del sistema. Infatti la disponibilità di elaborazioni in forma numerica, opportunamente orientate per l'uso cartografico, permette la presentazione di prodotti finali nelle vesti di rappresentazioni cartografiche, per quanto riguarda il contenuto planimetrico, così come nelle forme a curve di livello o rappresentazioni 3D con eventuale ombreggiatura, per quanto riguarda l'altimetria. Altre importanti forme di rappresentazione sono costituite dall'ortoproiezione e dalla prospettivizzazione.

In entrambi i casi, il contenuto qualitativo è da considerarsi fondamentale ed almeno localmente prevalente, da rinunciare a qualsiasi rappresentazione grafica ed alla conseguente interpretazione e semplificazione. L'ortoproiezione permette di trasportare un'immagine su una carta, oppure su un modello 3D, qualsiasi sia la superficie adottata, mentre la prospettivizzazione consente di generare un'immagine virtuale. A valle di entrambe, la sovrapposizione permette di disegnare dentro ortoretrorimmagini ed immagini, riportando su di esse elementi vettoriali d'interesse. Tutte queste operazioni sono configurate *online* e facilmente gestibili da sistemi evoluti e di ampia diffusione, quali quelli costituiti oggi dai GIS e dai LIS.

Un buon punto d'inizio prende avvio da un'attenta ed accurata analisi sull'organizzazione dei GIS e/o LIS, sulla loro attualità e sulle conseguenze da essi apportati. Dopodiché occorre occuparsi della realizzazione dei GIS e dei LIS, prendendo in considerazione le componenti organizzative, i metodi di lavoro, le infrastrutture (hardware, software) di calcolo e di gestione, ed i dati. Oggetto d'interesse sono altresì l'acquisizione dei dati e le fonti d'informazione: rilevamenti in loco, immagini fotografiche ed elettroniche telerilevate e non, piani e carte (topografiche, tecniche, tematiche, catastali) esistenti, dati statistici (censimenti, sondaggi, inchieste), banche dati in esercizio, GIS e LIS preesistenti.

Successivamente è necessario prendere in considerazione la gestione dei dati, riguardante tanto le funzioni del sistema (realizzando visualizzazioni; compiendo estrazioni locali, selezioni logiche e in base a criteri spaziali; operando mutazioni e aggiornamento dei contenuti), quanto l'organizzazione dei dati (dalla componente descrittiva: tabelle, grafi, modelli relazionali, ecc., alla componente geometrica: strutture a raster, forme vettoriali, soluzioni miste). Anche l'esercizio del sistema, dall'inizio dell'attività all'integrità

(secondi parametri di correttezza, consistenza, protezione e sicurezza) dei dati, come pure dall'aggiornamento dell'informazione all'offerta di informazioni, è posto in evidenza

Un punto fondamentale consiste nella progettazione dei GIS e/o dei LIS, dall'analisi preliminare (pre – fattibilità e fattibilità, delimitazione ed alternative) al progetto di dettaglio delle componenti, per giungere alla messa in esercizio (gestione a lungo termine, aggiornamento dell'informazione, sua cadenza e periodicità). Tutte le tecniche d'acquisizione delle informazioni, comprendenti i rilevamenti topografici, la digitalizzazione di piani e carte, la digitalizzazione di immagini, l'integrazione di dati numerici e l'eventuale trasformazione di dati geometrici, comunque rilevati, sono oggetto d'interesse, specialmente ove queste sono considerate classiche nelle discipline del rilevamento.

Un altro punto indispensabile è costituito dalle strutture dati e dalle strategie d'implementazione, realizzando nell'ordine i modelli esterno, concettuale (secondo l'approccio entità – relazione, con gli attributi di entrambe), logico (facendo uso di strutture dati relazionali e di sistemi vettoriali, per le componenti metrica e topologica, oppure di sistemi raster, con le necessarie modalità di compressione dei dati, o in alternativa di modelli continui) e fisico. Orientamenti moderni e tendenze di ricerca, quali GIS ad oggetti, basi di dati estendibili, GIS 3D, sistemi tempo - varianti, GIS dinamici, sistemi esperti, ecc., sono argomenti altamente sofisticati il cui uso deve essere comunque previsto, ove necessario.

L'offerta di servizi, dalla cartografia (a tutte le scale) al catasto urbano, dei terreni, delle infrastrutture e dei beni culturali ed ambientali (ovviamente anche per la valutazione d'impatto ambientale), inoltre dal monitoraggio in continuo, per il controllo di deformazioni, alla certificazione di qualità, nel rilevamento e nella restituzione, come pure dalla documentazione delle reti, di circolazione e distribuzione e delle imprese di trasporto, alla comunicazione e telecomunicazione, oppure dalla programmazione, pianificazione, progettazione (a tutti i livelli) ai sistemi di navigazione e di guida, è da porre al centro dell'attenzione, affinché il progetto di ricerca abbia molteplici ricadute pratiche, utili per la comunità degli utilizzatori.

Infine due interessanti problemi si presentano nella fase di acquisizione dei dati telerilevati e non. Infatti un problema rilevante si ha nel passaggio da una referenza spaziale debole: i siti (talvolta gli indirizzi), ad una referenza spaziale forte: le coordinate. In questo caso, l'uso speditivo del sistema GPS risponde positivamente alla bisogna. Un altro problema rilevante è rappresentato dalle strutture raster (mappe, disegni, immagini, immagini complesse), dove la grande quantità di informazione dà problemi di validazione dei dati, di estrazione di caratteristiche morfologiche e di fusione delle informazioni. Allora metodi ad hoc, per strutture grigliate permettono di superare vantaggiosamente ogni difficoltà.

### **3. La galassia delle immagini**

Immagini telerilevate derivate da sensori digitali (in particolare, immagini ottiche ad alta risoluzione, il sistema "laser scanning" e la telemetria da SAR interferometrico), sequenze (ottenute da tecniche geospaziali) e mappe, come pure altre basi di dati qualitative e quantitative georeferenziate o, più in generale, a referenza spaziale, tempo – varianti e non, costituiscono basi di dati per l'applicazione di metodologie e procedure innovative nell'ambito dell'acquisizione, dell'elaborazione e della restituzione. I loro prodotti, di volta in volta intermedi o finali, a seconda delle esigenze specifiche, sono gestibili facilmente da sistemi evoluti e di ampia diffusione, quali quelli costituiti oggi dai GIS e dai LIS.

Tecniche geospaziali permettono la georeferenziazione e forniscono la conoscenza, pressoché continua dello stato di deformazione, delle tensioni sottostanti e delle sollecitazioni indotte. Queste osservazioni, per il

loro alto grado di precisione, accuratezza ed affidabilità, sono da mettersi in relazione con le altre misure in continuo, di alta precisione (ad esempio, immagini, strumenti integrati, strumentazione speciale per il controllo), in modo tale da arricchire la spiegazione fornita dal modello globale. In questo ambito, sono oggetto d'interesse, tanto le compensazioni globali, quanto l'interpolazione ed approssimazione dei modelli di campi, facendo uso sia del metodo dei minimi quadrati generalizzati, sia di procedure robuste.

Le immagini ottiche (sistemi: NOAA, LANDSAT, SPOT, MOMS, IKONOS, ecc.; camere Three – lines, CCD) sono prodotti acquisiti da sensori passivi, oggigiorno da affiancarsi ad altri prodotti derivati da sensori attivi. Il loro insieme, molteplice e variegato, mostra la centralità, oggi ancora più che nel passato, della galassia delle immagini. Infatti già le sole immagini ottiche permettono di operare, tanto nello spazio scale (multirisoluzione), quanto in quello delle frequenze osservate (multispettrale), come pure in un ambiente dinamico (multitemporale). Tutto ciò ne fa un importante componente dei GIS e dei LIS, in forma raster, accanto alle mappe, alle ortoimmagini, al DEM (ai DTM's) ed altri livelli informativi tematici e/o statistici.

Il sistema "laser scanning", metodo innovativo e promettente, richiede un'analisi critica dell'informazione effettivamente acquisibile, intrecciata ai noti problemi d'integrazione dei sensori e di fusione dei dati (GPS, INS, conoscenza del geoide locale, ecc.), all'apertura verso la terza dimensione ed alla dinamicità del metodo. Si noti, a riguardo, come la fotogrammetria sia una disciplina "classica", basata su ordine, generalità e precisione; al contrario questo sistema entra nei dettagli e mostra come sia inevitabile tenere conto del disordine e del fattore tempo: il suo stesso principio di funzionamento trova parte delle sue radici nel casuale (distribuzione asimmetrica degli errori, non – normalità degli stessi).

Il telerilevamento (in particolare, la telemetria da SAR interferometrico) fornisce, d'altro canto, la più estesa e dettagliata informazione. Come noto, le immagini SAR sono immagini complesse che richiedono una lunga serie di pretrattamenti ed elaborazioni per ottenere prodotti di uso comune. La coregistrazione (matching) delle immagini, per ottenere l'interferogramma, lo srotolamento (unwrapping) delle fasi di quest'ultimo e la georeferenziazione (geocoding) delle fasi srotolate, per ottenere le quote e/o la loro variazione nel tempo, sono operazioni di alta sofisticazione, pur tuttavia necessarie al fine di ottenere i risultati attesi. Il prodotto è un DEM, nell'accezione completa data a questo termine.

L'acquisizione, elaborazione e restituzione di immagini telerilevate e non, qualsiasi sia il loro tipo e natura, rappresenta un significativo punto d'arrivo. Infatti le immagini, grazie alla loro alta ripetitività ed alla loro ricchezza ed attendibilità d'informazioni contenute, completano ed arricchiscono la conoscenza dello stato di fatto e di eventuali alterazioni, dissesti o degradi, in atto. Pertanto da un lato, un sistema di riferimento permanente e globale permette la loro georeferenziazione, dall'altro le stesse immagini costituiscono documentazione permanente e forniscono il desiderato passaggio dal discreto al continuo, negli studi e nelle ricerche per operazioni di documentazione e classificazione, e sui modelli di deformazione.

Un modello digitale delle altezze (DEM) e vari modelli digitali del terreno (DTM's): pendenze, curvature; variazioni d'altezza, con velocità ed accelerazioni, oppure ampiezze, periodi, sfasamenti e smorzamenti, sono i prodotti attesi. Un modello digitale (più complesso) di superficie (DSM) è stato proposto per rappresentare superfici qualsiasi e loro deformazioni. Data la natura, formalmente identica, di tutti questi prodotti, pur assai vari e differenti fra loro, essi sono volutamente riassunti nel solo termine DEM e ricondotti alla comune problematica della ricostruzione di superfici, figure, modelli ed oggetti. A sua volta, questa problematica rimanda alle tecniche d'interpolazione ed approssimazione.

Procedure di estrazione di caratteristiche morfologiche e di matching di sequenze, immagini e mappe, tecniche di costruzione di un DEM 2D e  $\frac{1}{2}$ , oppure 3D, e di produzione di ortoimmagini, con sovrapposizione di elementi vettoriali d'interesse, si effettuano con metodi deterministici, come pure con metodi stocastici e/o misti. Nel primo caso, oltre a tenere conto della geometria e/o della fisica dei sistemi, si procede alla interpolazione polinomiale e/o con il metodo degli elementi finiti. Nel secondo caso, sotto l'ipotesi che l'insieme dei dati possa essere considerato una realizzazione di un processo stocastico, la costruzione si avvale di stime di covarianza, seguite da un filtraggio ottimale.

Informazioni sussidiarie, quali pendenze, curvature e volumi, per analisi morfologiche, come pure velocità ed accelerazioni, oppure ampiezze, periodi, fasi e smorzamenti, per studi cinematici, sono ricavabili contestualmente. Inoltre al fine di permettere un'adeguata gestione delle basi di dati e di provvedere all'elaborazione dei dati stessi, si fa uso di tecniche sofisticate, messe a disposizione dall'analisi numerica e dalla statistica computazionale. Allo scopo, si fa uso di metodi veloci di numerazione, ordinamento e dissezione (basati sulla teoria dei grafi), così come di algoritmi specifici (esatti o iterativi, diretti o sequenziali) di algebra lineare, per seminati di punti (dati spot), ovvero per strutture grigliate (dati raster).

La fase dell'acquisizione dei dati ha richiesto per molti anni notevole impegno, ora invece è possibile ottenere insiemi molto vasti di dati in modo relativamente facile. Tuttavia è proprio la mole di dati ad originare una serie di nuovi problemi, poiché la numerosità del dato non significa necessariamente maggiore informazione. L'informazione non è infatti archiviazione di dati, bensì processo di analisi critica. Talvolta anzi l'eccesso di dati crea fraintendimenti e mancanza di consapevolezza critica, sia dal punto di vista ideale sia nel mondo reale, dove si possono generare conflitti. Nell'ambito di una crescita della conoscenza critica, è pertanto necessario analizzare l'informazione stessa.

Attualmente la fine delle visioni generali (teoria della relatività) e la constatazione che ogni visione scientifica è coerente con gli strumenti tecnici a disposizione di un osservatore, in un determinato tempo e luogo (principio d'indeterminazione), hanno originato un profondo rivolgimento. Caso e necessità diventano entrambi importanti e non contrapponibili, mentre non esiste una sola verità, ma punti di vista differenti consentono l'esistenza di zone di intersezione. L'informazione contiene spesso dati correlati che devono essere trattati con particolare cura: infatti trascurare tale correlazione significa ritenere di avere una quantità di informazione superiore, a volte anche di molto, a quella effettivamente a disposizione.

Tutto il lavoro svolto, in fase d'acquisizione ed elaborazione, sarebbe limitato, se non prevedesse anche l'archiviazione dei dati acquisiti e delle loro elaborazioni. Infatti la documentazione e la catalogazione, come pure l'aggiornamento e la visualizzazione, sono requisiti indispensabili e fondamentali per poter operare nella realtà attuale. A questo proposito, i GIS ed i LIS rispondono positivamente alla bisogna. Infatti essi permettono di raccogliere, nei loro vari strati e livelli, tutte le informazioni, dai dati originali, a prodotti intermedi, fino ai risultati finali. Inoltre essi permettono, come già detto in precedenza, interrogazioni ed elaborazioni, se del caso, dando vita a nuovi prodotti derivati ed elaborati.

#### **4. Dal trattamento delle osservazioni alla geomatica**

Le discipline geodetiche e cartografiche sono state, da sempre, discipline del calcolo, rinomate per la loro precisione, accuratezza ed affidabilità. Astronomi, geodeti e cartografi sono fra i fondatori di varie discipline della matematica (applicata) fra le quali una delle più importanti è la statistica: disciplina che, nel trattamento delle osservazioni, è propedeutica alla topografia, alle misure geodetiche, alla cartografia numerica, alla

fotogrammetria ed al telerilevamento. La stessa disciplina, spaziando dall'analisi dei dati alla statistica computazionale, offre validi contributi a tutte quelle anime delle varie e diverse discipline che si caratterizzano per un approccio non – deterministico ai problemi d'interesse delle stesse.

Il trattamento delle osservazioni copre l'intero settore dei dati di misura ed ha avuto, per lungo tempo, una sua relativa unitarietà. Tuttavia di recente, il prevalere nella geodesia e nella topografia (riassorbita, nello stesso ambito, dall'avvento delle misure geodetiche ed, in particolare, geospaziali) di un interesse per le scienze della terra (e, fra esse, principe la geofisica) e, di contro, il prevalere nella cartografia, nella fotogrammetria e nel telerilevamento di un'attrazione verso le scienze dell'informazione (e, fra esse, principe la geomatica) sta portando alcune differenziazioni, oltretutto entro certi limiti, come effetto di retroazione, ad un cambio di natura delle discipline stesse e d'attenzione verso gli oggetti d'interesse.

Le discipline del rilevamento sono discipline del calcolo e l'impatto maggiore dell'elettronica e dell'informatica è nel settore del calcolo: laboriose metodologie analogiche ormai sono state abbandonate e sostituite completamente da metodologie analitiche e procedure digitali praticamente computabili. Di conseguenza, un trattamento delle osservazioni, con errori relativi compresi fra  $10^{-5}$  e  $10^{-7}$ , deve saper gestire ed elaborare, principalmente in ambito geomatico, basi di dati la cui dimensione varia fra  $10^6$  e  $10^{10}$ , determinare stime di parametri in numero variabile fra  $10^4$  e  $10^6$  e procedere all'analisi (statistica e numerica) dei dati stessi, possibilmente con livelli di affidabilità pari o superiori a 0.8.

La teoria dei modelli distingue, come già detto in precedenza, i modelli neri dai modelli grigi. Infatti mentre un modello grigio è costituito da un fenomeno di cui si conosce una legge deterministica di comportamento, essendo questa nota, un modello nero è costituito da un fenomeno di cui non si conosce alcuna legge deterministica di comportamento. Pertanto scopo di un problema di interpolazione – approssimazione, per un modello grigio, è la stima dei parametri del modello e la loro validazione statistica. Invece nel caso di un modello nero, si ha dapprima la definizione di una strategia di scelta del modello e successivamente la stima dei parametri del modello prescelto, congiuntamente alla loro validazione statistica.

Allora se si eseguono serie diffuse nello spazio e/o ripetute nel tempo di osservazioni a referenza spaziale è possibile stimare, oltre alle posizioni dei punti, anche un certo numero di parametri geometrici e/o fisici caratterizzanti la morfologia di una certa zona, come pure un certo numero di parametri cinematici caratterizzanti eventuali movimenti e/o deformazioni. Un possibile approccio deterministico e/o stocastico individua descrittori di forma, oppure leggi di moto, adatti ad interpretare il fenomeno, giustapponendo questi alle usuali equazioni di osservazione. Una soluzione d'assieme, successiva a soluzioni preliminari, da eseguirsi a passi, è fornita dalla geodesia integrata, intesa nel suo senso più ampio.

La estrapolazione e/o predizione dati permette di validare il campione e di fornire prodotti regolari per la restituzione e la visualizzazione. D'altro canto, procedure robuste e tecniche statistiche inferenziali permettono, in ogni fase, la validazione delle basi di dati in uso, provvedendo ad isolare i dati anomali dal grosso dei dati, considerati soddisfacenti, oppure a dar vita a spiegazioni sussidiarie, alternative ai modelli principali adottati. A tale proposito, tecniche di "cluster analysis", metodi di "perceptual grouping" ed algoritmi "ad hoc", cosiddetti nella letteratura specialistica: descrittori di forma, costituiscono metodologie e procedure complementari, offerte dalla matematica discreta, alla modellazione analitica al continuo<sup>3</sup>.

Il problema della stima di parametri di modelli, tenuto conto delle caratteristiche delle stime (correttezza,

---

<sup>3</sup> La modellazione analitica al continuo è propria invece della geodesia e della cartografia che, assieme all'astronomia, contribuiscono alla fondazione dell'analisi matematica.

consistenza, efficienza, sufficienza; robustezza) è centrale per la definizione di appropriati algoritmi. Stime con il metodo della massima verosimiglianza e con il metodo dei minimi quadrati, effettuate tanto in ambito lineare (riconducendosi, in ogni caso, al modello delle equazioni di osservazione e di pseudo – osservazione, sovrappesate e non), quanto per problemi non - lineari nei modelli funzionale e stocastico o nella norma, e procedure di stima con metodi robusti sono applicate per l'interpolazione polinomiale, il metodo degli elementi finiti, problemi reticolari (reti di trasporto, reti di tipo geodetico, ecc.).

Richiamandosi ai differenti problemi d'interpolazione ed approssimazione, per campi irregolari (seminati di punti), oppure per strutture regolari (dati grigliati), e di compensazione, per strutture reticolari, gli algoritmi diretti (di fattorizzazione e, se del caso, di ortogonalizzazione) ed iterativi (stabili e rapidamente convergenti, perché preceduti da algoritmi veloci di preconditionamento), ed i metodi ad hoc per strutture regolari, propri della statistica computazionale, sono applicati per la soluzione dei modelli numerici relativi. Modelli partizionati e sequenziali, tecniche multilivello e regole inferenziali sono strumenti, altamente sofisticati, il cui uso deve essere comunque previsto, ove necessario.

L'analisi multivariata, grazie all'inferenza statistica multivariata, permette di giudicare la bontà e la significatività dei risultati ottenuti. A tal fine, è necessario effettuare preliminarmente la progettazione degli esperimenti, attraverso campionamenti opportunamente stratificati, per problemi d'interpolazione ed approssimazione, e l'ottimizzazione (simulazione interattiva ed ottimizzazione matematica) della configurazione, per strutture reticolari, e successivamente uno studio puntuale dell'affidabilità delle osservazioni. Tecniche di "cluster analysis", analisi di varianza, regressione multipla (e talvolta di analisi fattoriale) consentono analisi più accurate e/o la soluzione di problemi specifici collaterali.

L'analisi fine delle basi di dati prevede la valutazione di insiemi ordinati (ovvero delle basi di dati stesse e della loro catalogazione, nello spazio e/o nel tempo, oppure in altri domini opportunamente definiti), interpretati come serie e/o lattici, estratti da realizzazioni di processi stocastici. Questa valutazione procede dapprima all'identificazione del modello stocastico (supposto continuo, stazionario in senso debole di ordine due, isotropo o decomponibile ortogonalmente e normale), mediante stime di covarianza, dopodiché all'esecuzione di stime ottimali lineari, separando il segnale dal rumore, con il metodo della collocazione, ed infine alla predizione del segnale, sulla base di quanto ottenuto con il filtraggio.

Metodologie e procedure complementari, offerte dalla matematica discreta, alla modellazione analitica al continuo, permettono l'identificazione di strutture latenti, affrontando problemi di numerazione, ordinamento e dissezione (per strutture cellulari, reticolari e relazionali), di riconoscimento di forme note e di classificazione di forme. Tecniche di segmentazione, dal riconoscimento di segnali temporali al riconoscimento di frontiere in campi a referenza spaziale, come pure dal riconoscimento di caratteristiche morfologiche di figure ed oggetti ai descrittori di forma applicati agli stessi figure ed oggetti, completano la vasta gamma di potenzialità offerte, consentendo analisi più dettagliate.

La validazione dei modelli, anche in questo caso grazie all'inferenza statistica multivariata, permette di giudicare la bontà e la significatività dei risultati ottenuti. Allora lo studio di serie temporali, la ricostruzione di linee, superfici e campi 3D, il matching di segmenti, figure ed oggetti, la valutazione degli aspetti temporali in problemi a referenza spaziale, la generalizzazione degli schemi di compensazione di strutture reticolari, tenendo conto di equazioni dinamiche, per dati tempo - varianti, e di equazioni di distribuzione, per seminati di punti e/o dati grigliati, si conclude con un giudizio statistico sulla significatività, o meno, dei parametri e/o del segnale, sull'assenza di errori grossolani e su altro ancora, ove d'interesse.

## PARTE IV – TEORIA DELLA STIMA

### 1. I minimi quadrati

Tra i vari **modelli funzionali e modelli stocastici**, un'alternativa vantaggiosa alle **equazioni di condizione pure** (costituito da sole equazioni di condizione fra osservabili e formato da un modello funzionale lineare o linearizzato che lega tra loro le osservazioni mediante un'opportuna matrice dei coefficienti ed un vettore dei termini noti delle equazioni, altrimenti detto, con un'espressione più antica, chiusura). è fornita dalle **equazioni di condizione con parametri**, conseguente all'introduzione nelle prime di opportuni parametri, solitamente, in numero da lasciare una sola osservabile per ogni equazione, che nel loro insieme costituiscono, a tal punto, le equazioni d'osservazione.

Si noti che più antiche espressioni denominano le stesse equazioni come equazioni delle osservazioni indirette, mentre le equazioni di condizione pure sono dette, nello stesso ambito, equazioni delle osservazioni dirette condizionate. D'altra parte l'adozione di espressioni più moderne facilitò la comprensione d'assieme del metodo dei minimi quadrati e delle sue varie articolazioni e, proprio per questa ragione, dette espressioni sono adottate.

Si osservi, poi, come la scelta di operare con una sola osservabile per equazione costituisce un caso solo apparentemente particolare che, invece, come già detto, nulla toglie alla generalità del problema. Infatti tanto più generali equazioni di condizione con parametri, quanto l'inclusione di osservabili secondarie nelle usuali equazioni d'osservazione, come pure una partizione nell'insieme dei parametri fra parametri principali e parametri di servizio, esemplificano schemi differenti che possono essere ricondotti, comunque, allo schema principe delle equazioni d'osservazione.

Si badi, altresì, che anche un difetto di rango nell'insieme dei parametri, cosa che richiede l'aggiunta di opportune equazioni di vincolo o pseudo-osservazione, per sanare lo stesso, non allontana dallo schema principe prescelto. Infatti mentre l'aggiunta di equazioni di vincolo forma un insieme di equazioni di condizione con parametri vincolati (già note, altrimenti, come equazioni delle osservazioni indirette condizionate), la trasformazione delle stesse equazioni in equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate permette proprio l'utilizzo dello schema principe delle equazioni d'osservazione.

D'altra parte, come ogni problema concreto, esso contiene un campione di osservazioni che si suppongono estratte dalle suddette osservabili, in generale, non soddisfacenti le relazioni di condizione fra le osservabili stesse. Allora opportune variabili correzione o scarti-residui collegano le osservazioni alle stime delle osservabili compatibili con le relazioni di condizione. La fondamentale indeterminazione del problema posto: esistono, cioè, infinite correzioni possibili, richiede l'introduzione di un criterio di scelta, a sua volta largamente arbitrario, che definisce, così, il metodo dei minimi quadrati. La sua formalizzazione matematica fa sì che una norma quadratica degli scarti-residui sia minimizzata, tenendo conto tanto del modello funzionale (tramite un vettore ausiliario di moltiplicatori di Lagrange), quanto del modello stocastico, già definiti in precedenza.

Il valore delle stime dei parametri, delle osservabili compatibili con le relazioni di condizione e delle correzioni o scarti-residui si ottiene facendo uso della nozione di matrice inversa generalizzata e la nota legge di propagazione della varianza-covarianza permette di ricavare, facilmente, la matrice di varianza-covarianza delle stime effettuate, mentre la stima del fattore di proporzionalità (sigma zero) è ottenuta imponendo, direttamente, la sua correttezza. Infine tutte le stime godono delle proprietà di correttezza e

consistenza; si ha, inoltre, efficienza delle stime rispetto alle osservazioni e, ovviamente, sufficienza delle stesse in termini di contenuto statistico (mancando, invece, la robustezza, proprietà antitetica al metodo dei minimi quadrati).

Un problema minimi quadrati costituito da **equazioni di condizione con parametri vincolati**, ovvero da equazioni d'osservazione delle osservabili, coinvolgenti parametri, collegati fra loro da equazioni di vincolo (altrimenti detto, con un'espressione più antica, equazioni delle osservazioni indirette condizionate), risulta laborioso ed oneroso, perché richiede la soluzione, a cascata, di più sistemi concatenati fra loro. Per queste ragioni, come già detto, si preferisce effettuare la trasformazione delle equazioni di vincolo in equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate e risolvere un problema minimi quadrati costituito da equazioni d'osservazione e pseudo-osservazione sovrappesate, anziché d'osservazione e vincolo.

L'artificio che permette il passaggio da un problema all'altro è basato su considerazioni di carattere pratico e consiste nell'interpretare il numero zero posto al secondo membro di ogni equazione di vincolo come un'estrazione da una variabile casuale avente media e varianza nulla, cosa che fa di questa variabile casuale una pseudo-osservabile e dello zero estratto una pseudo-osservazione. Ancora considerazioni di ordine pratico: la necessità di calcolare un peso proporzionale all'inverso della varianza, impone di approssimare la varianza nulla con una varianza piccolissima, cosicché il peso sia sì molto grande, ma non infinito, ovvero numericamente non trattabile. Pertanto, come già detto in precedenza, l'artificio della trasformazione delle equazioni di vincolo in equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate permette proprio l'utilizzo dello schema principe delle equazioni d'osservazione. Inoltre lo stesso artificio ha carattere, del tutto, generale e può essere esteso a qualsiasi generalizzazione dei modelli lineari stessi.

L'uguaglianza a zero delle stime relative alle equazioni di pseudo-osservazione dimostra il soddisfacimento del vincolo e discende dalle proprietà di correttezza e consistenza, godute da tutte le stime minimi quadrati. Inoltre l'uguaglianza a zero delle matrici di varianza-covarianza, relative alle equazioni di pseudo-osservazione, completa la dimostrazione del soddisfacimento del vincolo e discende dal teorema di decomposizione ortogonale della varianza (come noto, infatti, il metodo dei minimi quadrati separa nelle osservazioni due termini incorrelati, uno compatibile con le relazioni di condizione ed un altro residuo) e dalle disuguaglianze di Schwarz per i termini misti, quando non identicamente nulli.

Resta da sottolineare, come le **equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate e non** introducano un problema minimi quadrati più generale (di quello presentato con la trasformazione delle equazioni di vincolo), dove equazioni di pseudo-osservazione di peso qualsiasi (e non di peso opportunamente grande, come per il passaggio da un problema all'altro) possono rappresentare, tra l'altro,

- informazioni a priori;
- eventuali informazioni sui parametri ausiliari (o di servizio);
- osservabili secondarie;
- condizioni numeriche di regolarizzazione.

D'altra parte, la soluzione di quest'ultimo problema coincide con quella del precedente, sopra enunciata, tranne per l'uguaglianza a zero del valore delle stime e delle matrici di varianza-covarianza relative alle equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate (in nessun caso, infatti, si è fatto uso dell'essere detti pesi opportunamente grandi).

Un primo caso particolare complementare di grande interesse è costituito da **equazioni dirette di pseudo-osservazione** (informazioni a priori, osservabili secondarie, condizioni numeriche di regolarizzazione), agenti ciascuna su un solo parametro. Allora un'opportuna matrice diagonale idem-potente, detta proiettore (ovviamente singolare, mentre la sua matrice inversa generalizzata coincide con la stessa matrice proiettore), fa sì che queste agiscano, apparentemente, su tutti i parametri. Invece alcuni suoi elementi unitari fanno sì che le equazioni di pseudo-osservazione agiscano, effettivamente, solo su alcuni parametri ed altri elementi nulli li lasciano invariati tutti gli altri parametri.

Un secondo caso particolare complementare è costituito da equazioni d'osservazione (e, eventualmente, pseudo-osservazione) con parametri, nell'insieme dei quali è stata effettuata una partizione fra parametri principali e **parametri ausiliari (o di servizio)** e dove il problema in esame è ricondotto, totalmente, ai problemi minimi quadrati con equazioni d'osservazione e pseudo-osservazione, risolti nel paragrafo precedente.

Si badi che quest'ultimo problema, quantunque elementare, fornisce la traccia per la soluzione di un terzo ed un quarto caso particolare complementare importanti, costituiti, rispettivamente, dall'inclusione di **osservabili secondarie** nelle equazioni d'osservazione e da **equazioni di condizione generali**. Infatti in entrambi i casi, effettuate le seguenti posizioni che ridefiniscono, in parte, gli elementi del modello funzionale e del modello stocastico, i problemi in esame sono ricondotti, totalmente, al precedente caso particolare complementare e, da qui, ai problemi minimi quadrati con equazioni d'osservazione e pseudo-osservazione. Di conseguenza, a seguito della definizione di un numero opportuno di parametri di servizio, sono scritte tante equazioni d'osservazione (dirette) quante sono, rispettivamente, le osservabili secondarie, oppure la totalità delle osservabili.

Queste equazioni d'osservazione (dirette) sono da aggiungersi alle altre equazioni già scritte, rispettivamente, d'osservazione in presenza di osservabili principali e pseudo-osservazione sovrappesate, se si opera con più generali equazioni di condizione. Questo significa che il modello stocastico, definito dalle rispettive matrici dei pesi, mette in gioco tutte equazioni d'osservazione (nel primo caso), oppure, nell'ordine, equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate ed equazioni d'osservazione (nel secondo caso).

Infine occorre sottolineare, come questo modo di procedere eviti errori nella corretta definizione del modello stocastico, quali l'errata attribuzione dei pesi delle osservazioni, in presenza di osservabili secondarie o la mancata considerazione delle correlazioni, sempre in presenza di osservabili secondarie, oppure se si opera con più generali equazioni di condizione. Infatti mentre questo modo di procedere facilita notevolmente una corretta definizione del modello stocastico, i suddetti errori nella definizione dello stesso sono, purtroppo, relativamente frequenti, quando si opera per altra via.

## 2. Problemi non-lineari

La trattazione, fin qui svolta, sui problemi minimi quadrati ha riguardato, esclusivamente, l'ambito lineare di questi. D'altra parte, la maggior parte dei fenomeni e processi sono non-lineari e tale caratteristica si ripercuote, inevitabilmente, nella loro modellazione. Pertanto anche la trattazione nell'ambito dei minimi quadrati deve potersi estendere ai **problemi non-lineari**, fornendo modelli adatti all'analisi dei dati di questi fenomeni e processi. La non-linearità dei problemi minimi quadrati può interessare:

- ❑ il modello funzionale;

- il modello stocastico;
- la norma.

Nel primo caso si ha, direttamente, la non-linearità delle equazioni di condizione pure, osservazione, pseudo-osservazione, vincolo, ecc.; nel secondo caso la matrice di varianza-covarianza delle osservazioni non è del tutto nota, solo a meno di una costante (ad esempio, il modello di Gauss-Helmert la partiziona secondo opportuni gruppi di osservazioni e considera tali sottomatrici note, ciascuna, a meno di una costante). Nel terzo caso, invece, la modifica della norma segna un distacco definitivo dai minimi quadrati, cui si fa ritorno per operare, iterativamente, in ambito lineare. Infatti in tutti e tre i casi, la non-linearità dei problemi non permette, in generale, una soluzione diretta degli stessi e, pertanto, si sceglie o, comunque, si preferisce risolverli in modo iterativo, operando, di volta in volta, in ambito lineare. Lo schema generale per l'attuazione di detta procedura si compone dei seguenti passi:

1. inizializzazione del problema e preparazione dei dati di partenza, in base a informazioni a priori di sufficiente approssimazione;
2. avvio di un contatore per il controllo delle iterazioni;
3. effettuazione di un passaggio in ambito lineare ed ottenimento di risultati intermedi;
4. calcolo di una norma sui risultati intermedi ottenuti per il controllo delle iterazioni;
5. esecuzione di un test d'arresto del ciclo iterativo, capace di valutare in alternativa il contenimento della suddetta norma al di sotto di un'opportuna soglia prefissata, oppure il superamento da parte del contatore di un numero massimo d'iterazioni consentite;
6. arresto del ciclo iterativo ed ottenimento dei risultati definitivi, se il test d'arresto è soddisfatto; oppure aggiornamento dei dati di partenza in base ai risultati intermedi ottenuti, se il test d'arresto non è soddisfatto;
7. incremento del contatore per il controllo delle iterazioni e ripetizione della procedura descritta, a partire dal passo 3.

Si osservi come tale procedura, per quanto del tutto generale, bene si presta alla soluzione iterativa di tutti e tre i casi sopraccitati di non-linearità dei problemi minimi quadrati. Infatti nessuno di essi, pur nella sua specificità, presenta anomalie tali da dover far abbandonare uno schema molto generale e, conseguentemente, molto collaudato e sicuro.

La **non-linearità del modello funzionale** si manifesta nei **sistemi di equazioni non-lineari** delle equazioni d'osservazione e pseudo-osservazione. Considerazioni analoghe valgono, ovviamente, per le equazioni di condizione pure e per le equazioni di vincolo; tuttavia la trattazione a seguire restringerà l'attenzione alle sole equazioni d'osservazione e pseudo-osservazione, giudicando l'uso di equazioni di condizione pure, estremamente, raro e ricordando la possibilità di passaggio dalle equazioni di vincolo (e da più generali equazioni di condizione) alle equazioni di pseudo-osservazione.

Allora data la matrice dei coefficienti delle correzioni alle incognite ed un vettore di costanti numeriche, da addizionarsi alle osservazioni, per fornire il vettore termine noto, ad ogni iterazione, si ottiene il vettore delle nuove incognite e si aggiorna il vettore delle incognite originarie, considerando quest'ultimo un nuovo vettore di più opportuni valori approssimati dei parametri, in base al quale effettuare una nuova linearizzazione,

punto di partenza di una nuova iterazione.

La procedura continua, iterativamente, fino ad ottenere la convergenza del metodo alla soluzione cercata. In pratica, ad ogni iterazione, ne succede una nuova, finché le nuove incognite sono abbastanza grandi, da dare un qualche contributo, utile all'aggiornamento delle incognite originarie.

Al contrario, quando questo contributo svanisce (cioè tutte le nuove incognite sono ormai pressoché nulle), la procedura è arrestata, perché si è ottenuta la convergenza del metodo alla soluzione cercata. La procedura è arrestata, altresì, nel caso sfavorevole in cui, dopo un numero massimo d'iterazioni consentite, non si ha alcuna convergenza.

La norma calcolata sulle nuove incognite, in base alla quale giudicare l'utilità del contributo all'aggiornamento delle incognite originarie, è largamente arbitraria, ma una norma dell'estremo superiore può essere utile perché garantisce che, effettivamente, tutte le nuove incognite siano, ormai, pressoché nulle.

La procedura, appena descritta, nota come **metodo di Newton-Fourier** (altrimenti detto, con un'espressione più antica, degli iperpiani tangenti), può essere notevolmente semplificata e sveltita scegliendo, ad ogni iterazione dopo la prima, di ricalcolare solo il vettore (ed adottando il metodo detto, dalle stesse più antiche espressioni, degli iperpiani paralleli), anziché esso e la matrice Jacobiano. Come evidente, tutto ciò accelera, ad ogni iterazione, il calcolo della soluzione, in generale, senza arrecare alcun danno alla stessa ed al solo prezzo di qualche veloce iterazione in più.

Possibili varianti al metodo di Newton-Fourier sono date da metodi più recenti, quali:

- ❑ la **regolarizzazione di Tikhonov**;
- ❑ l'**algoritmo di Levenberg-Marquardt**.

Infatti il primo metodo serve a stabilizzare la soluzione di sistemi, non troppo ben condizionati (a riguardo, si veda più oltre su singularità e condizionamento), mentre il secondo metodo serve a dare peso anche alla soluzione data dai valori approssimati delle incognite, se questi possono essere considerati abbastanza soddisfacenti.

La **non-linearità del modello stocastico** è presente nella matrice di varianza-covarianza delle osservazioni, non del tutto nota, solo a meno di una costante. La trattazione a seguire restringerà l'attenzione al modello di Gauss-Helmert che, avendo partizionato questa matrice in sottomatrici (detti blocchi) per opportuni gruppi di osservazioni, considera tali sottomatrici note, ciascuna a meno di una costante. Modelli più generali che coinvolgono anche elementi o blocchi extra-diagonali, fornendo informazioni sulle correlazioni fra osservazioni (o, meglio, sui parametri delle funzioni di correlazione fra gruppi di osservazioni), per l'effettiva difficoltà di stabilizzare queste stime, non sono considerati. D'altra parte, la debolezza della consistenza di stime di covarianza, anche per campioni di osservazioni abbastanza numerosi, limita l'adozione di questi modelli solo all'approccio relativamente raro dei processi stocastici.

Allora con specifico riferimento al modello di Gauss-Helmert, la matrice di varianza-covarianza delle osservazioni è data dal prodotto di Kronecker fra una matrice identità, di dimensione pari al numero di gruppi di osservazioni, stabilito dalla partizione, e la matrice inversa (variabile per dimensione e valore degli elementi diagonali) della matrice dei pesi delle osservazioni di ciascun gruppo nota, come già detto, a meno di una costante (sigma zero moltiplica e divide l'espressione ed è, pertanto, ininfluente). A rigore, l'utilizzo del prodotto di Kronecker, data la variabilità della seconda matrice, costituisce una leggera forzatura; d'altra

parte, esso non inficia minimamente la trattazione a seguire ed aver evitato indicatori, contatori, puntatori, puntatori rovesci, ecc. la semplifica, invece, di molto, cosa che ne facilita l'esposizione. La definizione di una prima matrice di varianza-covarianza delle osservazioni, noto (o conosciuto per altra via) un vettore di opportuni valori approssimati delle costanti, avvia la procedura cosiddetta di riproduzione dei pesi.

Ad ogni iterazione, ottenuto il vettore degli scarti-residui e calcolato il vettore delle stime delle costanti, quest'ultimo viene considerato un nuovo vettore di più opportuni valori approssimati delle costanti, in base al quale procedere alla definizione di una nuova matrice di varianza-covarianza delle osservazioni, punto di partenza di una nuova iterazione. La procedura continua, iterativamente, fino ad ottenere la convergenza del metodo ad un punto di riproduzione. In pratica, ad ogni iterazione ne succede una nuova, finché le nuove costanti sono abbastanza diverse dalle precedenti. Al contrario, quando le nuove costanti sono abbastanza simili alle precedenti, la procedura è arrestata, perché si è ottenuta la convergenza del metodo ad un punto di riproduzione. La procedura è arrestata, altresì, nel caso sfavorevole in cui, dopo un numero massimo d'iterazioni consentite, non si ha alcuna convergenza. La norma calcolata sulle nuove costanti, in base alla quale giudicare sulla diversificazione delle costanti fra un'iterazione ed un'altra, è largamente arbitraria. Una norma dell'estremo superiore può essere utile, perché garantisce che, effettivamente, tutte le nuove costanti siano abbastanza simili alle precedenti.

La procedura, appena descritta, nota come **riproduzione dei pesi**, richiede le stime delle costanti ottenute imponendo, direttamente, la loro correttezza (così come si è operato per la stima di sigma zero, con il modello di Gauss-Markov). Si osservi, poi, che la ridondanza locale di tutte le osservazioni appartenenti ad un generico gruppo è, come noto, la somma di tutte le ridondanze locali delle singole osservazioni appartenenti allo stesso gruppo e che la somma delle ridondanze locali, estesa a tutti i gruppi, fornisce la ridondanza globale.

La **non-linearità della norma** si manifesta nella funzione obiettivo che segna, in questo modo, un distacco definitivo dal metodo dei minimi quadrati. D'altra parte, poiché, come noto, i sistemi lineari possono essere risolti con appropriati algoritmi numerici, mentre i sistemi non-lineari presentano, in generale, evidenti difficoltà, si sceglie o, comunque, si preferisce risolvere questi in modo iterativo, operando, di volta in volta, in ambito lineare. Allora funzioni obiettivo, diverse da quelle dei minimi quadrati, sono ricondotte a queste, tramite la definizione di opportuni pesi ausiliari, per operare, iterativamente, in ambito lineare, con la procedura cosiddetta dei **minimi quadrati ripesati**. Si ricorda, per completezza, che è noto, in letteratura, il metodo del semplice, capace di risolvere sistemi con funzione obiettivo della minima somma dei moduli (come nella programmazione lineare, programmazione lineare vincolata, ecc.); tuttavia tale metodo, proprio della ricerca operativa, è certamente più complesso e male si presta, comunque, alla soluzione di grandi sistemi.

La formalizzazione matematica della trasformazione di una funzione obiettivo qualsiasi in quella dei minimi quadrati coincide con la definizione stessa dei pesi ausiliari, capaci di operare questa trasformazione. La procedura, nota come minimi quadrati ripesati, collega il problema della non-linearità della norma a quello della non-linearità del modello stocastico, riportando la sua soluzione alla procedura, nota come riproduzione dei pesi, già descritta in precedenza.

Una prima soluzione ai minimi quadrati di tutte le osservazioni (o meglio di una parte di esse, la cui bontà sia da ritenere nota o conosciuta per altra via) avvia la procedura. Gli scarti-residui di tutte le equazioni concorrono a costruire i pesi ausiliari, in base ai quali effettuare una nuova iterazione. La procedura

continua, iterativamente, fino ad ottenere la convergenza del metodo con la stabilizzazione dei pesi ausiliari, altrimenti essa si interrompe per il superamento di un numero prefissato di iterazioni consentite. Infine resta da sottolineare come questa procedura sia adatta, in particolare, all'uso di stimatori robusti, come noto, ben più capaci dei minimi quadrati di identificare ed eliminare dati anomali, la cui presenza ha, invece, effetti distorcenti, quando si opera con i minimi quadrati (infatti, come già detto, la robustezza è una proprietà antitetica al metodo dei minimi quadrati).

In questo caso specifico, la definizione dei pesi ausiliari provvede (mediante sottopesatura delle osservazioni) dapprima all'individuazione delle osservazioni che si sospettano affette da dati anomali e successivamente alla definitiva eliminazione delle osservazioni veramente anomale, mentre le osservazioni falsamente sospettate vengono riammesse nell'insieme delle osservazioni in esame (grazie alla ricrescita dei loro pesi ausiliari, come avviene, ad esempio, con il **metodo della minima somma dei moduli**, oppure con gli **stimatori di Huber e Hampel**).

Un'alternativa vantaggiosa, proposta di recente, è il **metodo della minima mediana dei quadrati degli scarti – residui** (o identicamente del minimo  $\text{mav}$  dei moduli degli scarti – residui). Esso richiede l'esecuzione, in successione, di tanti sistemi quanti richiesti dal binomio di Newton, aventi ciascuno un numero di equazioni pari al numero di incognite (cioè di parametri), scegliendo come soluzione quello che fornisce il minimo cercato. Poiché solitamente il numero di osservazioni eccede notevolmente il numero di parametri, il numero di sistemi da risolvere diventa rapidamente grande al crescere della ridondanza. Allora una strategia praticabile limita l'applicazione del metodo a piccoli sotto – sistemi.

Altre strategie praticamente computabili sono possibili adottando metodi campionari, come il **RANSAC** (cioè **Random Sampling**, ovvero **campionamento causale**), dove invece di calcolare tutte le combinazioni possibili, ricercando la minima mediana dei quadrati degli scarti – residui, si prova a risolvere un certo numero di sistemi <sup>4</sup>, ciascuno avente un numero di equazioni pari al numero delle incognite. Per procedere così, è necessario sorteggiare ogni volta, dall'insieme delle osservazioni, tante osservazioni quanti sono i parametri (incogniti) del sistema da risolvere. Dopodiché si costruisce l'istogramma delle soluzioni ottenute: la soluzione modale (ovvero quella con la maggior frequenza assoluta o presenza) è accettata, come stima probabile della suddetta minima mediana. Evidenti controindicazioni al metodo sono date dalla presenza di bi-modalità e multi – modalità. Al contrario, questo metodo è ulteriormente accelerato, se non – tutte le osservazioni / equazioni possono essere casualmente selezionate, per calcolare la soluzione del sistema da risolvere, perché non – tutte le incognite, corrispondenti ai parametri (del problema dato), sono presenti in tutte le equazioni. Di conseguenza, le scelte possibili si restringono, aumentando la computabilità, anche se difficile diventa, a volte, la scelta delle equazioni, specie nel caso di strutture reticolari.

### 3. Controlli numerici

E' opinione diffusa e, comunemente, accettata dai più che insiemi di dati buoni non presentino grosse difficoltà per una loro analisi, quantomeno, con la maggior parte dei metodi in uso, mentre insiemi di dati cattivi presentano notevole difficoltà per una loro analisi, in generale, con qualsiasi metodo. D'altra parte, poiché, di solito, gli insiemi di dati non sono mai troppo buoni, anche se insiemi di dati, veramente, cattivi costituiscono più contro-esempi che vere eccezioni, alcune precauzioni devono essere prese e, veri e propri, **controlli numerici** devono essere effettuati, per consentire una loro analisi con il metodo dei minimi

---

<sup>4</sup> Il numero di tali sistemi dipende dal livello di significatività del test e dalla percentuale massima di dati anomali.

quadrati, così come è necessario fare con ogni altro metodo.

Le precauzioni da prendere possono essere innumerevoli e molto diversificate tra loro; tuttavia le principali e più importanti riguardano:

- il condizionamento del sistema da risolvere;
- l'affidabilità dello schema d'osservazione;
- la robustezza degli stimatori nei confronti di dati anomali.

Un discorso sul buon **condizionamento** del sistema da risolvere parte dall'ovvia considerazione che esso non deve essere, globalmente o localmente, singolare ed estende le precauzioni da prendere, anche, a tutte quelle situazioni prossime alla singolarità: in tal caso, si dice che il sistema da risolvere è, globalmente o localmente, malcondizionato. A tale proposito, un sistema di equazioni di condizione pure non è mai malcondizionato. Infatti esso ha le dimensioni del numero di relazioni di condizione e può essere singolare solo se si è scritta qualche relazione combinazione lineare delle altre, eventualmente, dimenticandone qualche altra indispensabile. Il caso descritto esemplifica un clamoroso errore d'impostazione, da evitarsi restringendo, come già detto, l'utilizzo di questo metodo al caso di piccoli problemi, dove questioni di condizionamento (numerico) consigliano di evitare stime di parametri.

Al contrario, un sistema di equazioni d'osservazione e pseudo-osservazione, benché molto raramente singolare, può essere talvolta, soprattutto localmente, malcondizionato, per la presenza di qualche parametro, maldeterminabile tramite l'insieme delle equazioni scritte. In questo caso, occorre definire una strategia d'allarme, per evidenziare il malcondizionamento, ed una strategia di ricerca, per identificare ed eliminare il parametro (i), fonte del malcondizionamento stesso.

Lo studio più rigoroso del condizionamento di un sistema si attua con la decomposizione ai valori singolari della matrice prodotto fra la matrice dei coefficienti e la radice della matrice dei pesi (quest'ultima operazione consiste nella radice quadrata dei singoli pesi, se la matrice è diagonale, ed in una qualsiasi fattorizzazione, se essa non è diagonale). Il risultato è una matrice rettangolare, avente le stesse dimensioni della matrice dei coefficienti, ovunque identicamente nulla, tranne su una diagonale contenente i valori singolari, ottenuti dalla decomposizione, mentre altre due matrici sono due particolari matrici quadrate, dette ortonormali, aventi dimensioni compatibili.

- Nel caso la matrice dei coefficienti non sia una matrice di rango pieno, ovvero il sistema da risolvere sia singolare, uno o più valori singolari saranno nulli ed il loro numero sarà pari al difetto di rango.
- Nel caso la stessa matrice sia la matrice dei coefficienti di un sistema malcondizionato, uno o più valori singolari saranno pressoché nulli. Allora una strategia d'allarme consiste nel calcolare un numero di condizione, fondato sui valori singolari, e nel valutarlo troppo prossimo a zero ed una strategia di ricerca si effettua, invece, identificando tutti i valori singolari prossimi al valore singolare minimo. Un'opportuna aggiunta di osservazioni o pseudo-osservazioni, in quanto ben mirata, sarà capace di superare i problemi di condizionamento, formando un sistema ben condizionato.

D'altra parte, la decomposizione ai valori singolari è un'operazione certamente complessa e male si presta, comunque, alla soluzione di grandi sistemi; pertanto si è soliti adottare, in sua vece, una strategia alternativa

d'allarme con un numero di condizione, fondato su norme di matrici, da valutare troppo prossime a zero. Dopodiché una strategia alternativa di ricerca si effettua identificando, nella matrice dei coefficienti di correlazione dei parametri, tutti quei coefficienti il cui valore assoluto è, relativamente, prossimo ad uno. Il raggruppamento in un blocco di un insieme relazionato di coefficienti di correlazione dei parametri il cui valore assoluto è, per tutti, relativamente, prossimo ad uno, aiuta a risolvere il problema delle correlazioni multiple e, in ogni caso, un'opportuna e ben mirata aggiunta di osservazioni e pseudo-osservazioni permette di superare i problemi di condizionamento.

Nei casi più complessi, è consigliabile porre vincoli a zero (ovvero pseudo-osservazioni sovrappesate) per tutti i parametri del blocco malcondizionante, liberandone, uno alla volta, sequenzialmente, in avanti, finché non si ha malcondizionamento del sistema da risolvere ed, all'indietro, non appena questo si determina (l'ordine di selezione dei parametri e la scelta di quello malcondizionante, fra quelli divenuti fortemente correlati fra loro, è largamente arbitraria), con l'obiettivo di garantire, sempre, il buon condizionamento. Un'alternativa possibile è data dal seguente modo di procedere:

- ❑ si aggiungano, al sistema dato, tante nuove pseudo-osservazioni (di peso comparabile con le osservazioni del suddetto sistema) ciascuna costituita da uno dei parametri del sistema stesso (nel caso di sistemi non lineari, è possibile usare le incognite propriamente dette, opportunamente linearizzate, oppure le loro correzioni);
- ❑ con metodo dei minimi quadrati, si calcoli la soluzione di questo sistema esteso, dove si ha anche la matrice di covarianza degli scarti residui delle nuove pseudo-osservazioni (sui parametri) e si analizzi il vettore delle corrispondenti ridondanze locali.

Poiché, come noto, tutte le ridondanze locali hanno valori compresi fra zero ed uno, raggiungendo il valore zero, quando un'osservazione (o una pseudo-osservazione) è indispensabile (anche valori troppo prossimi a zero sono indice di criticità), ed il valore uno, quando la stessa è completamente superflua:

- ❑ se qualcuna di queste ridondanze locali è nulla (o troppo piccola), allora il corrispondente parametro è determinato esclusivamente (o quasi) dalla nuova pseudo-osservazione sul parametro stesso;
- ❑ in questo caso, è proprio necessario aggiungere nuove osservazioni al sistema, per sanare la singolarità o il malcondizionamento generati, nel sistema dato, da questo parametro.

Uno schema d'osservazione si presenta in condizioni di **affidabilità**, quando è in grado di identificare uno o più dati anomali nell'insieme delle osservazioni. Ciò significa che la presenza di dati anomali, per quanto abbia, sempre, effetti distortivi sulle stime (causa la mancanza della robustezza, come già detto, proprietà antitetica al metodo dei minimi quadrati), grazie alla ridondanza globale e locale dello schema d'osservazione, è comunque evidenziata (cioè si sa che i dati anomali sono presenti) e localizzata (cioè si sa dove i dati anomali sono accaduti).

Con preciso riferimento ad un sistema di equazioni d'osservazione e pseudo-osservazione (ma sarebbe, certamente, possibile fare riferimento anche ad un sistema di equazioni di condizione pure, anche se quanto segue deve, allora, essere formulato in modo diverso), si considerino i due seguenti schemi delle osservazioni:

- un insieme d'osservazioni (e/o pseudo-osservazioni) determina, univocamente, un insieme di parametri, la cui dimensione è, ovviamente, identica a quella del suddetto insieme di osservazioni;
- due insiemi d'osservazioni (e/o di pseudo-osservazioni) determinano, ciascuno, univocamente, un insieme di parametri, la cui dimensione è, ancora ovviamente, identica a quella di ciascuno dei suddetti insiemi di osservazioni.

Pertanto il primo esempio è costituito da un sistema di equazioni d'osservazione (e/o pseudo-osservazione) cui è associata una matrice dei pesi  $e$ , ricordando l'identità fra le dimensioni dei vettori di alcune osservazioni ed alcuni parametri, è direttamente risolubile rispetto a quegli stessi parametri, annullando il vettore degli scarti-residui, in quanto questa scelta minimizza, ovviamente, la norma quadratica degli stessi.

Tutto ciò determina la completa identità fra osservazioni e stime delle osservabili compatibili con le relazioni di condizione  $e$ , per il teorema di decomposizione ortogonale della varianza, la nullità della matrice di varianza-covarianza degli scarti-residui.

Allora un qualsiasi dato anomalo, inserito nell'insieme di quelle osservazioni (e/o pseudo-osservazioni), distorce le stime di quei parametri, lasciando sempre nulli i relativi scarti-residui con precisione infinita, essendo sempre nulla, anche, la loro matrice di varianza-covarianza.

Analogamente il secondo esempio è costituito da un sistema di equazioni d'osservazione (e/o pseudo-osservazione) cui è associata una matrice dei pesi  $e$ , ricordando l'identità fra le dimensioni dei vettori di alcune osservazioni ed alcuni parametri, è due volte direttamente risolubile a quegli stessi parametri per cui la media ponderata dei valori ottenuti in modo indipendente, diventa il valore più probabile, comparando, tramite pesi opportuni, a meno del segno, i vettori degli scarti-residui, in quanto questa scelta minimizza, ovviamente, la norma quadratica degli stessi.

Tutto ciò determina l'intercambiabilità (a meno del segno) delle correzioni da apportare alle osservazioni, per ottenere stime delle osservabili compatibili con le relazioni di condizione, e questa intercambiabilità, tenuto conto del teorema di decomposizione ortogonale della varianza, si ha, anche, nelle matrici di varianza-covarianza degli scarti-residui.

Allora un qualsiasi dato anomalo, inserito nell'insieme di quelle osservazioni (e/o pseudo-osservazioni) distorce le stime di quei parametri, lasciando sempre intercambiabili gli scarti-residui con precisione comparabile, tramite pesi opportuni, essendo sempre intercambiabili fra loro, anche, le rispettive matrici di varianza-covarianza.

I due esempi insegnano che lo schema d'osservazione è affidabile, solo quando è elevata la ridondanza globale e locale. Pertanto globalmente, il numero d'osservazioni e pseudo-osservazioni è bene sia, quantomeno, tre volte il numero dei parametri, cosicché la ridondanza globale, in termini relativi, abbia, almeno, valore due.

Inoltre localmente, essendo difficile individuare accanto ad un sottoinsieme d'osservazioni e pseudo-osservazioni un sottoinsieme di parametri, si considera comunemente affidabile un'osservazione (o pseudo-osservazione) la cui ridondanza locale abbia, almeno, valore un quinto o un quarto dell'unità.

Infatti la ridondanza locale di ciascuna osservazione (o pseudo-osservazione) è fornita dal corrispondente elemento diagonale principale della matrice prodotta dalla matrice dei cofattori degli scarti-residui preceduta e seguita dalla radice pari della matrice dei pesi (quest'ultima operazione consiste nella radice quadrata dei singoli pesi, se la matrice è diagonale, mentre trattasi d'operazione ben più complessa, se essa non è

diagonale).

Allora come noto, per il teorema di decomposizione ortogonale della varianza, la ridondanza locale ha valore zero, quando un'osservazione (o pseudo-osservazione) è indispensabile, mentre ha valore limite uno, quando la stessa è, proprio, del tutto superflua. Essendo, ovviamente, impossibile avere sempre il valore uno, valori superiori ad un quinto o un quarto dell'unità si considerano, comunemente, al di sopra di una ragionevole soglia di sicurezza.

Un riesame, ancora più approfondito, della questione dell'affidabilità conduce alla definizione di affidabilità interna ed affidabilità esterna.

- ❑ Si chiama affidabilità interna di una generica osservazione (e/o pseudo-osservazione) la quantità che rimane nel corrispondente scarto-residuo, a seguito dell'immissione di un effetto perturbativo.
- ❑ Si chiama, invece, affidabilità esterna di una generica osservazione (e/o pseudo-osservazione) la quantità che fluisce nella stima di un certo parametro, a seguito dell'immissione dello stesso effetto perturbativo.

Infine per quanto riguarda gli ovvi vantaggi dell'uso di **procedure robuste** nei confronti di dati anomali, se uno schema d'osservazione affidabile identifica, cioè evidenzia e localizza i dati anomali, l'uso di stimatori robusti evita effetti distortivi sulle stime come accade, invece, quando si opera con i minimi quadrati (infatti, come già detto, la robustezza è una proprietà antitetica a tale metodo).

#### 4. Controlli statistici

A valle dei sopraccitati controlli numerici, rigorosi controlli statistici devono essere poi messi in atto, per permettere la validazione dei dati e dei modelli, garantendo così il soddisfacimento delle ipotesi effettuate o, in caso contrario, rimandando ad un loro riesame.

##### Autoconsistenza e crossvalidazione

I test di validazione dei modelli permettono di sottoporre a verifica, mediante opportuni controlli e confronti d'ipotesi, le stime effettuate come, del resto, tutti i risultati ottenuti nell'ambito della statistica. Al solito, si possono avere errori nel modello deterministico: presenza di errori grossolani nelle osservazioni, ed errori nel modello stocastico: presenza di errori sistematici nelle osservazioni, ovvero cattiva conoscenza delle varianze delle osservazioni e/o delle eventuali covarianze fra le osservazioni stesse. Un'opportuna sequenza di test permette di districarsi fra le varie cause d'errore.

Un giudizio sui risultati può essere espresso in termini numerici e statistici. I controlli di tipo numerico rispondono a problemi di condizionamento ed affidabilità che comunemente accompagnano e seguono il metodo dei minimi quadrati, comprensivo delle sue estensioni e generalizzazioni; pertanto tutto quanto riguarda i controlli di tipo numerico è considerato estraneo agli scopi del presente lavoro. I secondi comprendono i test statistici per la valutazione di osservazioni e parametri, della loro dispersione e, se del caso, della loro dipendenza. Per quanto riguarda le osservazioni, la validazione avviene in termini di entità degli scarti - residui (oltre che numericamente in termini di affidabilità delle osservazioni all'interno dello schema di misura) e consiste essenzialmente nell'individuazione ed eliminazione degli errori grossolani cui si rimanda.

Per quanto riguarda i parametri, la validazione riguarda la loro significatività oppure la loro corrispondenza o meno a valori nominali di riferimento, nonché il confronto (come nel caso dei cosiddetti problemi di controllo) tra due serie identiche degli stessi ricavate da due insiemi indipendenti di dati (oltre che numericamente in termini di buon condizionamento dei parametri nella configurazione delle osservazioni) e si esplica con test globali, parziali e locali. Ciò significa analizzare rispettivamente il rapporto fra la/e varianza/e spiegata/e dai parametri e la varianza residua (sigma zero quadrato), oppure un singolo parametro standardizzato con il proprio sqm, se del caso, avendo sottratto il/i corrispondente/i valore/i nominale/i di riferimento.

Questo tipo di controllo prende il nome di **autoconsistenza**, in quanto opera sull'insieme/i dei dati che sono stati immessi nel calcolo. Infatti, come noto, una prima verifica può ottenersi già raffrontando il quadrato della/e stima/e di sigma zero con il quadrato del valore di riferimento dello stesso, assunto a priori, oppure raffrontando tra loro le due stime effettuate nelle condizioni specificate più oltre. Il test ordinario sulla varianza permette di valutare la rispondenza o meno della stima effettuata all'ipotesi fondamentale assunta, mentre il test ordinario sul rapporto di varianze permette il confronto fra due stime effettuate a partire da insiemi indipendenti di dati.

Un controllo più rigoroso può essere effettuato non utilizzando tutti i dati a disposizione, bensì riservandone alcuni per una verifica separata, detta **crossvalidazione**. Infatti effettuata l'estrapolazione e/o la predizione per tutte queste osservazioni e calcolata la differenza fra il dato di partenza ed il valore estrapolato e/o il segnale predetto, si ottiene un insieme di discrepanze, opportunamente piccole, se il precedente trattamento delle osservazioni ha fornito buoni risultati.

Il test ordinario sulla varianza di queste differenze permette di giudicare, in senso statistico, la bontà della estrapolazione (crossvalidando così anche l'interpolazione e/o compensazione effettuata), mentre il test ordinario sul rapporto di varianze permette il confronto fra due stime effettuate a partire da insiemi indipendenti di dati:

#### Identificazione ed eliminazione dei dati anomali

Accade talvolta che si abbiano molti dati anomali la cui presenza fa sì che qualsiasi operazione preliminare (ad esempio, il calcolo di valori approssimati dei parametri, la valutazione di correzioni da apportare alle osservazioni, le stime empiriche di eventuali funzioni di covarianza) risulti fortemente alterata. Per superare questo inconveniente, è necessario mettere a punto, caso per caso, una strategia che consenta **procedure robuste di esplorazione preliminare**.

A riguardo, una semplificazione può ottenersi se si hanno informazioni, a priori, su l'entità della varianza delle osservazioni (o del loro rumore, se si suppone che esse contengano anche un segnale stocastico). In questo caso specifico, dopo aver individuato un opportuno intorno, la differenza fra lo scarto-residuo di un'osservazione qualsiasi e la media degli scarti - residui delle osservazioni circostanti, siti nel relativo intorno costituisce una stima, anche se grossolanamente approssimata, della discrepanza (o del rumore) di quella data osservazione.

Si osservi innanzitutto come l'individuazione di un opportuno intorno sia agevole quando si operi con dati intensivi (cioè puntuali) a referenza spaziale forte (indotta dalle coordinate), mentre diventi molto più complessa in tutti gli altri casi. Si noti poi che gli scarti-residui delle osservazioni sono solitamente un prodotto finale del trattamento delle osservazioni, pertanto la loro richiesta, all'inizio dello stesso, richiede il calcolo di soluzioni approssimate e/o parziali e/o locali, per poter disporre da subito degli stessi.

Si ricordi che alternative, maggiormente robuste e pertanto più sicure, alla media delle osservazioni circostanti, sono la mediana o la media potata (in questo secondo caso, con un'opportuna definizione dei pesi delle osservazioni, mettendo a zero le osservazioni anomale che si sospettano affette da errori grossolani) delle stesse, cosa che permette un'individuazione e rimozione di eventuali errori grossolani, presenti al loro interno, per poter poi concludere, senza effetti di mascheramento, la sopraccitata operazione di media mobile delle osservazioni circostanti una data osservazione.

Se i dati di partenza sono distribuiti normalmente, allora anche la stima appena fatta della discrepanza (o del rumore) è distribuita normalmente con media nulla e varianza nota, assunta da informazioni a priori. Infatti come noto, qualsiasi combinazione lineare di variabili casuali normali è una variabile casuale normale. Così il test ordinario sulla media per campioni numerosi, nell'ipotesi fondamentale nulla, consente di mettere in evidenza, un'osservazione alla volta, tutti quei dati significativamente anomali.

Capita spesso che, fra i dati utilizzati, come fra quelli riservati per il controllo, si abbiano alcuni dati anomali (e talvolta anche in quantità abbastanza rilevante), da interpretarsi spesso come errori grossolani. L'identificazione e l'eliminazione (con una procedura comunemente detta **data snooping**) di questi che, per loro relativa piccolezza, non inficiano certamente le procedure di esplorazione preliminare, per lo più, è abbastanza agevole. Infatti dati gli scarti – residui delle equazioni d'osservazione, standardizzati per il relativo sqm, essi possono essere sottoposti alla verifica d'ipotesi, globalmente con il test multiplo di Pearson et al. e singolarmente con un test "ad hoc" per uno scarto - residuo.

Un test "ad hoc" per uno scarto residuo, facente uso della distribuzione tau di Thompson, consente di mettere in evidenza, un'osservazione alla volta, tutti quei dati significativamente anomali. L'uso più appropriato di questo test è la cosiddetta **selezione all'indietro con minimi quadrati in cascata**, a partire dallo scarto residuo standardizzato maggiore, aggiornando poi, ogni volta, la soluzione e selezionando via, via tutti gli scarti residui standardizzati, in ordine decrescente di valore assoluto, fintantoché il massimo scarto residuo standardizzato corrente risulti accettabile. Si badi come questa procedura non sia affatto robusta, in quanto gli effetti di mascheramento, propri dei minimi quadrati, non permettono di evidenziare i veri dati anomali, distinguendoli da quelli apparenti (ma, in effetti, privi d'errore), specialmente se il numero dei dati anomali e/o l'entità delle anomalie è elevato/a.

Un'alternativa, particolarmente vantaggiosa, è costituita dalla cosiddetta **selezione in avanti dopo (opportune) procedure robuste**, a partire dallo scarto residuo standardizzato minore, fra quelli preventivamente esclusi in base alle suddette procedure, capaci di separare il grosso buono dei dati dai dati anomali (veri o presunti). Dopo la riammissione della corrispondente osservazione, nell'insieme costituito dal grosso buono dei dati, un test estemale, facente uso della distribuzione H di Hawkins consente di mettere in evidenza, un'osservazione alla volta (in particolare, valutando il massimo scarto residuo standardizzato fra quelli delle osservazioni "effettive"), tutti quei dati significativamente anomali, con maggior sicurezza (Tutto ciò dà ulteriore ragione alla proposta strategia mista, consistente nel far precedere opportune procedure robuste ad una selezione mirata in avanti, condotta in modo sequenziale con il metodo dei minimi quadrati, fino ad ottenere a minimi quadrati il risultato atteso.).

#### Tecniche multilivello: eventuali rimozione della tendenza e successive elaborazioni

Le **tecniche multilivello** permettono di affrontare lo studio di vari fenomeni, aggredendoli un po' alla volta, così come la spiegazione viene costruendosi, passo dopo passo, ovvero livello dopo livello, con l'aumento

della risoluzione (o della granularità, oppure dell'ordine) insieme al miglioramento della precisione ed accuratezza ed alla riduzione della zona (o intervallo, oppure altro dominio del problema) in esame.

Tutto ciò permette di fornire il tipo di spiegazione, richiesto ad un certo livello, adottando il modello più adeguato (per il dato il livello d'elaborazione) facendo uso di un numero ben adeguato di dati, con il campionamento sequenziale: progressivo e selettivo degli stessi per campi di punti (oppure con la progettazione ed ottimizzazione interattiva della configurazione e dello schema di misura, nel caso di strutture reticolari).

Le analisi statistiche più raffinate hanno bisogno di dati a media nulla e privi di qualsiasi sistematismo generale (detto: tendenza; dall'inglese: *trend*) che, se presente, deve essere preventivamente rimosso, in generale con una (semplice) interpolazione polinomiale. Con specifico riferimento ai modelli digitali delle altezze, si trova una tendenza nei dati, ad esempio, quando si opera su piccole aree (una montagna, una collina, un versante, una valle, ecc.).

Accade talvolta che il fenomeno sia modellabile tramite due o più modelli funzionali e/o stocastici: uno atto a evidenziare quella parte del fenomeno che si presenta con un'entità maggiore, nelle quantità osservate, e gli altri atti a evidenziare quella parte del fenomeno che si presenta con un'entità minore, nelle stesse quantità osservate. Con specifico riferimento ai modelli digitali delle altezze, occorre procedere ad un secondo filtraggio, ad esempio, quando si opera su dati molto fitti, capaci di mettere in evidenza tanto un segnale maggiore, avente una lunghezza di correlazione relativamente lunga, quanto un segnale minore, avente una lunghezza di correlazione molto più corta (anche se il suo contributo alla modellazione del fenomeno non è trascurabile). Infatti in tal caso, omettere questo secondo passo di correlazione significa lasciare il segnale minore indistinto dal rumore – residuo, cosa che ne amplifica il valore e ne cambia la natura. In tal caso, la prima elaborazione separa solo la “parte maggiore”, lasciando negli scarti – residui anche la “parte minore”. Allora assunto un nuovo modello funzionale e/o stocastico, una successiva elaborazione separa anche la “parte minore”, lasciando inspiegati solo scarti – residui propriamente detti. Sui risultati ottenuti è ancora possibile esprimere un giudizio, in termini numerici e statistici. Anche in questo caso, i controlli di tipo numerico rispondono a problemi di condizionamento ed affidabilità che comunemente accompagnano e seguono il metodo dei minimi quadrati, comprensivo delle sue estensioni e generalizzazioni. A loro volta, i secondi comprendono sempre i test statistici per la valutazione di osservazioni e parametri, della loro dispersione e, se del caso, della loro dipendenza.

Da ultimo, si badi che, nel caso di confronti fra metodologie, procedure ed algoritmi, da effettuarsi ovviamente con gli stessi insiemi di dati, data la ovvia non indipendenza fra i dati, sia necessario effettuare la comparazione dei risultati ottenuti con i test non – parametrici del segno di Thompson, per campioni qualsiasi, sui valori centrali e/o sulla dispersione.

Si noti, come questi confronti non siano infrequenti; al contrario, essi sono richiesti ogniqualevolta si voglia valutare l'effettivo miglioramento ottenibile con un cambio di metodologie, procedure od algoritmi. In questo caso infatti, ragioni di continuità delle serie storiche, oltre alla necessaria cautela nell'accettazione del rinnovamento proposto, richiedono di affiancare, per un certo periodo, due soluzioni comparandone i risultati, al fine di ottenere elementi di giudizio.

Talvolta i dati sono troppo poco omogenei fra loro, ovvero opportunamente suddivisi in insiemi, alcuni insiemi hanno varianze (o altri opportuni indicatori della dispersione) significativamente diverse dagli insiemi circostanti o comunque prossimi (con specifico riferimento ai modelli digitali delle altezze, si trovano zone

non - omogenee, ad esempio, quando si opera in zone pedemontane o in talune fasce costiere). Allora è opportuno frazionare l'insieme dei dati, ovvero effettuare la loro **partizione in insiemi omogenei**, tante quante sono le unioni connesse degli insiemi aventi pressoché le stesse varianze e le stesse scale delle eventuali funzioni di covarianza.

Nei casi più semplici, è consigliabile costruire gli insiemi mediante quadrettatura, particolarmente elementare se i dati sono disposti regolarmente o quasi. Dopodiché assunta una qualsiasi suddivisione di comodo delle classi di varianza, è immediato stabilire quali insiemi abbiano le stesse varianze e quali varianze significativamente diverse. Si osservi che problemi d'incertezza nell'attribuzione di un insieme ad una classe, dovuti all'arbitrarietà del posizionamento delle classi, sono quasi influenti sui risultati.

L'attribuzione di ciascun insieme, ad una determinata classe, produce gli insiemi omogenei cercati. A tale scopo, tecniche gerarchiche ed agglomerative di cluster analysis (ad esempio, line - following o region growing) possono essere vantaggiosamente impiegate. Questa procedura si basa innanzitutto sull'assunzione che la varianza di modello costituisca buona parte della varianza generale, essendo prevalente sulla varianza di osservazione, considerata maggiormente costante per tutti gli insiemi, in quanto legata alla precisione di osservazione.

Alcuni test statistici permettono di discriminare ipotesi alternative nella partizione in insiemi omogenei. Infatti i test ordinari dell'analisi di varianza (di Fisher) e per lo studio delle componenti della varianza (di Bartlett) permettono di giudicare l'omogeneità o meno, rispettivamente delle medie e delle varianze, per campioni indipendenti e normali, mentre i test non - parametrici del rango (di Kruskal - Wallis) permettono di giudicare altri indicatori di posizione e di dispersione, per campioni comunque indipendenti, anche se non necessariamente normali.

Inoltre nel caso di eventuali classificazioni di coefficienti di correlazione (oppure di coefficienti di correlazione sui ranghi di Spearman), altri test statistici permettono di discriminare ipotesi alternative nella partizione in insiemi omogenei. Infatti il test ordinario per lo studio di struttura di covarianza (di Hotelling, in particolare con l'approssimazione di Lawley) permette di giudicare l'omogeneità o meno dei coefficienti di correlazione, per campioni normali, mentre il test non - parametrico del rango (di Wilcoxon - Willcox, sempre con l'approssimazione di Lawley) permette di giudicare i coefficienti di correlazione sui ranghi di Spearman, per campioni non necessariamente normali.

Si osservi comunque come sia spesso possibile effettuare il passaggio da dati non normali a dati normali, facendo uso di note funzioni di trasformazione della distribuzione di probabilità. Si ricordi infatti che, nel caso di **eventi rari** la cui distribuzione può essere assunta approssimativamente log - normale (mentre la distribuzione esatta è data, a rigore, dalla distribuzione Gamma di Erlang), è possibile passare a dati aventi distribuzione normale, calcolando il logaritmo degli stessi dati. Un analogo passaggio a dati aventi distribuzione normale, si ottiene nel caso delle **parti piccole** la cui distribuzione può essere assunta rettangolare, calcolando la funzione inversa dalla funzione trascendente (non elementare), cosiddetta funzione d'errore.

## **APPENDICE B – Effetti delle correlazioni**

La capacità di acquisire grosse moli di dati, durante un processo di misura, da un lato, permette una descrizione più puntuale del fenomeno, dall'altro, richiede maggior attenzione nella scelta del modello stocastico. Questo aspetto, a volte trascurato, può portare seri problemi sull'attendibilità delle stime, quando

si ignorano eventuali correlazioni presenti tra le misure. Infatti in una **compensazione a minimi quadrati**, l'**ipotesi d'indipendenza** tra le misure porta, dal punto di vista del calcolo, ad una **matrice dei pesi delle osservazioni di forma diagonale** e l'ulteriore ipotesi di misure di uguale precisione è spesso abbastanza plausibile, in quanto si suppone che i mezzi utilizzati, durante il loro impiego, non subiscano notevoli variazioni nella loro accuratezza.

Tuttavia in alcuni insiemi di dati, è possibile evidenziare e quantificare la **correlazione**, presente nelle osservazioni, mediante un approccio di tipo stocastico. La quantificazione della correlazione tra le misure avviene ipotizzando che i residui delle equazioni alle osservazioni siano una **realizzazione di un processo stocastico lineare, continuo, normale e stazionario di ordine due**, rispetto ad un parametro ordinatore, ritenuto gruppo di invarianza per la definizione del processo stocastico stesso. Il **metodo della collocazione** è applicato sui residui, poiché tale metodo richiede in ingresso dati privi da un qualunque sistematismo generale che è rimosso proprio dal modello funzionale, utilizzato nel procedimento a minimi quadrati. A questo nuovo insieme, parametro ordinatore e residui, è applicato l'algoritmo della collocazione.

L'obiettivo principale è evidenziare discrepanze tra i risultati nel caso in cui l'effetto della correlazione sia ignorato oppure no. Infatti in presenza di misure indipendenti, la matrice dei pesi delle osservazioni è diagonale; pertanto sotto questa ipotesi il problema è quantificare numericamente il peso da assegnare a ciascuna misura. Tuttavia se, nel trattamento dati, relativo alla compensazione congiunta, si nota (stimata empiricamente e modellata con opportune funzioni definite positive) una piccola, ma significativa correlazione tra i residui delle equazioni alle osservazioni, è doveroso procedere ad una nuova compensazione, per tener conto di questi effetti, a partire dalle cosiddette stime di covarianza, secondo le procedure note, nell'ambito dei processi stocastici.

Assunto un parametro ordinatore e, come componente del processo stocastico, il residuo dell'equazione all'osservazione, dopo la compensazione globale, sempre relativo alla stessa misura, la **funzione finita di covarianza modello**, così ottenuta, rappresenta quantitativamente le correlazioni presenti nei residui delle equazioni alle osservazioni. Dopodiché è necessario costruire la matrice di covarianza, calcolata in base alla forma ed ai valori delle funzioni finite di covarianza modello (espressione numerica delle correlazioni presenti tra le varie osservazioni). Infine la **matrice di covarianza del segnale stocastico** e la **varianza del rumore aleatorio**, opportunamente addizionate ed invertite, sono inserite nella **compensazione globale**, come nuovo modello stocastico, al posto del vecchio, costituito dalla sola matrice dei pesi.

Spesso la compensazione che tiene conto delle correlazioni ha un valore di sigma zero minore rispetto alla compensazione fatta sotto l'ipotesi di indipendenza tra le misure. Tuttavia risultano aumentate le varianze dei parametri incogniti e questo è senz'altro l'aspetto più interessante. Infatti l'introduzione di informazioni aggiuntive, cioè correlazioni fra le osservazioni, anziché aumentare la precisione della compensazione (come quando si aggiungono nuove osservazioni all'insieme dei dati), hanno in qualche modo influito negativamente nel processo di compensazione (come quando si introducono parametri ausiliari nel modello funzionale). Evidentemente gli esempi non confermano teoricamente le osservazioni sopra esposte, poiché attualmente si è solo ai primi tentativi di considerare le correlazioni fra le misure.

Tuttavia si può almeno dire che, se queste sono ignorate, possono portare a risultati poco attendibili e tutto ciò assume particolare importanza, quando diviene relativamente facile l'acquisizione di innumerevoli dati variatamente correlati nel tempo e/o nello spazio, come accade nel caso di osservazioni geospaziali, di fotogrammetria digitale (dallo spazio, aerea o terrestre). Infatti mentre le misure geodetiche classiche in una

rete geodetica o topografica sono, in generale, da qualche centinaio ad alcune migliaia ed anche le osservazioni fotogrammetriche, da sensori analogici, in un blocco fotogrammetrico sono, al più, una o due decine di migliaia, le osservazioni geospaziali superano spesso le centinaia di migliaia e quelle di fotogrammetria digitale arrivano al milione ed oltre.

Allora il trattamento corretto e sufficiente delle osservazioni deve prevedere il compattamento di queste in poche pseudo – osservazioni, opportunamente pesate o, in alternativa, in valori predetti delle osservazioni stesse, a distanza tale da essere fra loro incorrelate, ovvero indipendenti, se normali. Infine poiché, ripetendo molte volte una stessa misura con un qualsiasi strumento, anche di scarsa precisione, la varianza dell'osservazione diminuisce, una conclusione metrologica falsa conduce ad un'irrealistica varianza d'osservazione nulla, mentre una conclusione metrologica corretta stima un valore finito di questa, legato allo strumento impiegato, all'ambiente ed alle correlazioni inevitabilmente presenti nel processo di misura impiegato.

Analiticamente è possibile evidenziare gli effetti subiti dalle stime delle varianze dei parametri incogniti nell'atto di aggiungere o togliere un'equazione d'osservazione od un parametro incognito. Infatti **aggiungere (togliere) un'equazione d'osservazione diminuisce (aumenta) le stime delle varianze dei parametri incogniti**. Infatti le varianze dei parametri incogniti si trovano sulla diagonale della matrice di varianza – covarianza ed essendo quest'ultima direttamente proporzionale alla matrice normale inversa, aggiungendo (togliendo) un'equazione d'osservazione, la matrice normale inversa è modificata togliendo (aggiungendo) una quantità positiva, in conformità ad un noto teorema dell'algebra lineare, denominato lemma per l'inversione di una matrice.

Al contrario, **aggiungere (togliere) un parametro incognito aumenta (diminuisce) le stime di varianza dei parametri incogniti**. Infatti tutti gli addendi di matrici quadrate, simmetriche e definite positive sono ottenuti da prodotti scalari (aventi nucleo l'identità od un'altra matrice definita positiva) e, di conseguenza, hanno elementi positivi in diagonale principale, cosicché la diagonale principale della nuova matrice normale inversa aumenta, per addizione di termini positivi. Le stesse espressioni (scambiando tra loro due addendi) sono utilizzate quando si toglie un parametro incognito, cosicché la diagonale principale della nuova matrice normale inversa diminuisce, per sottrazione, di termini positivi rispetto a quella precedente (in entrambi i casi, quanto affermato è riconducibile allo schema algebrico dei blocchi di Gauss).

Invece con l'**introduzione delle correlazioni tra le osservazioni**, fornire indicazioni sulle stime di varianza dei parametri incogniti diventa più complesso e deve essere studiato ed analizzato con maggiore cura.

□ Infatti la matrice di varianza – covarianza delle osservazioni può essere suddivisa nella somma delle matrici di varianza – covarianza del segnale e del rumore, e questa espressione può essere riscritta e generalizzata, introducendo la matrice dei pesi e la matrice di correlazione del segnale. Allora data la nuova matrice normale, quando si introducono le correlazioni, la matrice di varianza – covarianza dei parametri incogniti, a meno di sigma zero quadro, si ottiene applicando due volte il sopraccitato noto teorema di algebra lineare. Come evidente, le due matrici di varianza – covarianza ottenute sono entrambe definite positive ed hanno in diagonale principale varianze, ovvero elementi positivi. La somma di questi ultimi (se di **somma** si tratta, come accade per la stragrande maggioranza dei modelli

funzionali, usualmente adottati) è ovviamente maggiore di entrambi gli addendi; pertanto ne consegue che le **varianze dei parametri incogniti aumentano con l'introduzione delle correlazioni**.

- ❑ Inoltre nel caso di **correlazioni interessanti informazioni, a priori, sui parametri**, ugualmente le **varianze dei parametri incogniti aumentano con l'introduzione delle correlazioni**, rispetto al caso in cui le informazioni, a priori, siano incorrelate (anche in questo caso, si noti come, nonostante l'adozione necessaria di un formalismo più pesante, il modo di operare sia sostanzialmente identico a quello impiegato per le correlazioni tra le osservazioni).

Per correttezza e completezza, occorre tuttavia osservare come queste considerazioni hanno valore di prova solo quando si hanno alte correlazioni positive ed un **modello matematico additivo (o moltiplicativo**, essendo la moltiplicazione, in ambito lineare, una combinazione lineare a coefficienti positivi). Pertanto è necessario considerare casi diversi, per giudicare l'effetto matematico delle correlazioni <sup>5</sup>, aggiungendo poi considerazioni di ordine metrologico, a supporto di quanto affermato in precedenza. Infatti:

- ❑ un modello matematico additivo, come **una media, una qualsiasi combinazione lineare** e (con riferimento a quanto sopra affermato) un prodotto (come per calcolare **un'area od un volume**), con correlazioni positive moderate, vede crescere di poco le varianze delle stime, mentre le varianze delle stime decrescono di poco, con moderate correlazioni alternate (moderate correlazioni negative danno decrementi maggiori, ma sembrano più irrealistiche);
- ❑ lo stesso modello, con **alte correlazioni positive, fa crescere la varianza delle stime**; di conseguenza, è gravissimo trascurare alte correlazioni positive, benché nascoste, poiché queste possono degradare, addirittura d'ordini di grandezza, la precisione delle stime, ed allora usare, tanto per far numero, dati prossimi, secondo un qualche parametro d'ordine (temporale, spaziale od altro, cioè dati pressoché uguali e, di conseguenza, fortemente correlati), significa millantare precisioni inesistenti, come è possibile mettere in luce crossvalidando i dati stessi con altre osservazioni indipendenti.

Alte correlazioni negative non permettano di costruire una matrice di covarianza, essendo non definita positiva la matrice ottenuta. Per quanto riguarda invece le considerazioni metrologiche, data l'estrema difficoltà di avere informazioni (corrette e consistenti) sulle correlazioni fra i dati presenti, ma per lo più nascoste, occorre considerare fisiologiche correlazioni moderate e sapere che le stime possono risultare, in loro virtù, un po' più od un po' meno precise di quelle ottenute in condizioni di perfetta indipendenza.

Un secondo modello canonico è dato dalla **differenza**, tra due osservazioni (o dal loro **quoziente**, essendo la divisione, in ambito lineare, una combinazione lineare di due termini con un coefficiente negativo) <sup>6</sup>. Allora il segno meno del modello funzionale inverte i segni delle considerazioni precedenti. Pertanto un'alta correlazione positiva gioca a favore della riduzione della varianza della stima, mentre una correlazione moderata positiva o alternata altera di poco in giù od in su il valore della stessa.

- ❑ Ancora considerazioni metrologiche permettono di considerare fisiologica una correlazione moderata, accettando la piccola variazione di precisione conseguente, mentre non si ha ragione di gioire per la forte riduzione della varianza della stima, nei problemi di controllo, a seguito di un'alta correlazione

---

<sup>5</sup> Negli sviluppi analitici, necessari alla prova, compare un'espressione non definita positiva, essendo nulla la sua traccia.

<sup>6</sup> Il limite di due termini è dato dalla non associatività delle operazioni di sottrazione e divisione.

positiva. Infatti nei **problemi di controllo**, un'indispensabile precauzione nel calcolo di una differenza (cioè di una variazione) o di un quoziente (cioè di un rapporto) è l'**indipendenza temporale, spaziale** od altro, delle due osservazioni messe a confronto. Osservazioni fortemente correlate hanno pressoché lo stesso valore e la loro differenza è all'incirca nulla (essendo il loro quoziente circa unitario), cosa del tutto priva d'informazione, perché è del tutto ovvio che un dato sia circa uguale a se stesso, al più, solo lievemente modificato.

- Differente è il caso dell'**eliminazione**, per differenza tra due osservazioni, di un **errore sistematico**. Infatti in questo caso specifico, quello che si vuole eliminare è proprio un errore incognito, ma quasi identico nelle due osservazioni, così da ottenere una differenza residua pressoché nulla. Allora l'**alta correlazione positiva gioca davvero a favore della riduzione della varianza**, addirittura garantendo quello zero con una precisione infinita (cioè una varianza nulla), se il coefficiente di correlazione è proprio pari ad uno, come ben risaputo dai preziosi consigli di vecchi metrologi (a partire dallo **scambio dei piatti di una bilancia**).

Pertanto mentre è fondamentale guardarsi da alte correlazioni positive con modelli additivi o moltiplicativi (gli unici con proprietà gruppali ed associativi), perché fortemente dannose, per quanto riguarda il calcolo di una differenza o di un quoziente, sempre con alte correlazioni positive, occorre distinguere i problemi di controllo dall'eliminazione di errori sistematici (dove in pratica solo la differenza è utilizzata). L'importanza di queste considerazioni matematiche e statistiche è evidente. Infatti le informazioni contengono spesso i dati correlati da trattare con cura particolare, mentre trascurare le loro correlazioni porta a considerare molto più informazione di quella effettivamente disponibile e tutto ciò fa valutare precisioni, una o più volte migliori, di quelli correttamente previste <sup>7</sup>.

Un commento eloquente, sulla perdita di precisione (pur formulato in una differente occasione), deriva da una lezione rilevante tenuta dal Prof. Giuseppe Inghilleri (già assistente al Politecnico di Milano e poi professore ordinario al Politecnico di Torino) e mette in luce come non sia tanto importante ridurre al minimo la dispersione residua, quanto piuttosto capire come e perché essa si sia generata. A commento ed approvazione, il Prof. Mariano Cunietti mostra come sia sempre possibile far scomparire errori residui, sovra – parametrizzando il modello in esame, e come tale pratica discutibile sia solo un trucco per abbellire i risultati, nascondendo la complessità della realtà analizzata (che inevitabilmente sfugge, quasi sempre, alle varie modellazioni proposte, pur essendo doveroso cercarle) <sup>8</sup>.

## **APPENDICE C – Strategie sequenziali**

Il **calcolo della soluzione di grandi sistemi** è un'operazione computazionalmente lunga e complessa; pertanto ogni qualvolta occorre calcolarne una modifica è opportuno procedere in modo **sequenziale**, ovvero modificare la soluzione già ottenuta in precedenza, invece di ripetere ex–novo il calcolo della

---

<sup>7</sup> Lo sviluppo completo dei modelli matematici e statistici rende certa questa asserzione ed allora solo innovazioni di rango pieno (cioè informazioni incorrelate tra loro) danno i contributi validi, per migliorare la precisione delle stime attese.

<sup>8</sup> Allora la strada maestra, dopo qualsiasi trattamento (e maggiormente, se esso è parecchio complesso e sofisticato) è procedere con cautela ad un'analisi successiva per la validazione dei risultati ottenuti che, con un'elegante espressione post – moderna, può essere chiamata post – analysis di dati e modelli. Del resto, è addirittura possibile tracciare un parallelismo logico tra la sovra – parametrizzazione e la cancellazione delle correlazioni (con i modelli funzionali più usati), perché entrambe le operazioni hanno l'effetto di ridurre la varianza residua: la prima introducendo parametri per correggere errori, la seconda ipotizzando d'avere molta più informazione di quella effettiva, riducendo così, pur per strade diverse, proprio la varianza residua e dando l'illusione di una maggiore precisione, in realtà, inesistente.

soluzione <sup>9</sup>. Alcune varianti degli algoritmi diretti consentono il calcolo sequenziale della soluzione, ovvero di aggiungere o togliere da essa una o più equazioni alle misure oppure una o più incognite. Queste operazioni sono utili, per l'**eliminazione delle equazioni alle misure** corrispondenti ad osservazioni affette da errori grossolani e per l'**aggiornamento nel modello funzionale dei parametri (aggiuntivi) incogniti** correttivi di alcuni errori sistematici o pseudo-sistematici, la cui presenza si sospetta nell'insieme delle misure, in base alla pratica sperimentale, oppure per altre ragioni.

Si osservi poi che una **variazione del peso** di un'equazione alle misure, come nella stima contemporanea delle incognite e dei pesi delle quantità osservate, e nei problemi di ottimizzazione dei pesi delle quantità osservate, detti di secondo ordine, corrisponde all'aggiungere o al togliere un'equazione alle misure, pesata tanto quanto l'aumento o la diminuzione di peso che si deve apportare. Per quanto riguarda invece i **problemi di ottimizzazione** dello schema di misura, detti di **primo ordine**, se eseguiti iterativamente per mezzo dell'ottimizzazione di **secondo ordine** con arresto in base al **controllo sull'affidabilità** delle quantità osservate, questi comportano di aggiungere o di togliere un'equazione alle misure. Sempre una variazione del peso di un'equazione alle misure si presenta con l'uso di procedure robuste, dove il calcolo della soluzione è ottenuto tramite la ripetizione ripesata di una compensazione minimi quadrati.

Ancora le stesse operazioni sono utili in **problemi di densificazione di strutture reticolari**, per aggiungere o togliere un punto e tutte le misure che lo determinano, oppure aggiungere o togliere un insieme di punti in un diverso sistema di riferimento e anche le misure relative a tutti i punti compresi. In caso di introduzione, dapprima si aggiungono al sistema, equazione per equazione, tutti i coefficienti delle nuove equazioni relativi alle vecchie incognite e successivamente si aggiungono al sistema così modificato, un'incognita alla volta, tutti i coefficienti sempre delle nuove equazioni relative alle nuove incognite. Invece in caso di esclusione, dapprima si tolgono dal sistema, una incognita alla volta, tutti i coefficienti delle equazioni da eliminare relativi alle incognite da eliminare e successivamente si tolgono dal sistema così modificato, equazione per equazione, tutti i coefficienti delle equazioni da eliminare relativi alle incognite da conservare.

Infine per l'**interpolazione ad elementi finiti** di un campione di dati con un insieme di funzioni splines specializzate rispettivamente per trattare i dati di una serie temporale (o altro campione monodimensionale) oppure quelli di un lattice a supporto territoriale o spaziale, nel caso in cui passi e finestre siano variabili da zona a zona, si opera pure sequenzialmente. In questo caso, tramite l'analisi di varianza (confronto fra la varianza spiegata e la varianza residua), si procede al **campionamento progressivo**, cioè all'acquisizione di nuove osservazioni, nelle zone dove l'approssimazione non è accettabile, mentre si procede al **campionamento selettivo**, cioè al diradamento delle osservazioni, nelle zone dove l'approssimazione è più che accettabile; questo approccio è particolarmente indicato con l'impiego di **tecniche avanzate multirisoluzione e multilivello**.

Gli algoritmi sono predisposti per aggiungere o per togliere, ogni volta, una sola equazione alle misure o una sola incognita; pertanto nel caso in cui si devono aggiungere o togliere più equazioni alle misure o più incognite, occorre ripetere l'applicazione di ciascun algoritmo richiesto tante volte quante sono le equazioni alle misure o le incognite da aggiungere o togliere. Il vantaggio dell'uso di questi algoritmi consiste nella possibilità di modificare con essi i risultati già ottenuti con un numero di operazioni dell'ordine del quadrato del numero dei parametri (aggiuntivi) incogniti, anziché de loro cubo, come si avrebbe utilizzando gli algoritmi di base. Si noti perciò che anche l'aggiungere o il togliere più (poche) equazioni alle misure o più

---

<sup>9</sup> L'adeguata applicazione di un noto teorema dell'algebra delle matrici consente inoltre il calcolo sequenziale della matrice di varianza-covarianza delle incognite.

(poche) incognite è ancora un'operazione abbastanza sollecita. Infine la ragione dell'esposizione a parte di questi algoritmi, rispetto a quelli di base, sta nel fatto che differenti sono le finalità del loro utilizzo.

Da ultimo, l'**inferenza statistica sequenziale**, nonostante ad oggi solo pochi autori abbiano dedicato ad essa la loro attenzione, non è certo un tema nuovo per l'analisi statistica dei dati sperimentali. Infatti in letteratura, si trovano alcuni esempi di **test sequenziali**; tuttavia le applicazioni sono elaborate solo per una piccola parte dei test più comunemente utilizzati.

Poiché l'inferenza statistica nasce come strumento utile per la verifica di ipotesi su l'adattamento di dati a distribuzioni di probabilità, su parametri o, più in generale, sulla bontà dei modelli d'interpretazione delle osservazioni, l'applicazione di un test necessita un campione di dati significativo e rappresentativo della popolazione da cui è considerato estratto. Questo fatto può comportare l'esigenza di collezionare un numero elevato di estrazioni, prima di poter formulare ipotesi sensate e soprattutto svolgere il test. Il **vantaggio** dei test sequenziali è quello di permettere la loro **esecuzione con pochissimi dati** (in alcuni casi già con solo tre dati), arrivando a soluzione con un **minore numero di estrazioni rispetto ai test tradizionali**.

Infatti il numero di osservazioni su cui condurre il test non è fissato a priori, ma è determinato nel corso dell'esperimento. Il test è così effettuato dopo ogni osservazione (o gruppo di osservazioni) sull'insieme dei dati accumulati, fino a quel momento, e prosegue fino a quando non è possibile decidere quale ipotesi accettare.

Poiché lo scopo di questo tipo di analisi è quello di arrivare a scegliere, tra ipotesi alternative, con il minimo numero di osservazioni, i test sequenziali sono costruiti in modo da poter rappresentare graficamente, passo dopo passo, i risultati delle osservazioni, in funzione del numero di prove effettuate. Benché le funzioni di merito che si possono costruire siano numerose, solitamente si sceglie di utilizzare l'approccio conosciuto come test sequenziale del **rapporto di verosimiglianza**, poiché esso è applicabile a tutte le tipologie di test senza nessun tipo di adattamento. L'idea è ottenere un **grafico** su cui siano riconoscibili **due linee di confine** che lo suddividano in **tre aree**, nel caso comune di una sola ipotesi alternativa.

La prima regione è quella d'accettazione dell'**ipotesi fondamentale (o nulla)**, la seconda regione intermedia è la **regione del dubbio**, la terza regione è quella di accettazione dell'**ipotesi alternativa (o zona critica)**. Le linee di confine sono ricavate in funzione dell'**entità dei rischi**, costituiti dal **livello di significatività** (od **errore di prima specie**) e dalla **potenza del test** (od **errore di seconda specie**).

Se la funzione di distribuzione di probabilità è continua, si esegue il **rapporto di verosimiglianza tra le funzioni di densità di probabilità composte**, ovvero fra i prodotti delle probabilità elementari per campioni Bernoulliani, dove è particolarmente utile la **forma logaritmica per funzioni di distribuzione di probabilità di classe esponenziale** (come nella stragrande maggioranza dei casi effettivi). Di norma, la funzione si muove inizialmente nella regione del dubbio, per poi dirigersi in una delle due regioni di accettazione (fondamentale od alternativa). A questo punto, avviene l'**interruzione del test con l'uscita dalla regione del dubbio**, perché sarà accettata, in probabilità, l'ipotesi relativa alla regione interessata.

Come ben evidente dalle ultime due appendici e dalle precedenti parti seconda e quarta (nonché nel suo complesso da tutto il lavoro), il trattamento delle osservazioni svolge un ruolo centrale nelle discipline del rilevamento, in particolare, qualificandole come discipline del calcolo, da sempre, indissolubilmente legate alla matematica ed alla fisica.

## **SECONDA INTRODUZIONE – Ritorno alla geomatica <sup>10</sup>**

“Sguazzare” letteralmente nella geomatica sta diventando una moda, forse scientificamente pericolosa e, di certo, metodologicamente errata. Infatti la geomatica non è una nuova disciplina, ma un coacervo di discipline, tra cui principalmente quelle del rilevamento, rivisitate alla luce della rivoluzione scientifica e tecnologica prodotta dalla conquista dello spazio e dal prorompere delle tecnologie dell'informazione. Per questo motivo, è strettamente necessario non disperdere affatto tutto il bagaglio culturale, proprio delle scienze geodetiche e cartografiche, arricchendolo con tutti quei contributi che possono derivare dalla matematica e dalla fisica, classiche e moderne, e soprattutto dalla matematica applicata, dalla statistica e dall'informatica.

L'alternativa è cadere nel bricolage, puro e semplice, dove tutti sono autorizzati a procedere come loro pare, senza mai preoccuparsi di fare scienza e fare scuola, ovvero di conservare, sostenere ed innovare una comunità coesa di esperti del settore, capaci d'insegnare, tanto ai loro allievi, quanto ad utenti terzi, le metodologie e le procedure, del settore, mettendone in luce, sia gli argomenti teorici che gli aspetti pratici. Una simile scelta, completamente dissennata, non può portare che alla fine prematura del settore stesso, preda degli appetiti dei costruttori di tecnologie (hardware, software e riguardanti aspetti metodologici) e lasciato in balia di tanti possibili utenti fai-da-te, forse capaci di produrre un qualche risultato accettabile, ma certamente incapaci di fare sintesi, procedendo con strumenti critici.

Non soddisfa anche rifugiarsi in ambiti di nicchia, di certo, non attaccati da nessuno, ma in sé impossibilitati a mantenere in vita l'intero settore scientifico-disciplinare. Non si vuole certamente dire che queste ricerche non debbano essere condotte; anzi proprio queste ricerche sono, molto spesso, il fiore all'occhiello del suddetto settore. Tuttavia le stesse non possono costituire la norma di comportamento per tutti, proprio perché destinate solo ad un, ristrettissimo e ben selezionato, gruppo di specialisti. A riguardo, l'esempio del calcolo del geoide è ben significativo: un geoide con precisione centimetrica è necessario, ma mentre è importante averne uno, ben fatto e controllato, è sicuramente inutile averne tanti, più o meno buoni, forse addirittura con minori garanzie di controllo.

Il presente lavoro, muovendosi da considerazioni sulla struttura per dati e modelli, cita a mo' d'esempio, il problema datato della conversione al sistema metrico decimale. Dopodiché prima di ribadire questioni importanti sulla correttezza dei comportamenti, in termini di stima e rispetto, passa in rassegna alcune novità, nell'ambito della geomatica, del trattamento delle osservazioni e della matematica applicata. Queste potrebbero forse essere rilevanti, in un futuro prossimo, ben sapendo che la futurologia non è una scienza ed altre novità potrebbero sopravanzare. Infine un'appendice cita un'interessante esercitazione/laboratorio, di trattamento delle osservazioni, che si muove fra l'analisi dei dati e la statistica computazionale, su temi di geostatistica e geomatica, prendendo in considerazione dati telerilevati georeferenziati.

## **PARTE V – PERMANENZE ED INNOVAZIONI <sup>11</sup>**

<sup>10</sup> La quinta parte del presente lavoro, in larga parte, è ripreso, dalla relazione Mussio L., Nocera R. (2011): Geomatica ed oltre ..., presentata a Trieste, 12-16 settembre 2011, in occasione della festa per il 72° compleanno del Prof. Giorgio Manzoni.

La conclusione sulla stima ed il rispetto, è ripreso dal lavoro Mussio L. (2011): ... Per riflettere sulla Geomatica, Atti del Convegno Nazionale della SIFET – Applicazioni Interdisciplinari della Geomatica: Ricerca, Formazione e Professione, Portonovo (AN), 22-24 giugno 2011.

L'appendice: Un'applicazione geomatica su dati tele rilevati, è ripresa dal lavoro Mussio L. (2011): Trasferimento di tecnologie e cooperazione internazionale, Atti del Tributo a Sergio Dequal & Riccardo Galetto – Geomatica: le radici del futuro, a cura di Ambrogio Manzino e Anna Spalla, Pavia, 10-11 febbraio 2011.

<sup>11</sup> Essere incapace d'innovare significa condannarsi a diventare totalmente obsoleto ed estinguersi, prima o poi; tuttavia essere incapace di permanere significa perdere la memoria della propria essenza e comunque estinguersi per nullificazione (d'altra parte, coraggio e prudenza sono doti che ben si accompagnano, salvo essere folli od ignavi).

## 1. Una struttura per dati e modelli <sup>12</sup>

I fenomeni di cultura sono un sistema di segni, ovvero di relazioni, cioè un insieme di fenomeni di comunicazione, accettati da un gruppo, per un certo tempo. Infatti è cultura, in senso lato, ogni intervento sul dato originale, modificato in modo da poterlo inserire in un rapporto di comunicazione. La relazione tra una serie di eventi ed una serie di probabilità collegate è dato dal rapporto tra due progressioni aritmetica e geometrica, dove la seconda è il logaritmo della prima <sup>13</sup>. L'informazione sorge per disgiunzione binaria ed è controllata dagli elementi di ridondanza, inseriti nel codice; inoltre l'entropia d'un sistema è lo stato di equi probabilità cui tendono i suoi elementi disordinati. Alcune relazioni collegano tra loro le grandezze che misurano la dispersione presente nell'informazione:

$$\Delta = 2P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - 1 \quad (\text{per dati normalmente distribuiti})$$

essendo  $\Delta$  il delta di Gini e  $\sigma$  lo sqm (ovvero la radice quadrata della varianza), inoltre essendo  $I$  l'informazione di Shannon,  $h$  la dimensione di un insieme di dati e  $n$  il numero di scelte effettuate, all'interno di questo insieme, senza ripetizioni <sup>14</sup>:

$$I = n \log_2 h \quad (\text{per dati qualsiasi})$$

Un codice è un sistema che stabilisce:

- un repertorio di simboli, distinti per opposizione reciproca;
- le regole di combinazione;
- la corrispondenza, termine a termine, tra simbolo e significato.

La semiologia/semiotica <sup>15</sup> fornisce le nozioni relative all'informazione ed al messaggio, da comparare con altre simili, nonché al loro stato di ordine/disordine, essendo i sistemi regolati in probabilità. Nell'universo del senso, la relazione tra un simbolo e la sua referenza è immediata, reciproca e reversibile (benché convenzionale ed arbitraria) ed esprime un concetto nelle forme d'immagine mentale e/o condizione d'uso. Il problema del referente, esistente o meno, può non avere alcuna pertinenza (ad esempio, come nelle leggende antiche della chimera, del grifone e delle arpie, nonché nella leggenda medioevale dell'unicorno), oppure riferimenti plurimi (come la stella del mattino e la stella della sera, entrambe riferite al pianeta Venere, non riconosciuto unico, in tempi molto antichi, e così rimasto nella cultura popolare).

Il simbolo è costante, non il significato che può arricchirsi e/o impoverirsi, in processo dinamico (chiamato senso). Pertanto il linguaggio è un sistema che si chiarifica, per successivi sistemi di convenzioni spiegatisi a vicenda. Si definisce allora denotazione l'operazione per indicare la classe cui un simbolo s'estende e connotazione l'operazione per indicare le proprietà comuni (cioè intensive), entro una certa classe. Una connotazione avviene quando una coppia significante (cioè un concetto) – significato diventa il significante di

<sup>12</sup> Il paragrafo a seguire è liberamente ripreso e riassunto da: La struttura assente – Introduzione alla ricerca semiologia, di Umberto Eco (Bompiani – Nuovi saggi italiani, Milano, 1968).

<sup>13</sup> La teoria dell'informazione chiama *bit* l'unità di misura dell'informazione presente nei dati originari e/o derivati.

<sup>14</sup> La dimensione dei dati ed il numero di scelte coincidono, nel caso in cui gli oggetti di misura siano frequenze relative.

<sup>15</sup> Una branca innovativa della semiotica studia la zoo-semiotica.

un significato aggiunto (alla classe che si estende), per mezzo di sotto-codici o lessici. Infatti il significante è una forma generatrice di senso che si riempie di denotazioni e connotazioni, grazie a codici e lessici che stabiliscono corrispondenze con insiemi di significati <sup>16</sup>.

- ❑ Si definisce struttura un sistema, retto da coesione interna, che appare comparando fenomeni differenti, ma riconducibili a relazioni simili (ovvero un modello semplificato, per uniformare fenomeni diversi).
- ❑ Si definisce codice un modello, fatto di simboli e regole, di una serie di comunicazioni, postulato per spiegare la possibilità di comunicazione di certi messaggi.
- ❑ Si definiscono paradigma l'asse di selezione delle regole e sintagma l'asse di combinazione dei simboli.
- ❑ Si definiscono repertorio la lista dei simboli e lessico una lista, in corrispondenza a determinati significati.

Le circostanze ed il contesto (oltre al rumore) mutano il senso, la funzione e la quota informativa di un messaggio (ovvero il segnale contenuto) la cui interpretazione rimanda all'universo del sapere, collegando l'universo della retorica a quello delle ideologie. Le strutture possono strutturarsi in strutture, ma un'eventuale unica super-struttura sarebbe una struttura vuota. Non tutte le circostanze si risolvono in segno, ma possono presentarsi come un residuo irrisolto, per il complesso dei fattori biologici, per gli eventi e le interferenze esterne (frutto della storia e della cronaca) e per gli accadimenti economici ed altri fatti, a cornice di ogni rapporto comunicativo. L'esperienza culturale della comunicazione concorre altresì a mutare le circostanze.

La funzione di un messaggio può essere: referenziale a qualcosa, di contatto con qualcuno, emotiva nei confronti del bene o del male, estetica nei confronti del bello o del brutto, metalinguistica per riflettere sul linguaggio stesso. La possibilità di codificare un messaggio dipende dall'insieme delle relazioni statistiche tra gli elementi di una *texture*. I differenti gradi di certezza di un discorso spaziano dal livello apodittico (riferito ai principi primi), a quello dialettico (fondato su premesse solo probabili), per arrivare al livello retorico (affidato alla sola ragionevolezza persuasiva <sup>17</sup>). L'ideologia è l'universo del sapere di ciascun singolo, per partecipare ad un discorso, e del gruppo cui questi appartiene, sotto forma di attese sociali, esperienze acquisite, atteggiamenti mentali e principi morali.

La semiologia/semiotica mostra, nell'universo dei segni, composto da codici, repertori e lessici, l'universo delle ideologie, riflesse nelle strutture del linguaggio, perché un certo modo d'usare il linguaggio è un certo modo di pensare della società, al di là dei meccanismi costanti della mente umana. Infatti l'ideologia non rappresenta il significato totale/finale della comunicazione ed occorre ridimensionare le attese ideologiche. Il compito della semiologia/semiotica è tradurre universali teorici della comunicazione in descrizioni tecniche delle situazioni comunicative. A riguardo, i matematici sono usi parlare di isomorfismi <sup>18</sup> ogni qual volta sia possibile costruire modelli di transizione, tra diversi oggetti matematici che rispondono a leggi diverse, ma riconducibili le une alle altre.

In generale, ogni espressione ha una doppia articolazione, dove i due livelli non sono sostituibili, né intercambiabili. Alcuni esempi si ritrovano nel linguaggio (con i fonemi ed i morfemi/sintagmi), nella musica

---

<sup>16</sup> Esiste una corrispondenza semiologia – linguistica, nella corrispondenza: codice – messaggio e *langue* (cioè un insieme di regole) – *parole* (cioè la lingua parlata).

<sup>17</sup> Ad esempio, i sistemi di stimoli senso-motori e quelli inconsci suscitano reazioni emotive.

<sup>18</sup> Corrispondenze algebriche più sfumate sono l'omeomorfismo che mantiene solo proprietà topologiche (ad esempio, la semplice connessione o lo stesso numero di manici) e l'omomorfismo iniettivo (quando ad ogni elemento di un insieme corrisponde un solo elemento in un secondo insieme, ma non tutti i suoi elementi hanno una contro-immagine) o suriettivo (quando a tutti gli elementi del secondo insieme corrisponde uno o più elementi del primo insieme). Un isomorfismo è un omomorfismo insieme iniettivo e suriettivo.

(con le note e l'insieme d'accordi e sequenze melodiche) e nei codici visivi <sup>19</sup> (con forme/colori e segni iconici). Tuttavia occorre evitare di farne un mito, perché esistono eccezioni, ovvero strutture artificiali, senza articolazioni, e strutture a più livelli, anche tra loro intercambiabili (come la musica seriale). I codici visivi, come le icone, gli indici ed i simboli <sup>20</sup>, sono un esempio di comunicazione non-linguistica. Una diversa articolazione dei codici visivi riconosce: segni base, semi (cioè unità complesse di significato, composte da segni e costitutive delle figure) e figure <sup>21</sup>.

I codici antropologici sono ricavati, in grande, dallo studio:

- del linguaggio, in una società primitiva, per ricavare le regole linguistiche di tutte le lingue;
- delle relazioni di parentela, per individuare le relazioni parentali di tutte le società;
- della forma (o disposizione fisica) del linguaggio, per definire il codice urbanistico di tutti gli insediamenti,

e, in piccolo, dallo studio:

- delle manifestazioni infra e pre-culturali di tipo biologico e fisiologico;
- delle manifestazioni micro-culturali, con configurazioni fisse, semifisse ed informali.

Se qualcosa guida il comportamento verso un certo fine, allora questo qualcosa è un segno (come definito da Charles William Morris, psico-linguista americano). Pertanto un segno è caratterizzato solo sulla base di un significato codificato che un dato contesto culturale attribuisce ad un significante <sup>22</sup>. Gli oggetti d'uso comune ammettono piccole oscillazioni, nel tempo e nello spazio, tra funzioni prime e seconde. Allora una struttura è un modello, costituito da forme, per lo più invarianti, indipendenti dall'oggetto singolo, formato da un sistema di differenze ed opposizioni, e dotato di coerenze interne. Inoltre un modello ha la caratteristica di essere trasportabile da un fenomeno ad un altro fenomeno e da classi di fenomeni ad altre classi di fenomeni diversi.

Un parallelismo tra la semiologia/semiotica e la linguistica riporta a Ferdinand De Saussure con il termine sistema, in luogo di struttura, a sua volta, introdotto con le Tesi di Praga, formulate dal fondatore del circolo omonimo, Sergej Petrovič Trubeckoj. Inoltre si possono rilevare parallelismi strutturalisti tra le *Summae* medioevali e le piante delle cattedrali gotiche, l'universo astronomico kepleriano ed il barocco, le fisiche dell'indeterminazione e le opere aperte contemporanee. Infatti i rapporti di relazione tra strutturalismo e fenomenologia sono simili a quelli tra il carattere astratto di un modello interpretativo e gli aspetti particolari di un fenomeno concreto; pertanto anche i rapporti di relazione tra un modello interpretativo e la critica hanno le stesse caratteristiche, passando dalle scienze e le tecniche alle lettere e le arti.

---

<sup>19</sup> Un esempio interessante di sistema visivo sono le carte geografiche e topografiche, con lo studio delle loro condizioni ottimali di denotazione/connotazione, esteso oggi anche alla multimedialità dei sistemi informativi geografici e territoriali, capaci di andare oltre gli stessi sistemi visivi.

<sup>20</sup> Le icone sono somiglianti agli oggetti, in base a convenzioni grafiche; gli indici, quali le frecce, servono per richiamare l'attenzione verso gli oggetti d'interesse; i simboli sono solo convenzionali. Tutti e tre i tipi di codici visivi sono interessanti anche per il loro uso cartografico e nell'ambito dei sistemi informativi geografici e/o territoriali.

<sup>21</sup> Questa seconda articolazione dei codici visivi, oltre ad essere interessante in cartografia e nel mondo dei sistemi informativi geografici e territoriali, è importantissima per la fotointerpretazione d'immagini, mappe e sequenze di scene, in fotogrammetria e telerilevamento.

<sup>22</sup> D'altra parte, qui come altrove, non sempre è facile costruire teoremi, non solo per la loro oggettiva difficoltà, ma anche perché potrebbero esistere contro-esempi reconditi, inverosimili e perciò rarissimi, che renderebbero subito falso il preteso teorema. Un'osservazione marginale rileva che, come fa stupire uno scienziato od un tecnico, privo di una cultura umanistica, altrettanto dovrebbe far stupire un intellettuale umanista, privo di cultura tecnico-scientifica, a partire dalla matematica. Tuttavia analogamente, come fa stupire un tecnico privo di conoscenze scientifiche, altrettanto dovrebbe far stupire uno scienziato, privo di conoscenze tecniche, a partire oggi dall'informatica.

Un'eccessiva pretesa strutturalista è solo utopistica, per l'impossibilità strutturale della fenomenologia di racchiudere la vastità e la ricchezza all'interno di un'unica struttura chiusa. Le strutture non sono mai inerti, né stabili, ma discendono dall'interazione tra l'osservatore e l'oggetto; pertanto all'ismo dello strutturalismo (come per tutti gli ismi) è sempre preferibile un'analisi strutturale che avvicina, seppure in modo rozzo, strutturalismo e fenomenologia. Infatti il modello strutturale intende ricostruire una realtà ontologica, mediante un procedimento operativo, capace di studiare altre classi di fenomeni, come sistemi di segni e, di conseguenza, la comunicazione umana avviene tramite simboli comuni, perché comuni sono tutti gli istinti umani.

Il pensiero strutturale è seriale e polivalente, ed un meccanismo finito, capace di generare un'attività infinita. Nella prospettiva seriale, il riconoscimento del fondamento storico e sociale dei codici può contribuire a mutare questi codici, cosicché ogni cambiamento dei codici comunicativi comporti la formazione di nuovi contesti culturali, l'organizzazione di nuovi codici, la ristrutturazione continua di questi ultimi e l'evoluzione storica delle modalità di comunicazione, seguendo le interrelazioni dialettiche tra sistemi di comunicazione e contesto sociale. Infatti la serie non nega la struttura (e la sua costanza), ma riconosce il carattere nella storia di questa (come lo sviluppo di un processo di fenomeni e/o eventi). La serie storica può altresì essere sostituita da un lattice a supporto territoriale (od a referenza spaziale)<sup>23</sup>.

La struttura diventa assenza nella vana ricerca di un unico codice di codici; pertanto la struttura è un modello conoscitivo ed uno strumento operativo, nello studio di un gruppo di fenomeni, aventi in comune tra loro omologie strutturali. Successive modificazioni della struttura saranno necessarie, in conseguenza alla scoperta di nuove connessioni nel reticolo dei modelli di partenza. Infatti le griglie strutturali di permutazione garantiscono la spiegazione interpretativa degli eventi, ma non l'interpretazione della loro trama profonda, perché lo strutturalismo è uno strumento di lavoro e non un valore di verità la cui ricerca è insieme inutile ed impossibile. Di conseguenza, un messaggio, emesso secondo alcuni codici ed interpretato secondo altri codici, finisce per avere significati multipli.

Allora costruire una struttura è definire statisticamente una catena significativa, ovvero una matrice di transizione, nel gioco combinatorio tra verità ed errori, ed un modello esplicativo ha forma buona, secondo la teoria della *Gestalt*, se richiede l'informazione minima possibile e permette una ridondanza massima. Il limite dello strutturalismo filosofico sta invece nei fondamenti della conoscenza, sul posto dell'uomo nel mondo e sull'esistenza stessa del mondo, cioè nell'incapacità di fermarsi alle domande penultime. Una risposta è data dal pragmatismo perché, secondo un aforisma cinese, bisogna partecipare alla pratica che trasforma la realtà, per acquistare conoscenze. Il passaggio dall'io al noi, ammettendo punti di vista diversi e differenti, aumenta la possibilità di fare scoperte ed inferenze, quasi come nella teoria dei giochi.

I modelli esplicativi sono strumenti di conoscenza, comodi ed eleganti, e derivano da un, vasto e prolungato, censimento empirico e da una successiva ricostruzione teorica induttiva, dove agisce un'analogia formale con il principio di complementarità, proprio delle scienze fisiche. L'esperienza si attua in un processo, dove si mette in corrispondenza un dato pattern con esperienze passate, attraverso una complessa interazione, di tipo probabilistico, come già nella teoria dell'informazione e, prima ancora, in termodinamica. L'attendibilità dei codici è regolata dalla logica dei significati, a loro volta, influenzati dai condizionamenti biologici e psichici, dalle convinzioni sociali (considerando gli archetipi come forme intermedie), dal ruolo del contesto e dalla casistica delle circostanze, fino al problema dell'affettività, in senso lato.

---

<sup>23</sup> Un lattice a supporto territoriale (od a referenza spaziale) è riferito a una serie, quando coinvolge basi di dati dinamici. In tal caso, il problema in esame, oltre ad essere georeferenziato, è anche tempo variante.

La semiologia/semiotica, prefigurata da John Locke, postulata da De Saussure ed interpolata da Charles-Sanders Peirce, è un sistema in sistemazione, ad esempio, come in Jorge Isidoro Luis Borges <sup>24</sup>. I codici musicali sono codici particolari, come quelli che a loro s'avvicinano, ad esempio i repertori delle onomatopee. Codici particolari e formalizzati sono quelli matematici, informatici, chimici, ecc. I codici naturali, a partire dalla zoo-semiotica, prendono in considerazione la comunicazione tattile (dalle prime esperienze infantili che predeterminano la comprensione verbale alla scelta del vestiario), i segnali olfattivi ed i codici del gusto (con il codice dei profumi e dei sapori). Invece sono già parte della para-linguistica i linguaggi tambureggiati o fischiati (per mezzo di strumenti adatti), nonché quelli a bocca chiusa.

La cinesica e la prossemica comprendono la postura, le espressioni del viso, altre posizioni del corpo e le distanze. La postura prende in considerazione gli stili di camminata ed i movimenti del capo e delle mani. Espressioni del viso sono il riso, il sorriso ed il pianto, nonché i gesti, ad esempio, di cortesia, ringraziamento o disprezzo. Le distanze vanno da quella intima a quella personale, come pure da quella sociale a quella pubblica. Un punto d'arrivo della ricerca semiotica è la derivazione della struttura dell'intreccio di una comunicazione, non solo scritta, ma anche orale, comprese altre modalità (quali il teatro, il cinema, i fumetti, ecc.), dei codici culturali (dall'etichetta: con le sue convenzioni, gerarchie e tabù, ai sistemi di modellazione del mondo: miti, leggende, teologie primitive).

Un altro problema di confine tra linguistica e semiologia/semiotica riguarda la traduzione, comunque possibile e sempre necessaria, tra lingue e culture, facendo riferimento a diversi popoli, tanto in diverse epoche storiche, quanto in diverse aree geografiche. Traduttore/traditore è un'espressione d'uso comune, ma non una banalità. Infatti tradurre non può essere un'operazione automatica, pena essa stessa diventare un'operazione banale. Pertanto tradurre è cercare la migliore corrispondenza tra due parole e/o brevi frasi, appartenenti a due lingue diverse, dove la parola e/o la breve frase da tradurre ha spesso più significati nella seconda lingua e, a sua volta, la parola e/o la breve frase prescelta ha più significati nella prima lingua. Allora tradurre è muoversi tra corrispondenze molti a molti.

Anche molte questioni aperte nelle discipline del rilevamento non riguardano problemi di matematica, matematica applicata e statistica, bensì di logica (a partire da George Boole, Friedrich Ludwig Gottlob Frege, Giuseppe Peano, Bertrand Arthur William Russell, Ludwig Wittgenstein ed Alfred Tarski, dai positivisti logici del Circolo di Vienna e dai filosofi analitici americani, successori di questi ultimi), tenendo conto dei limiti posti alle teorie ingenua e soprattutto del teorema di indecidibilità di Kurt Gödel, in risposta alle pretese di completezza di David Hilbert. Fra le scienze cognitive, la linguistica, la psicologia delle forme (dette in tedesco: *Gestalt*) e la semiologia/semiotica sono discipline d'interesse, per il contributo dato ai problemi di segmentazione, classificazione, raggruppamento, interpretazione, ecc.

Lo studio del linguaggio umano e delle lingue naturali fa da battistrada all'analisi di mappe, immagini, modelli 3D e loro sequenze. A partire dal metodo comparativo di Friedrich Wilhelm Christian Karl Ferdinand Freiherr von Humboldt, dalla distinzione fra significante e significato di De Saussure, dalla scoperta dei fonemi-morfemi di Nikolaj Sergeevič Trubeckoj, lo studio delle grammatiche sintagmatiche di Leonard Bloomfield, e trasformativi/generative di Avram Noam Chomsky è d'interesse per la definizione di primitive e delle loro modalità d'associazione grammaticale e sintattica. A riguardo, un aiuto prezioso proviene da quanto è già acquisito dalle tecnologie dell'informazione, da studiare ed intendersi nei loro contesti e significati allargati, a partire dalle tesi di Norbert Wiener, Alonzo Church e Alan Mathison Turing.

---

<sup>24</sup> Comunanze di nomi, oltre che di temi, provano una relativa vicinanza tra semiologia/semiotica e linguistica.

## 2. La parola e la tavola

La parola e la tavola sono due aspetti caratteristici dell'intelligenza umana che, per mezzo delle capacità di percezione, apprendimento ed astrazione, mettono in relazione l'intelligenza stessa con il mondo esterno, rispettivamente grazie al linguaggio ed alla concezione dello spazio. Pertanto la parola e la tavola possono essere, quasi a mo' di slogan, due espressioni usate per mettere in evidenza due capacità, esclusivamente umane, per comprendere, mettersi in relazione e comunicare, costruendo così una società di uomini, con la coscienza di se stessi e delle relazioni che intercorrono tra loro. Storicamente più studiato è il linguaggio, per gli antichissimi legami tra la filosofia (del linguaggio) e la linguistica (comparativa e strutturale), dove l'attuale punto d'arrivo è costituito dal riconoscimento dell'esistenza d'una grammatica universale.

La grammatica universale riguarda la natura delle capacità intellettive umane <sup>25</sup>, ovvero condizioni necessarie e sufficienti, per qualificare ed interpretare un sistema come una lingua umana, non solo da un punto di vista sintattico, ma anche da quelli semantico e fonologico. Un precedente illustre è dato dalla grammatica sintagmatica di Port Royal (1620), appena successiva al Discorso sul metodo, di Cartesio, e di poco precedente ai Principia, di Newton. A sua volta, un antesignano di questa è la tripartizione dell'intelligenza: sensitiva, logica ed artistica, ad opera del medico spagnolo Juan Quarte (1575). La prima richiede solo percezione ed appartiene anche agli animali inferiori, la seconda appartiene solo agli animali più evoluti, la terza richiede anche immaginazione ed è propria degli esseri umani <sup>26</sup>.

La psicologia razionalista illuminista ed i suoi sviluppi, elaborati dai romantici, danno avvio allo studio del linguaggio, separando una struttura profonda (semantica) da una struttura superficiale (fonologica). Le strutture grammaticali fungono da collegamento tra i due livelli strutturali e possono essere variamente ripetute, grazie a proprietà ricorsive che, secondo la grammatica universale, sono insite nel principio organizzativo innato d'applicazione ciclica delle regole <sup>27</sup>. In ogni caso, le regole semantiche e sintattiche s'intrecciano, anche se queste sono meno definite e più ambigue, da un punto di vista semantico. In generale, le trasformazioni grammaticali sono strutturalmente dipendenti dall'organizzazione dei sintagmi, ma studiarle strutturalmente indipendenti è, di gran lunga, più agevole <sup>28</sup>.

L'apprendimento di una lingua e, in particolare, della lingua madre passa dal confronto tra pochi dati e la struttura generativa innata della grammatica universale, definendone l'essenza per abduzione ed arrivando a successive conferme, in un processo d'interazione organismo-ambiente. Il linguaggio è lo strumento principe per lo sviluppo del libero pensiero e la sua spiegazione rifiuta interpretazioni meccaniciste <sup>29</sup> (oltre a tesi antiscientifiche, idealiste o spiritualiste). In questo contesto, un numero finito di regole della grammatica, generativa e trasformativa (cioè di strutture mentali), producono un insieme infinito di descrizioni strutturali. Le regole che connettono le strutture sintattiche con i significati semantici non sono tuttora ben comprese, intervenendo quasi sempre considerazioni pragmatiche e credenze extra-linguistiche.

La componente sintattica di una grammatica associa la struttura profonda semantica alla struttura superficiale fonologica. La componente sintattica si compone di una componente di base ed una componente trasformativa. La prima componente contiene il lessico e le categorie della struttura

---

<sup>25</sup> A riguardo, si veda diffusamente: Il linguaggio e la mente, di Noam Chomsky (Bollati Boringhieri, Torino, 2010).

<sup>26</sup> La comunicazione animale ha proprietà comuni con i sistemi gestuali umani, ma non con il linguaggio, essendo questo discreto, mentre altri sistemi ammettono variazioni continue. Le proprietà intenzionale, sintattica e propositiva sono caratteristiche del linguaggio, ma non lo qualificano, in quanto comuni anche ad altri sistemi gestuale e di comunicazione umana ed animale.

<sup>27</sup> Un interessante parallelo con la grammatica universale è dato dalla concezione dello spazio bidimensionale, da studiarsi mediante una teoria dell'acquisizione visiva (e non solo, ad esempio, anche tattile ed acustica).

<sup>28</sup> Nessuna lingua umana contiene operazioni strutturalmente indipendenti, anche se non esistono ragioni perché tutte le operazioni debbano essere strutturalmente dipendenti.

<sup>29</sup> La spiegazione del linguaggio dà contributi alla costruzione di una filosofia sociale, di una politica antiautoritaria e della democrazia.

sintagmatica semplice non-contestuale. Le regole trasformazionali modificano la struttura dei sintagmi, in certi modi fissi (con le forme attiva, passiva, negativa, interrogativa e loro combinazioni), cosicché le strutture profonde universali del linguaggio generino, mediante trasformazioni grammaticali, le strutture superficiali di ciascuna lingua particolare. Le strutture profonde variano poco, sono soggette a parecchie restrizioni sulle regole possibili e danno contributi significativi all'interpretazione semantica.

Una grammatica è un sistema di regole, per generare una classe di strutture costitutive di una data lingua, grazie ad un sistema di credenze ed a certe strategie interpretative. Queste strutture sono sempre astrazioni di primo ordine e la grammatica stessa un'astrazione di secondo ordine. Allo scopo, l'ipotesi empirica d'una struttura innata permette di scegliere, con pochi dati disponibili, una determinata grammatica postulata, essendo tuttavia questa struttura sufficientemente flessibile per adattarsi a qualsiasi lingua. Infatti l'adozione di una regola pragmatica sull'abduzione<sup>30</sup> linguistica pone limiti alle ipotesi ammissibili, in quanto la mente s'adatta a teorie (apparentemente) corrette naturalmente (altre forme d'innatismo si rifanno a categorie kantiane ed agli sviluppi successivi di questi concetti<sup>31</sup>).

I concetti del linguaggio, anche se elementari, non si collegano agli oggetti fisici, con relazioni referenziali, come nella comunicazione animale, ma si rapportano ad essi, secondo certe prospettive, capaci di dotare gli uomini di mezzi conoscitivi e/o opportuni poteri. Il nucleo semantico degli elementi del linguaggio, portatori di significato, è modulare ed organizzato in modo gerarchico. Precisi limiti fisici, architettonici e strutturali, condizionano tutti gli organismi viventi e la loro evoluzione; pertanto la natura e, con essa, il linguaggio non possono compiere scelte ottimali, ma solo cercare di rabberciare, alla meglio, materiali già esistenti, quasi rispondendo ad un impulso al bello. Infatti questo impulso elementare, comunque in un'ampia gamma di possibilità, è il criterio guida fino ad arrivare di fronte a domande penultime.

La prospettiva linguistica studia il linguaggio come suono, significato e struttura, essendo il pensiero solo una piccola agitazione del cervello, senza ricercare spiegazioni ultime (secondo i dettami della filosofia empirista). Infatti il linguaggio è una capacità umana che determina la natura intellettuale ed uno stimolo scatenante un grande balzo in avanti, nella linea evolutiva, rispetto alla comunicazione animale. Esso è differente dal chimismo comunicativo, pur efficiente, degli imenotteri (api, vespe e formiche), ha fondamento nella modifica della struttura dell'orecchio medio, tra rettili e mammiferi, ma trova la sua caratterizzazione materiale solo nel livello raggiunto dalla corteccia cerebrale umana. Infatti essa ha un grado di complessità superiore ad ogni altro animale, seppure dotato di una certa intelligenza<sup>32</sup>.

La tavola si contrappone al linguaggio, per la sua propria natura (che mette in gioco la visione e non la favella e l'udito, come per il linguaggio) e vicendevolmente lo completa, permettendo non solo la conoscenza dello spazio, comune a tutti gli animali anche ai meno evoluti (e forse anche alle piante, ad esempio, con il loro orientarsi spontaneamente verso la luce ed il sole), ma anche la sua concezione, compresa la coscienza dell'eventuale sua evoluzione nel tempo. La tavola è essenzialmente bidimensionale, in virtù della preponderanza della forza di gravità cui tutte le cose sono soggette, ma la sua naturale estensione, ove se ne ravvisi la necessità, è la modellazione 3D, certamente più capace di essere riempita dagli attributi delle entità che popolano la realtà.

---

<sup>30</sup> L'abduzione è un sillogismo con la premessa maggiore certa e la premessa minore solo probabile. Pertanto anche la conclusione è solo possibile, ad un determinato livello di significatività. Nota già nell'antichità, tra la fine dell'800 e l'inizio del '900, è sviluppata dai pragmatisti americani: Charles Sanders Peirce, William James e John Dewey. Negli anni '30 del '900, l'incontro del pragmatismo americano con il positivismo logico mitteleuropeo, a seguito della tragedia nazista, dà impulso alla filosofia analitica.

<sup>31</sup> Tra queste, particolarmente importanti sono gli ambiti gerarchici spazio-temporali, il concetto d'oggetto, le relazioni tra oggetti, la nozione di causa ed effetto, le proprietà gestaltiche, ecc.

<sup>32</sup> Tra i mammiferi: scimmie, carnivori, equini, gli elefanti, i delfini e le foche, e tra gli uccelli: i pappagalli, rapaci e corvidi.

A riguardo, un punto di svolta è il cambio di prospettiva nella concezione spazio-temporale, dovuta al passaggio tra lo spazio ed il tempo vuoti, da riempire rispettivamente con gli oggetti e gli eventi, e lo spazio ed il tempo pieni, perché costituiti proprio dagli oggetti e dagli eventi. In questo modo, diverso e vario diventa il punto di vista che non è più dall'esterno (come un comando divino, per ritornare nell'ambito della linguistica), ma entra nella rappresentazione, partecipandovi, giudicandola e modificandola. Il riferimento alla linguistica è pertinente e può essere esemplificato con la strutturazione del congiuntivo <sup>33</sup> subordinato (seppure tollerando qualche necessaria approssimazione, nel rigore filologico dell'esposizione tematica). Infatti si può avere la seguente sequenza evolutiva:

- congiuntivo isolato;
- congiuntivo ed indicativo;
- indicativo e congiuntivo;
- indicativo, particella e congiuntivo.

Sia fatta la luce (e la luce fu): è l'esempio classico di un congiuntivo isolato, usato a mo' d'imperativo (come noto, un modo verbale difettivo nelle persone, ad eccezione della seconda singolare e plurale). Aggiungere un indicativo, dopo il congiuntivo, serve a personalizzare l'ordine e/o il desiderio. Anteporre l'indicativo al congiuntivo, serve ad accennare ad una descrizione e/o un racconto che può prescindere dall'ordine e/o desiderio. Introdurre una particella dà struttura alla/o stessa/o descrizione e/o racconto. Pertanto proprio questa descrizione, se rappresentata, anziché narrata, dà vita ad una tavola (oppure ad una modellazione 3D) partecipata e non asettica, e questo racconto, se illustrato, anziché narrato, documenta l'evoluzione della tavola (o della modellazione 3D), aventi le stesse caratteristiche.

A tal fine, le moderne tecnologie dell'informazione sono particolarmente adatte ad animare davvero una rappresentazione, partecipata e non asettica, con la selezione delle entità d'interesse (e dei loro attributi) dai vari livelli archiviati. A sostegno di questa tesi, si possono citare gli ipertesti e la multimedialità che già permettono oggi di costruire finali di spettacoli, adattandoli alle circostanze. Né d'altra parte, deve stupire questa citazione ludica, in quanto le carte più antiche derivano dai racconti di girovaghi e cantastorie, nonché dai taccuini, pieni di leggende, degli esploratori. Solo l'avvento della scienza nuova ha reso asettica la rappresentazione, nell'ipotesi, allora fondata, di una conoscenza, indipendente dal punto di vista, dalle ragioni del suo compilatore e dalle esigenze di chi la utilizza.

Infatti le cosiddette scienze dure hanno definito una teoria della relatività, un principio d'indeterminazione ed un teorema d'indecidibilità (e la stessa matematica deve essere sottoposta a verifica, se interfacciata con la realtà). Tutto ciò non significa affatto cadere nello scetticismo assoluto, per quanto riguarda le scienze della natura, e nel nichilismo etico, per quanto riguarda le scienze umane, ma richiede di rimuovere le certezze assolute che pretendono di non avere punti di vista, di poter guardare dall'esterno e di conoscere le risposte ultime. Allora queste sono pretese d'onnipotenza, fasulle in ogni caso, e particolarmente ridicole in ambito geomatico, dove la realtà in esame cambia di continuo, a scale variamente definite e comunque sempre largamente arbitrarie, e dipende strettamente dalle azioni umane, quasi tutte governate dal libero arbitrio.

---

<sup>33</sup> Il congiuntivo è un modo verbale caratteristico della possibilità (e dell'irrealtà), dove la prima condizione è tipica di quasi tutta la realtà, ben lontana da certezze. Il congiuntivo è un po' in declino, ma questo attiene solo a sciattezza. Infatti è presente nelle lingue neolatine e slave, ma anche nelle lingue germaniche, seppure spesso in forme identiche all'infinito. A riguardo, si veda diffusamente: Viva il congiuntivo! Come e quando usarlo senza sbagliare, di Valeria Della Valle e Giuseppe Patota (Sperling & Kupfer, Milano, 2009).



Francisco Goya, Incendio, fuego de noche (Colección José Varez, San Sebastián)



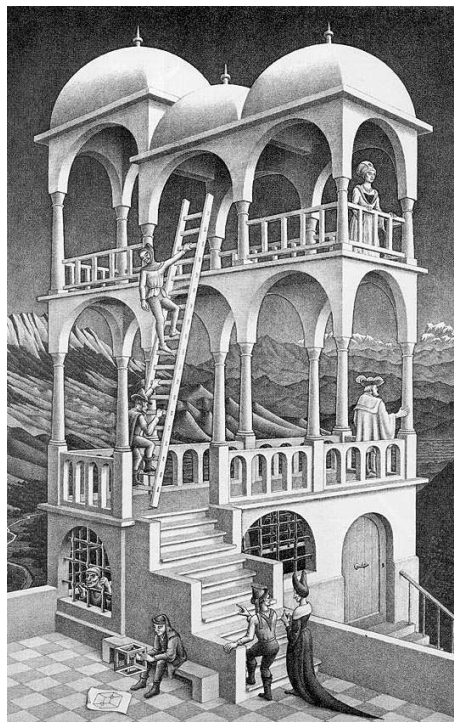
Francisco Goya, Il colosso (Acquatinta, Biblioteca Nazionale, Parigi)

Due immagini di Francisco José de Goya y Lucientes<sup>34</sup> illustrano bene tanto l'imprevedibile mutabilità della realtà, quanto i tanti condizionamenti del potere cui è e si è sottomessa/i. Infatti un incendio è un evento catastrofico, purtroppo non impossibile, né così raro, capace di modificare rapidamente e radicalmente la realtà interessata. D'altra parte, pur considerando spesso la realtà solo sonnacchiosa, la stessa non è affatto quella che appare direttamente, ma è certamente filtrata dagli occhiali dell'ideologia, ovvero da un qualche potere, palese o nascosto, facente sì che la realtà sia letta in certi modi. Tutto ciò deve invitare a pensare, descrivere e rappresentare la realtà, come parziale e plurima, senza arroganza ed anzi ben consci dei propri errori, nonché rispettosi della libertà degli altri, come fosse la propria.

<sup>34</sup> Goya è un pittore spagnolo, vissuto agli albori del romanticismo, capace d'anticipare i tempi a venire. Del resto, questa capacità è comune ad altri pittori che, come Goya, non possono essere ascritti ad una qualche scuola, ma le trascendono come, nel tardo medioevo, il pittore fiammingo Jeroen Anthoniszoon van Aken (detto Hieronymus Bosch) e, in epoca moderna, il pittore olandese Maurits Cornelis Escher, capace d'esprimere in forma artistica, ambiguità ed incertezze, altrimenti note in ambito matematico.



Hieronymus Bosch, *Ascesa all'Empireo* (Palazzo Grimani di Santa Maria Formosa, Venezia)



Maurits Cornelis Escher, *Belvedere*, 1961 (Rijksmuseum, Amsterdam)

### 3. I sistemi naturale e metrico – decimale

Relativismo non è il rifiuto di distinguere il bene dal male, ma l'atteggiamento di negare a tutte le credenze, comprese le proprie, il diritto di arrogarsi il monopolio della verità e della giustizia. Perché non c'è Logos che regga o spieghi il divenire, né una Legge che sovrasti ogni cosa; piuttosto c'è il gioco dell'evoluzione, rispetto al quale la ragione, o meglio, le ragioni sono prodotti contingenti. E' in questa contingenza che si radica la stessa libertà. Non si deve averne paura, né rimediare con una logica dell'essere (Giulio Giorello, Di nessuna chiesa – La libertà del laico).

Dal 1995, il Sistema Imperiale Britannico è convertito nel Sistema Consuetudinario Statunitense, a sua volta, derivato da più antiche misure di origine romana e medioevale. Nell'immediato prosieguo, si riportano le misure di lunghezza, peso e capacità, del sopraccitato sistema, con i loro equivalenti, alle unità precedenti e successive, e la conversione nel Sistema Internazionale, cosiddetto metrico-decimale, come ben noto, comunemente in uso, in tutti i paesi, al di fuori di quelli di lingua inglese.

Misure SCS	Equivalente SCS	Equivalente SI
<i>mil</i>	1/25 di linea	0,0254 mm
linea ( <i>line</i> )	1/4 di pollice o 25 linee	0,635 mm
pollice ( <i>inch</i> )	1/4 di mano o 4 linee	25,4 mm
palmo ( <i>hand</i> )	1/3 di piede o 0,4... spanne o 4 pollici	101,6 mm
spanna ( <i>span</i> )	1/2 di gomito o 2,25 palmi	228,6 mm
piede ( <i>foot</i> )	1/3 di iarda o 3 palmi	304,8 mm
gomito ( <i>cubit</i> )	1/2 di iarda o 2 spanne	0,4572 m
iarda ( <i>yard</i> )	1/2 di braccio o 2 gomiti o 3 piedi	0,9144 m
braccio ( <i>fathom</i> )	0,36... pertiche o 2 iarde	1,8288 m
pertica ( <i>rod, pole or perch</i> )	1/4 di catena o 2,75 braccia	5,0292 m
catena ( <i>chain</i> )	1/10 di stadio o 4 pertiche	20,1168 m
stadio ( <i>furlong</i> )	1/8 di miglio t. o 10 catene	201,168 m
miglio terrestre ( <i>statute mile</i> )	8 stadi	1609,344 m

Misure di lunghezza nel Sistema Consuetudinario Statunitense

Misura SCS	Equivalente SCS	Equivalente SI
grano ( <i>grain</i> )	1/7000 di libbra	~64,798 mg
dramma ( <i>dram</i> )	1/16 di oncia	~1,771845 g
onzia ( <i>ounce</i> )	1/16 di libbre o 16 dramme	~28,349523 g
libbra ( <i>pound</i> )	1/14 di <i>stone</i> 16 oncie	453,59237 g
<i>stone</i>	1/2 di <i>quarter</i> o 14 libbre	~6,35 kg
<i>quarter</i>	1/4 di <i>hundredweight</i> o 2 <i>stones</i>	~12,7 kg
<i>hundredweight</i>	1/20 di <i>long ton</i> o 4 <i>quarters</i>	~50,8 kg
<i>long ton</i>	20 <i>hundredweights</i>	1016,0 kg

#### Misure di peso nel Sistema Consuetudinario Statunitense

Misura SCS	Equivalente SCS	Equivalente SI
onzia liquida	1/5 <i>gill</i>	28,4 ml
<i>gill</i>	5 oncie liquide o 1/4 di pinta	142 ml
pinta ( <i>pint</i> )	4 <i>gill</i> o 1/2 di quarto	0,568 l
quarto ( <i>quart</i> )	1/4 gallone o 2 pinte	1,1364 l
gallone ( <i>gallon</i> <sup>35</sup> )	4 quarti	4,546 l

#### Misure di capacità nel Sistema Consuetudinario Statunitense

Resta da osservare come i sistemi più antichi facciano riferimento ad unità naturali, mentre quelli più moderni ad unità scientifiche. Così il Sistema Imperiale Britannico ha come riferimento delle unità lineari, parti del corpo umano e, in particolare, la linea (del piede). Invece l'unità di peso è il grano, preso al centro di una spiga, ed una oncia liquida d'acqua pesa esattamente un'oncia, in opportune condizioni di pressione e temperatura <sup>36</sup>. Come noto, il metro è supposto la 40 milionesima parte del meridiano terrestre, il decimetro cubo (dove il decimetro è la decima parte del metro) ha capacità di un litro ed un litro d'acqua pesa

<sup>35</sup> Il gallone, né altre unità minori, non hanno invece una corrispondenza con numeri interi di cubi di unità di lunghezza, derivando invece (soprattutto il gallone) da misure di capacità della comune vita contadina, riferite al foraggio, all'orzo, alla birra, ecc.

<sup>36</sup> Le tabelle soprastanti e qualche informazione, riportata nel testo, sono riprese da Wikipedia, l'Enciclopedia Libera (relativamente alle voci: Sistema Imperiale Britannico e Metro (campione)) e, nello stile degli autori, opportunamente adattate al testo presente.

esattamente un chilo, in opportune condizioni di pressione e temperatura (oggi il metro è definito come la distanza percorsa dalla luce, nel vuoto, in un intervallo di tempo pari a  $1/299792458$  di secondo).

Altrettanto interessante è poi lo studio delle conversioni, a suo tempo, avvenute nel cosiddetto sistema metrico-decimale. Infatti nel 18° secolo, il sistema di misura adottato dalla scienza ufficiale è nelle unità di misura parigine:

1 linea del piede di Parigi	0,002256 m
1 pollice = 12 linee	0,02707 m
1 piede = 12 pollici	0,32484 m
1 tesa = 6 piedi	1,949036331 m

dove l'unità di misura campione è la tesa. L'Accademia Francese delle Scienze analizza, a partire dal 1790, l'opportunità d'istituire un sistema unificato, basato su progressione decimale. Una Commissione, appositamente costituita, presieduta da Pierre-Simon Laplace e Jean-Charles de Borda<sup>37</sup>, stabilisce quale unità fondamentale di misura il metro, cioè la lunghezza della 40 milionesima parte del meridiano terrestre. Il 21 marzo 1791, l'Assemblea Nazionale approva quanto stabilito dalla Commissione. Nel 1792, a tal fine si dà inizio, ad opera di Jean-Baptiste Delambre e Pierre François André Méchain, d'un arco di meridiano fra Dankerque e Barcelona. Nel 1799, terminate misure e calcoli, un'apposita legge stabilisce l'adozione del sistema metrico-decimale<sup>38</sup>.

Nel 19° secolo, il sistema di misura soffre per il lungo periodo, necessario alla conversione. Infatti accanto alle vecchie misure francesi, per tutte le altre, non richiedenti alta precisione, sono usate unità di misura locali<sup>39</sup>. L'uso di queste ultime continua normalmente; pertanto una grande commistione s'ingenera tra esse. Proprio da qui, si presenta il problema del giro d'operazioni necessarie, date le disponibilità dei diversi istituti scientifici di campioni di differente provenienza, perché i rapporti di conversione siano definiti univocamente. Tutto ciò impone una notevole mole di calcoli; ad esempio, a Milano, la questione si protrae dalla Commissione dei Pesi e delle Misure del 1800, presieduta da Barnaba Oriani, alle operazioni compiute da Francesco Carlini, ancora al lavoro nel 1858.

Infatti il problema della conversione di dati nel sistema metrico-decimale, stante la mancanza di moderni mezzi di calcolo, è un problema centrale nella metrologia, nelle scienze applicate e nelle tecniche del primo ottocento. Così per determinare la lunghezza della base di taratura di tre campioni principali, il Carlini fa ricorso al metodo delle frazioni continue ascendenti. Con esso, è possibile approssimare un numero decimale qualsiasi con una frazione cosicché, noti alcuni rapporti fra i campioni (1 tesa = 1.9486703 metri

<sup>37</sup> Tra i membri di questa Commissione siedono Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marchese di Condorcet, Joseph-Louis Lagrange e Gaspard Monge.

<sup>38</sup> L'unità di misura diviene il metro (0,513074074 tese), costituito da una barra in platino, conservata negli archivi internazionali di Sevres.

<sup>39</sup> Tra le unità di misura locali, a Milano, si usano: once, piedi, trabucchi, braccia e miglia (di Lombardia), con le seguenti relazioni:

1 piede = 12 once	0,435185 m	1 braccio	0,594936 m
1 trabucco = 6 piedi			
1 miglio = 3000 braccia	1784,809344 m		

A riguardo, è interessante notare come la Base del Ticino, rilevata dagli astronomi di Brera, già nella sua prima determinazione, sia misurata con pertiche multiple della tesa parigina e non in unità locali.

ed 1 klafter = 1.8962568 metri), si possa trovare un numero, non troppo grande, né troppo piccolo, intero di metri cui corrispondano numeri approssimativamente interi di tese e di klafter. Le frazioni cercate hanno a numeratore i numeri interi di tese e di klafter ed a denominatore quello comune di metri.

Per costruire queste frazioni continue ascendenti, si parte dai quozienti fra valori interi inferiori dei rapporti già noti: per entrambi:  $1/1$ , formando successivi quozienti inizialmente con la legge:  $(2n - 1)/n$ . Le frazioni che così si trovano approssimano via, via i rapporti dati fino ad un determinato valore di  $n$ ; dopodiché divergono. Di conseguenza, occorre raffinare la legge di formazione delle frazioni. Proprio il metodo delle frazioni continue ascendenti che permette di sottrarre ai numeratori parti intere positive al crescere opportuno di  $n$ , corregge la divergenza delle frazioni costruite con la legge iniziale semplice<sup>40</sup>. Pertanto dalla lettura delle frazioni, citate dal Carlini, si sono ricostruite le seguenti frazioni continue ascendenti rispettivamente per il rapporto tesa / metro ed il rapporto klafter / metro:

$$\frac{2n - 1 - \left[ \frac{n - 20 - K}{19} \right]}{n} \quad \text{essendo:} \quad K = \frac{n - 58}{39}$$

$$\frac{2n - 1 - \left[ \frac{n - 10 - K}{9} \right]}{n} \quad \text{essendo:} \quad K = \frac{n - 19 - \left[ \frac{n - 29 - H}{19} \right]}{10}$$

$$H = \frac{n - 48}{29}$$

Il Carlini giustamente osserva che le leggi iniziali semplici valgono per entrambe solo fino a:  $n = 19$ , valore che considera troppo piccolo per una base di taratura. Infatti l'utilizzo di un campione così tarato sulla base geodetica di Somma, lunga circa 270 volte questa base di taratura, comporta un notevole esaltarsi degli errori propri della taratura del campione. Allora il Carlini sceglie di costruire additivamente una frazione a partire da una coppia di frazioni continue ascendenti, esprimenti il rapporto tesa/metro:

$$\frac{2 \times 17 - 1}{17} + \frac{2 \times 19 - 1}{19} = \frac{33 + 37}{17 + 19} = \frac{70}{36}$$

in modo che il numeratore risulti uguale ed il denominatore prossimo a quelli di una frazione continua ascendente esprimente il rapporto klafter / metro:

$$\frac{2 \times 37 - 1 - \left[ \frac{37 - 10}{9} \right]}{37} = \frac{74 - 1 - \left[ \frac{27}{9} \right]}{37} = \frac{70}{37}$$

La costruzione additiva si fonda sull'osservazione che la somma di due frazioni, aventi quasi lo stesso denominatore, può essere approssimata dal doppio della somma dei numeratori e dei denominatori:

<sup>40</sup> Applicando un numero conveniente di volte questo metodo, si hanno frazioni che ritrovano i rapporti dati, con la precisione desiderata.

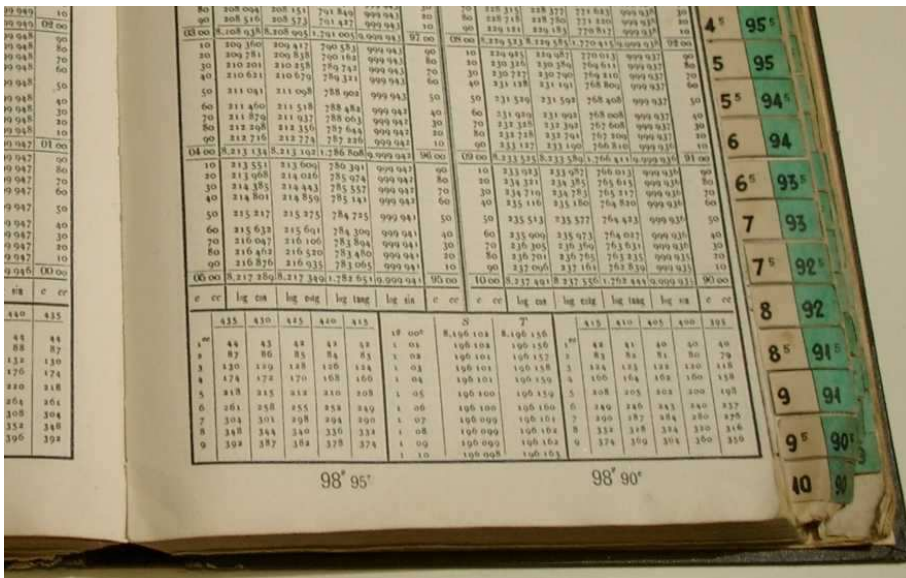
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \stackrel{se\ b=d}{\cong} \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} = 2 \frac{a+c}{2b} \stackrel{se\ b=d}{\cong} 2 \frac{a+c}{b+d}$$

Ad esempio, con le frazioni del rapporto tesa / metro, si ha:

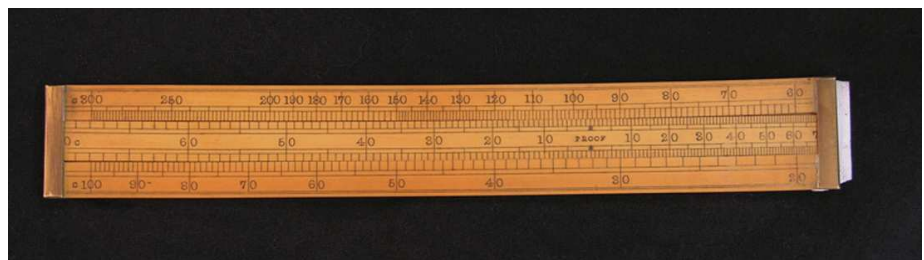
$$\frac{1}{2} \left( \frac{33}{17} + \frac{37}{19} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1256}{329} \right) = 1.94427$$

$$\frac{33 + 37}{17 + 19} = \frac{70}{36} = 1.94444$$

Questo calcolo consente di trovare un numero ben approssimato, non troppo piccolo e pertanto impreciso, ma neppure troppo grande, perché complica inutilmente le operazioni di taratura <sup>41</sup>.



Tavole logaritmiche e trigonometriche



Regolo calcolatore

La speranza pervade lo spirito dell'utopia; sperare vuol dire sapere che dietro ad ogni realtà esistono potenzialità concrete, altrettanto reali, che premono per realizzarsi. La speranza è sempre rivoluzionaria, perché si rifiuta d'ammettere che il presente (una situazione esistenziale, come un sistema politico e sociale)

<sup>41</sup> A riguardo, si rammenti bene che fino alla comparsa, nel primo '900, di macchine calcolatrici capaci di eseguire anche moltiplicazioni e divisioni, il calcolo di queste, quando non fatto con un regolo calcolatore (in modo speditivo e giocoforza approssimato), richiede l'uso di tavole logaritmiche, provviste di parecchie cifre decimali, l'addizione o la sottrazione dei logaritmi letti, rispettivamente per una moltiplicazione od una divisione, e la lettura a rovescio delle stesse tavole logaritmiche, per ottenere il prodotto od il quoziente cercati.

sia immutabile e non lo scambia per l'eterno, bensì mira a creare un altro mondo, un nuovo stato di cose, un altro uomo. Un uomo, con la pienezza delle proprie possibilità, riconciliato anche con la natura che, così spesso, le società e le persone reprimono in se stesse (ripreso da Ernst Bloch, *Lo spirito dell'utopia*).

Le conversioni tra sistemi di misura si collegano a tutte le operazioni di misura che servono a determinare la forma della figura della Terra e giù, giù fino alla descrizione metrica degli oggetti più piccoli. In questo contesto, prima della nascita secentesca della scienza nuova, l'antica arte della misura della Terra, nota come agrimensura, è certamente collegata ad altre arti della misura, effettuate con tecniche differenti. Tra queste, particolarmente rilevante è la professione dei cambiavalute<sup>42</sup>. A riguardo e, per estensione, anche verso l'arte della misura della Terra, non si può proprio dire che anticamente sia notevole la considerazione positiva verso tutte queste tecniche. Infatti ad esempio, Dante Alighieri colloca i barattieri, insieme ad altri malversatori, nella quinta bolgia dell'ottavo cerchio, nell'Inferno della Divina Commedia.

Poi fui famiglia ...:  
quivi mi misi a far baratteria;  
di ch'io rendo ragione in questo caldo.

...

Danar si tolse, e lascioli di piano,  
sì com'è dice; e ne li altri uffici anche  
barattier fu non picciol, ma sovrano.

(Dante Alighieri, *Divina Commedia*, Inferno, canto 22, vv. 52-54 85-87).



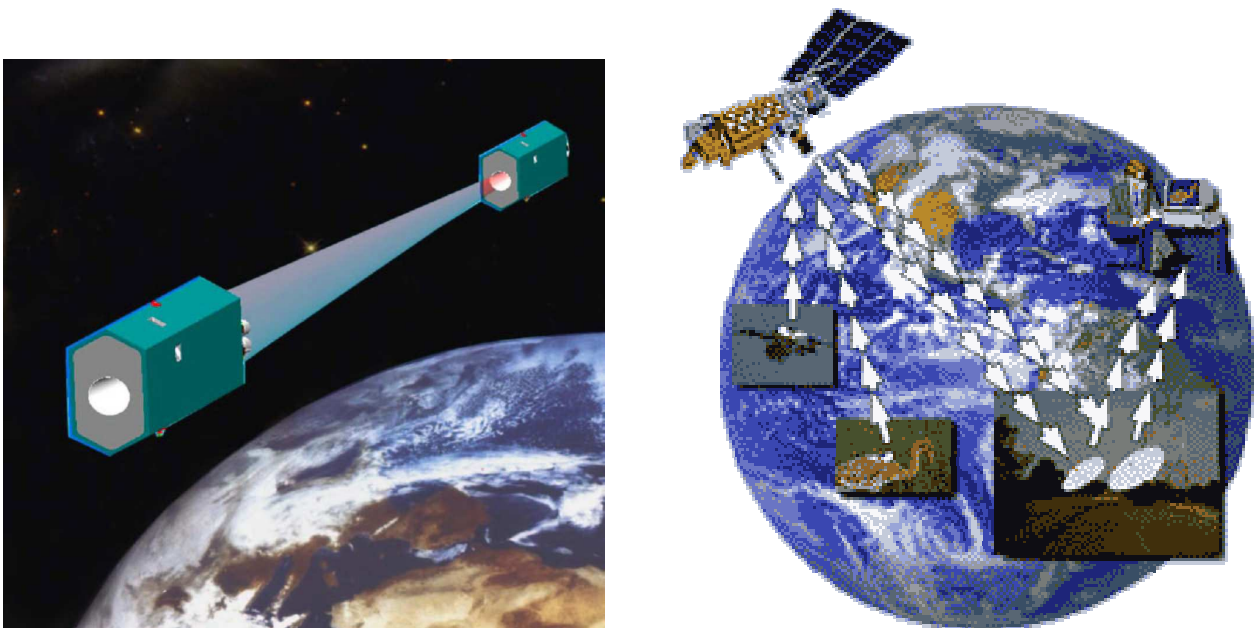
Andrea di Bonaiuto, *Diavoli medioevali*  
(dettaglio degli affreschi nel Cappellone degli Spagnoli in Santa Maria Novella, Firenze)

L'uguaglianza non è un fatto o un dato naturale. Ogni individuo è diverso, come diverso è il suo modo di vivere, pensare ed amare. L'uguaglianza è un progetto ed un ideale in marcia con persone e popoli, per rivendicare dignità, personale e collettiva, e poter vivere la diversità propria di ciascuno di loro. Rovesciare gli ordini gerarchici è portare la legge a fare non l'interesse dei potenti, ma l'espressione e la norma di una società di persone, per stare insieme secondo un patto di civile uguaglianza. L'aggettivo civile intende proprio sottolineare il non – essere di derivazione naturale dell'uguaglianza. Da qui, la principale differenza attuale tra sinistra e destra: lavorare per rimuovere gli ostacoli presenti alla promozione ed al sostegno dell'uguaglianza, oppure no (liberamente ripreso da Norberto Bobbio, *Destra e sinistra – Ragioni e significati di una distinzione politica*).

<sup>42</sup> Nessuno scandalo per questo accostamento tra tecniche differenti, seppur di diverso valore. Del resto, anche la scienza origina da commistioni, non proprio eccelse, con l'astrologia, l'alchimia, la magia ed altre scienze occulte. E' invece il suo successo, assieme al successo delle tecniche collegate, a liberarle da vecchi e disdicevoli retaggi. Tuttavia l'attuale predominio acefalo della tecnica, dove la scienza sembra essere viepiù asservita, corre il grave pericolo di costituire un'altra forma di superstizione.

#### 4. Novità geomatiche

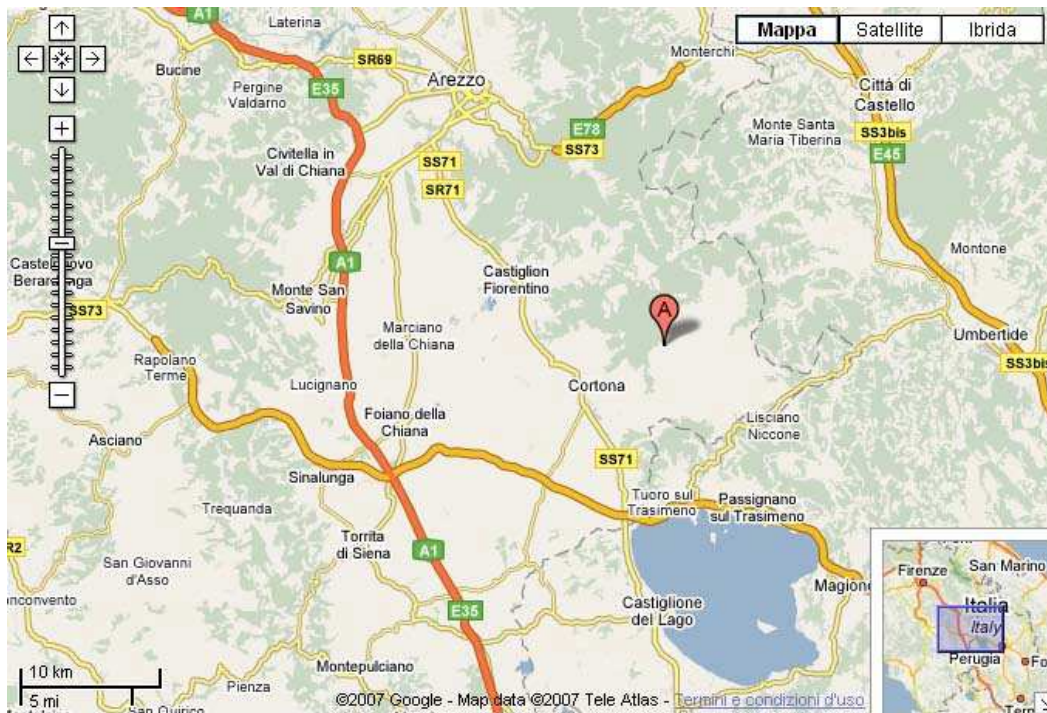
La futurologia non è una scienza; pertanto invece di dire quello che potrebbe forse accadere in futuro, è meglio segnalare alcune evenienze che, in futuro, potranno essere confermate, oppure cadere rapidamente in disuso. A riguardo, l'esempio del video-telefono e dello scanner è ampiamente significativo. Infatti tutti e due discendono dalla tecnologia televisiva, ma a fronte di un presunto successo del primo, si è registrato un vero e proprio boom del secondo. Allora molte sono le evenienze attuali, anche se a ben diversi livelli di maturazione ed impatto, e coinvolgono tutte le discipline del rilevamento dalla geodesia dei satelliti, ad esempio, con il Satellite to satellite tracking, alla galassia delle immagini, fornite dal telerilevamento e dalla fotogrammetria dallo spazio, in primis oggigiorno, con Google Earth.



Satellite to satellite tracking

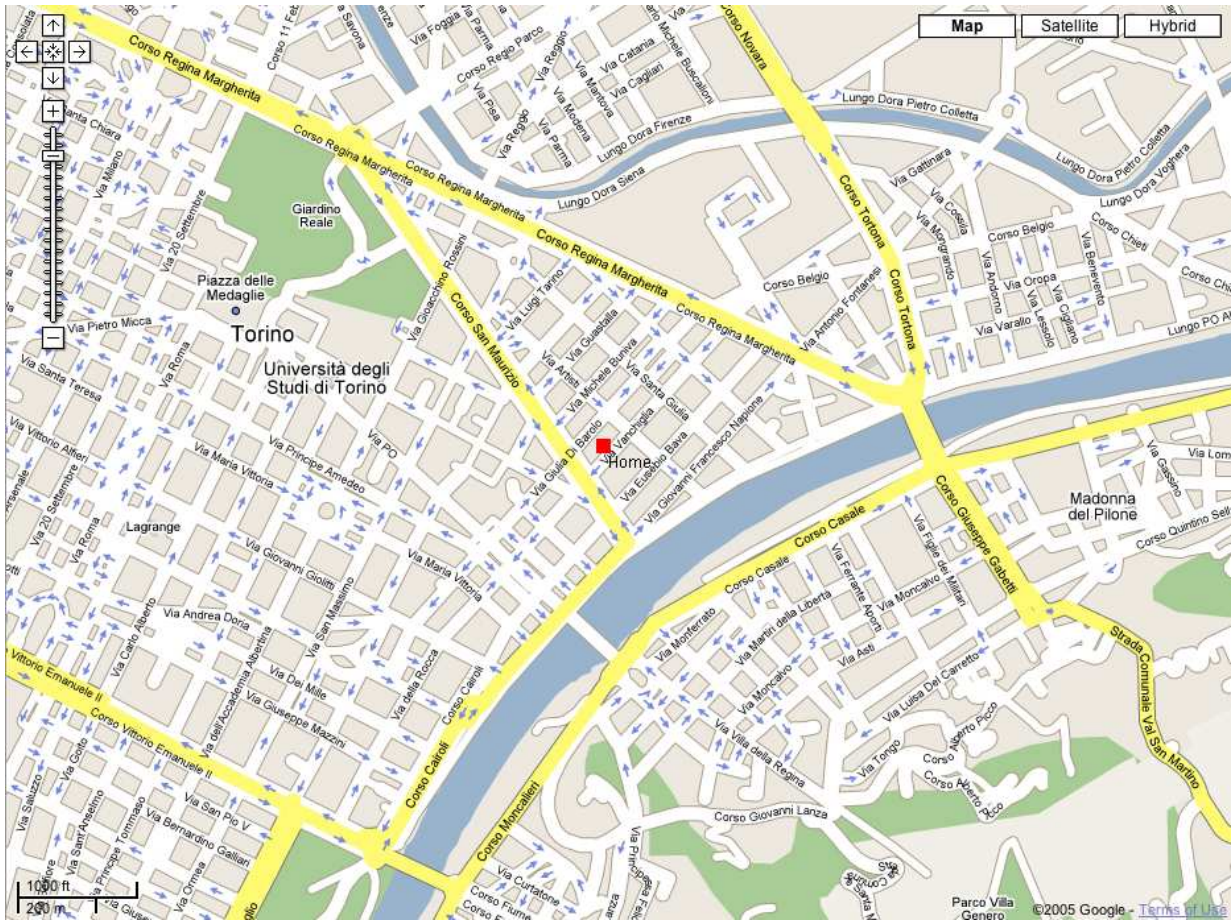


Google earth



Un'altra evenienza importantissima, di grande attualità, è costituita da Google Maps che, a differenti livelli di dettaglio, permette di visualizzare informazioni cartografiche, raccolte sempre in forma digitale, se del caso, integrandole con immagini acquisite da Google Earth. Del resto, come noto, i prodotti cartografici, veri e propri, sono largamente intercambiabili con i prodotti foto-cartografici. Per tutti questi prodotti, se come spesso accade, non si raggiungono le consuete accuratezza, precisione ed affidabilità, tipiche delle discipline del rilevamento (ovvero: errori relativi di  $10^{-6}$  nel posizionamento di punti e di  $10^{-5}$  nelle

rappresentazioni cartografiche), compito specifico delle discipline del rilevamento è stabilire comunque l'accuratezza, precisione ed affidabilità raggiunte dai vari prodotti in uso.

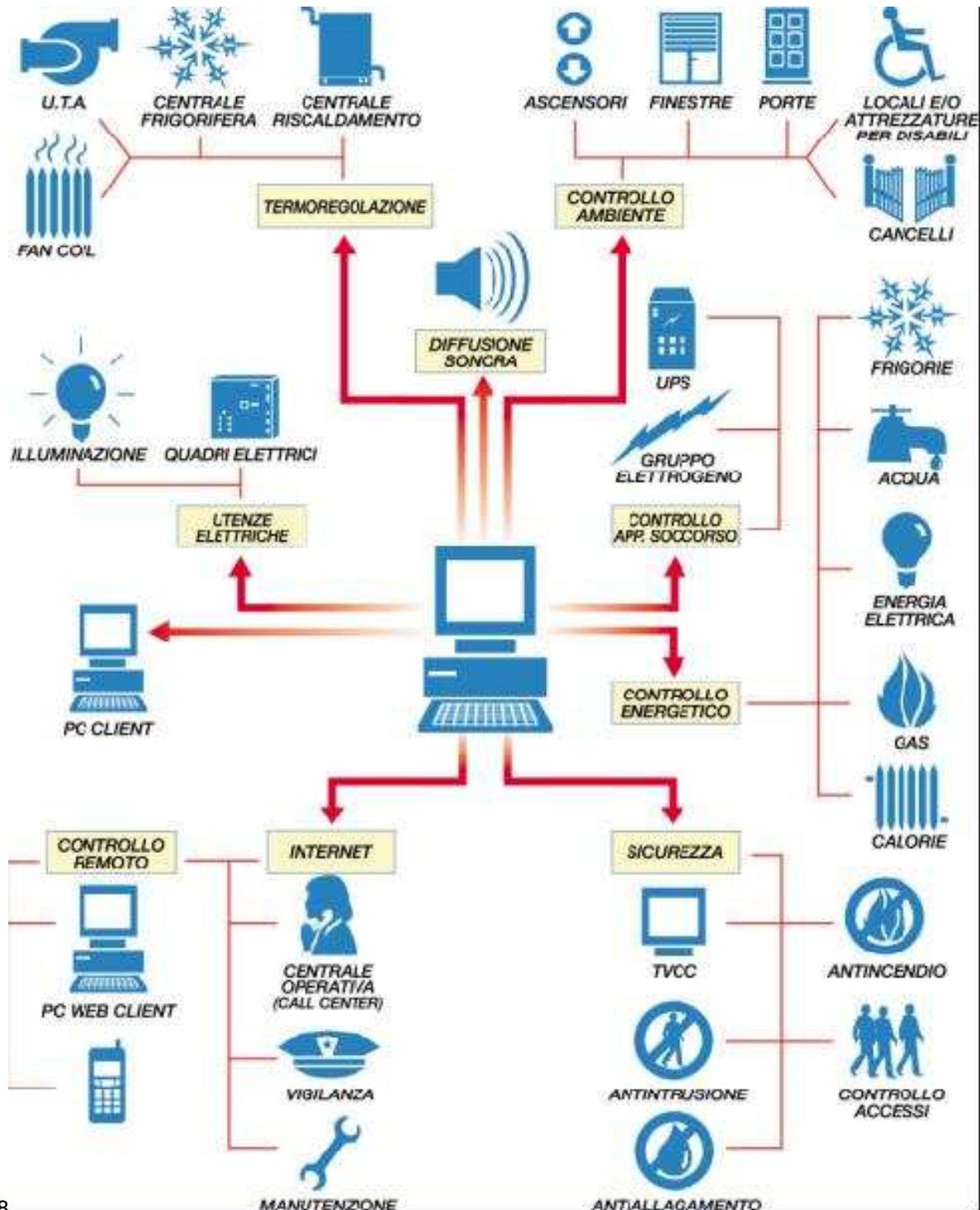


Google Maps (differenti livelli di dettaglio)



Video – sorveglianza

Scendendo dal cielo sulla terra, la “poesia” non viene meno e, passando da qualche espressione amena a considerazioni tecniche, gli ormai onni-presenti sistemi di video-sorveglianza, come pure tutte le molteplici dotazioni accessorie per domotica e quelle, altrettanto in uso, per la robotica, soprattutto industriale, sono una realtà attualissima. Infatti essi vanno a sostituire non solo la topografia classica e la fotogrammetria terrestre, ma si interfacciano anche con innumerevoli servo-meccanismi, impiegati per gli usi più svariati in ambito civile ed industriale. Ancora una volta, accuratezza, precisione ed affidabilità devono assolutamente essere precisate, perché indissolubilmente legate alle necessità di riservatezza e/o sicurezza cui la video-sorveglianza, come pure la domotica e la robotica sono sottoposte.

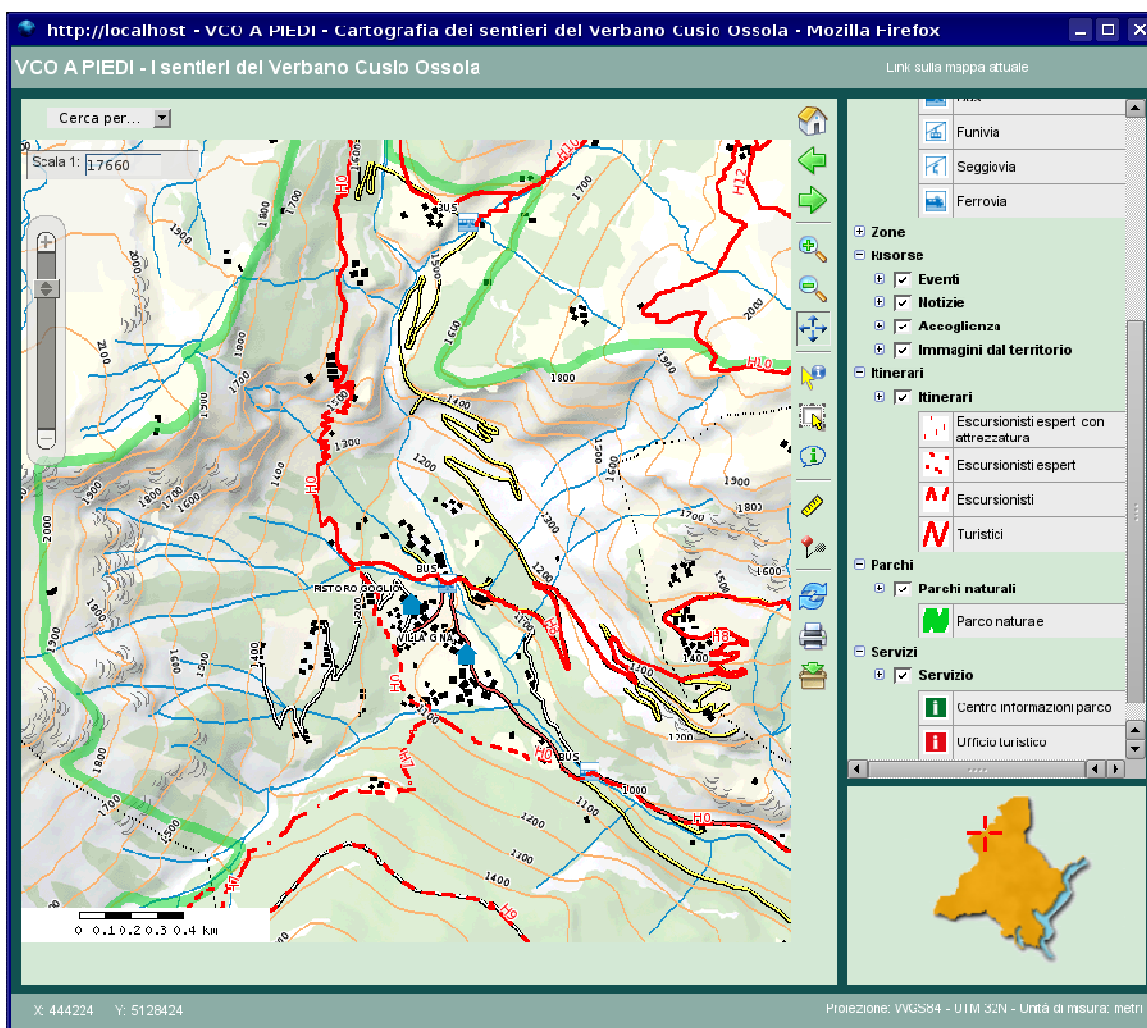
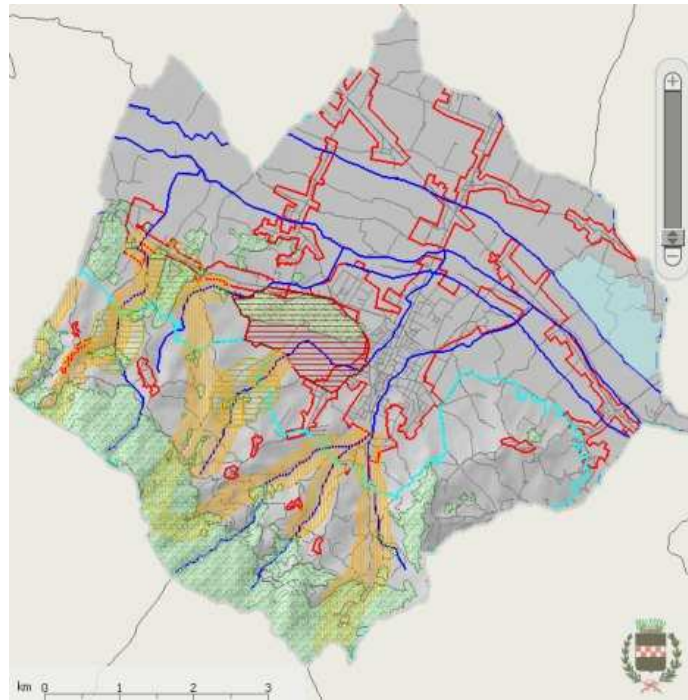




Robotica e domotica

Web GIS è forse l'ultima evenienza, in ordine di tempo, anche se la rete ha ormai origini lontane. Infatti nel 1969, lo stesso anno del primo sbarco sulla luna, due computer sono stati collegati tra loro, per la prima volta. Più antiche ancora sono la telefonia e la telegrafia che hanno antenati celebri nei segnali di fumo e nel telegrafo ottico, e hanno fornito le basi tecnologiche per realizzare i collegamenti via cavo. Il successivo collegamento Wi-Fi discende invece dalla radiofonia e dalla comunicazione televisiva, ampiamente collaudate comunque, seppure più tarde. Allora il Web fa scomparire, entro certi limiti, alcune barriere di spazio e di tempo, connettendo tutto e tutti: la moltiplicazione dell'informazione disponibile è esplosiva, il rischio della babele sempre possibile, ma le potenzialità certamente altrettanto grandi.





### Web GIS <sup>43</sup>

<sup>43</sup> Un esempio importante di Web GIS è il GeoPost svizzero che, a partire dalle conoscenze dettagliate degli addetti alla distribuzione della posta, certificate dai vigili urbani, permette di mettere in rete informazioni, sempre aggiornate, inerenti dati spaziali dinamici.

## 5. Novità nel trattamento delle osservazioni

Nel corso della seconda metà del '900, due rivoluzioni tecnologiche, la conquista dello spazio e l'avvento delle tecnologie dell'informazione, hanno profondamente innovato le scienze geodetiche e cartografiche, per quanto riguarda tanto il rilevamento dei dati di misura, quanto il trattamento delle osservazioni, fino alle modalità di archiviazione, visualizzazione e rappresentazione grafica. Allora la geomatica non è una nuova disciplina, ma un coacervo di tutte le discipline del rilevamento, ripensate alla luce dei cambiamenti avvenuti, in atto ed ancora in evoluzione. In questo nuovo contesto, è da sottolineare il sopracitato superamento, almeno parziale, dei limiti di spazio e tempo, potendosi muovere in essi, a diverse scale (spaziali) e/o con una diversa grana temporale di risoluzione, grazie alle potenzialità della realtà virtuale.

Un altro punto d'arrivo è l'abbandono della rappresentazione su una tavola piana, costituita dalla mappa o carta, tipica della cartografia tradizionale, per l'adozione di rappresentazioni 3D. Tutto ciò è vero non solo negli spazi ristretti, dove l'estensione della terza dimensione è comparabile con quella delle altre due, ma anche globalmente dove l'intera superficie terrestre ha centro in ogni luogo e nessuna frontiera (come la sfera, l'ellissoide, ecc.). Queste considerazioni portano l'utente dentro la rappresentazione, rendendolo non più semplice spettatore. Allora anche tutte le qualità d'interesse devono riempire lo spazio, perché proprio queste qualità costituiscono lo spazio stesso, mentre gli arcinoti sette livelli convenzionali <sup>44</sup> della cartografia tradizionale sono completamente asettici.

Fare un elenco completo di metodologie e procedure del trattamento delle osservazioni, rilevanti in futuro, è un'operazione azzardata. Molto più corretto e produttivo è indicare alcune evenienze (elencate di seguito), già oggi, foriere di novità interessanti. Infatti il trattamento delle osservazioni, essendo una branca della matematica applicata, offre strumenti di lavoro per il lungo periodo. Tuttavia proprio le innovazioni tecnologiche portano a preferire uno o l'altro di questi strumenti, in quanto meglio s'adatta alle esigenze della modellazione dei dati. Del resto, è noto il differenziarsi del trattamento delle osservazioni, tra scienze della terra, interessate a modellare la struttura di dati geometrici e/o fisici, e scienze/tecnologie dell'informazione, rivolte invece a riconoscere il pattern di dati d'altra natura (spesso solo qualitativi).

- ❑ Clustering e grafi sono tecniche della matematica discreta, adatte a comprimere grandi masse di dati, tipiche di acquisizioni digitali, specialmente se in continuo, come pure a costruire spiegazioni preliminari che, nel caso di dati qualitativi, possono essere le uniche possibili.
- ❑ Co-kriging universale <sup>45</sup> è una metodologia statistica capace di separare segnali (comprendendo in essi anche modelli deterministici) da un rumore (residuo), collegando tra loro dati anche eterogenei, purché aventi in comune un certo dominio spaziale e/o temporale, ed avendo stabilito certi gruppi d'invarianza delle norme adottate al loro interno.
- ❑ Processing paralleli e sequenziali (per quanto le potenzialità dei computer siano divenute straordinarie) forniscono gli algoritmi per l'elaborazione di enormi masse di dati, come si addice per il trattamento delle osservazioni rigoroso, di grandi progetti la cui dimensione è davvero molto grande.
- ❑ Inferenza bayesiana o sequenziale <sup>46</sup> fornisce i test per il confronto d'ipotesi, il collaudo ed il controllo, inerenti dati acquisiti ed elaborazioni successive, avendo la capacità di superare le rigidità imposte dell'inferenza classica.

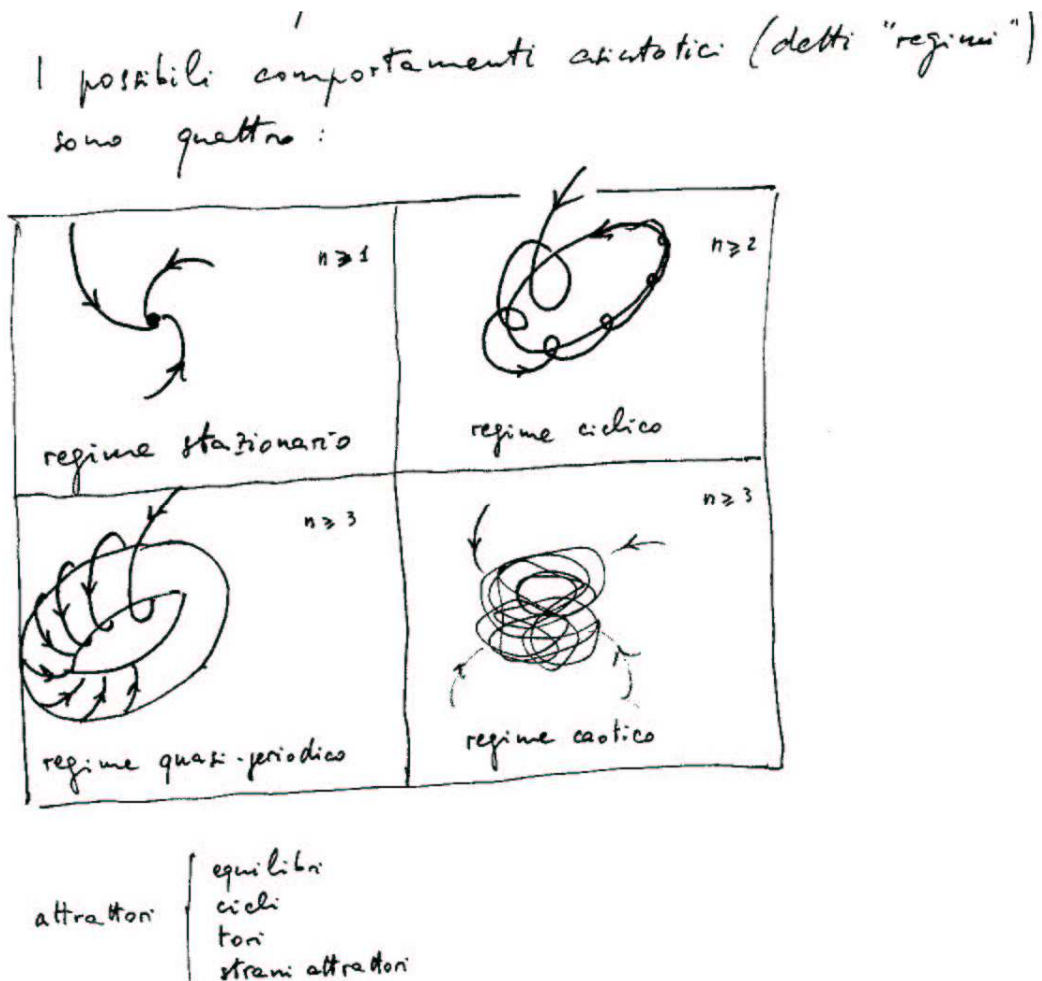
---

<sup>44</sup> Orografia, idrografia, pedologia, insediamenti urbani, sistemi di mobilità e trasporto, limiti amministrativi e toponomastica.

<sup>45</sup> Il co-kriging universale, benché più famoso e diffuso, insieme al kriging da cui deriva, non è dissimile dalla collocazione con parametri.

<sup>46</sup> Le due varianti sono differenti per ipotesi e struttura, ma egualmente adatte ad eseguire i test richiesti nei casi specifici.

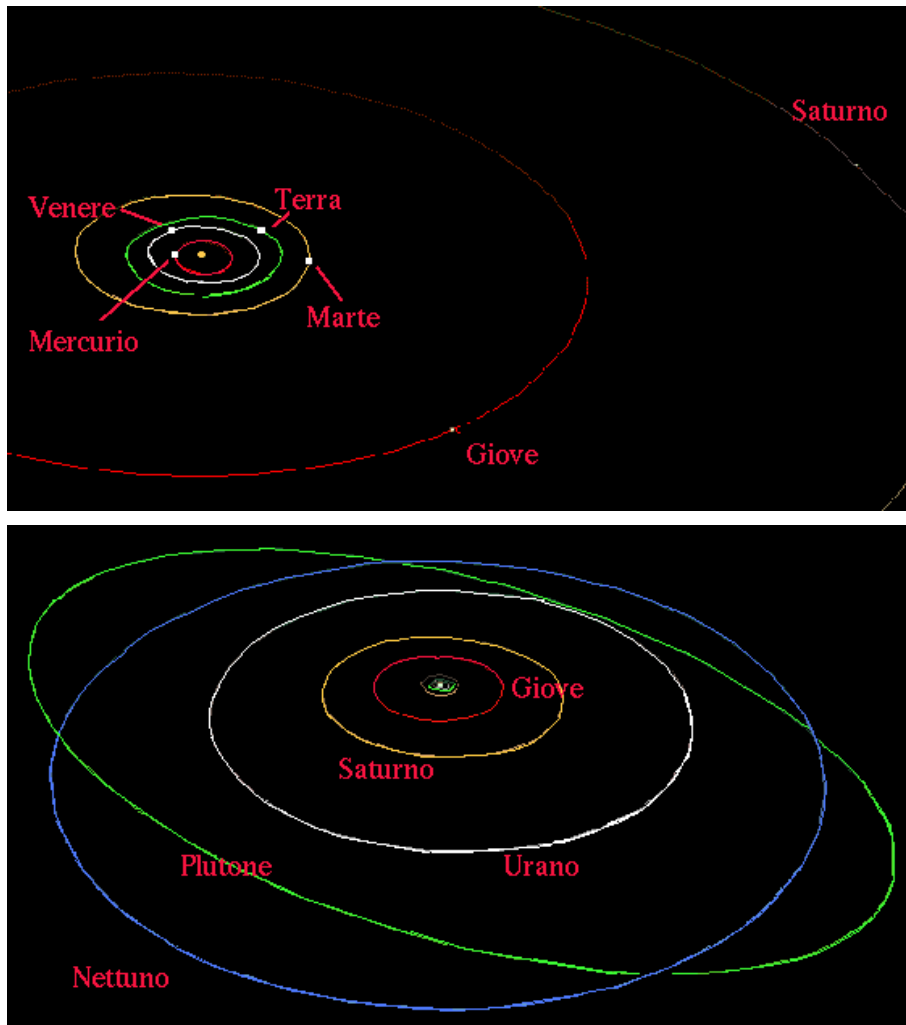
Un esempio eloquente di un nuovo modo di studiare e modellare una realtà, presa in considerazione, è derivato da un'interessante lezione accademica<sup>47</sup>. Essa verte sul possibile comportamento asintotico (detto regime) dei sistemi dinamici, di cui è riportato uno stralcio autografo nella figura sottostante. Infatti dato un numero di componenti via, via crescente, il comportamento asintotico risulta, volta a volta, ben diverso, passando da una semplice condizione d'equilibrio, per un regime stazionario, ad una meno semplice condizione a cicli, in un regime ciclico. Dopodichè i casi più complessi, presentano una condizione toroidale, in un regime quasi periodico, ed una imprevedibile condizione costituita da strani attrattori, per un regime cosiddetto caotico.



Un'applicazione diretta di questa teoria è nella geodesia dei satelliti, dove il sole è in una condizione d'equilibrio (anche se solo relativo, considerandolo nella galassia Via Lattea), un sistema a due corpi (come il sole ed un pianeta, senza satelliti, ad esempio, Mercurio o Venere) segue un regime ciclico, in accordo con le leggi di Keplero. Invece il problema dei tre corpi (come il sole, la terra e la luna) è ben più complesso, la sua soluzione è dovuta a Jules Henri Poincaré e presenta un regime quasi periodico. Infine un sistema a quattro corpi presenta un regime caotico; nel sistema solare non esistono satelliti di satelliti (almeno naturali e quelli artificiali hanno vita troppo breve ed altresì sono regolati, a bordo e/o da terra), eppure due satelliti di Saturno: Epimeteo e Janus, si scambiano (caoticamente) l'orbita ogni quattro anni.

<sup>47</sup> Questa lezione è stata tenuta da Sergio Rinaldi, professore ordinario di Teoria dei Sistemi al Politecnico di Milano, a conclusione della sua lunga e brillante carriera accademica, il 15 dicembre 2010, al Politecnico di Milano.

Più in generale, gli astronomi e, in particolare, i planetologi mettono in evidenza che l'intero sistema solare, non è stabile, in tempi astronomicamente significativi, ovvero per periodi dell'ordine di alcune decine di migliaia di anni. Infatti è stabile, con la sua nota evoluzione quasi periodica, il sistema composto dai tre corpi maggiori, ovvero il sole ed i due pianeti più grandi: Giove e Saturno. Al contrario, non è stabile, ma caotico (ed imprevedibile), un eventuale sistema composto da quattro corpi, ovvero oltre ad i tre precedenti, una possibile perturbazione inattesa (ad esempio, una cometa od un altro corpo estraneo). L'accadere di questo evento può comportare un totale cambiamento delle orbite (da cui la suddetta situazione caotica), con conseguenze certamente non favorevoli per la Terra, per la vita e per i destini dell'umanità.



A mo' di commento conclusivo, resta da osservare, come i sistemi a più di tre componenti (a partire da quattro) siano comuni, in moltissimi ambienti fisici e/o contesti sociali. Pertanto invece di regimi stabili, ciclici o quasi periodici, i regimi caotici (ed imprevedibili) sono i più comuni e, come tali, devono essere affrontati e governati. Tutto ciò ha una notevole rilevanza, nell'elaborazione, analisi ed interpretazione di fenomeni, fatti ed eventi georeferenziati (o comunque a referenza spaziale e, in ogni caso, spazio varianti), per insiemi di dati dinamici (ovvero tempo varianti). Il trattamento delle osservazioni <sup>48</sup>, con la modellazione matematica discreta, offerta da cluster e grafi, e/o l'interpolazione/approssimazione statistica, tramite co-kriging (o collocazione con parametri), rispondono positivamente alle bisogna.

<sup>48</sup> Il trattamento delle osservazioni è necessario in assenza di modelli matematici, derivati dalla fisica e/o dalla geometria dei problemi.

## 6. Estensioni di Matematica applicata

La matematica applicata è più ampia del trattamento delle osservazioni e non copre solo il campo della statistica, muovendosi dall'analisi dei dati alla statistica computazionale. Infatti sebbene storicamente la matematica applicata sia stata soprattutto trattamento delle osservazioni, la stessa matematica applicata comprende ormai tecniche ed applicazioni provenienti dall'analisi matematica, dall'algebra (soprattutto lineare) e dalla/e geometria/e (euclidea e riemanniana). Tutto ciò può portare ad un interessante binomio matematica applicata – trattamento delle osservazioni, comprendendo in esso tecniche ed applicazioni, finora considerate estranee, quando queste siano di notevole utilità, per le sopraccitate analisi dei dati e statistica computazionale.

Archimede sarà ancora ricordato, quando Eschilo sarà già stato dimenticato, perché le lingue muoiono, ma le idee matematiche no; immortalità è forse una parola ingenua ma, qualunque cosa essa significhi, un matematico ha le migliori probabilità di conseguirla (Godfrey Harold Hardy).



Domenico Fetti <sup>49</sup>, Archimede (Gemäldegalerie Alte Meister, Dresda)

Così ad esempio noti teoremi di analisi matematica, quali quelli di Stokes o della circuitazione e di Gauss – Green della divergenza <sup>50</sup>, da sempre, sono applicati nell'ambito alto della geodesia fisica e matematica (anzi proprio i nomi, loro attribuiti, di matematici, astronomi e/o geodeti, possono far ascrivere alla geodesia almeno parte del merito della loro formulazione). Tuttavia la loro completa attuale validità fa sì che gli stessi teoremi abbiano un loro utilizzo nella definizione di operatori differenziali, quali quelli comunemente in uso nell'analisi d'immagini (nonché di scene e sequenze d'immagini e scene) e, benché ancora non molto spinta, da un punto di vista strettamente matematico <sup>51</sup>, nella modellazione 3D. Per completezza gli enunciati sintetici di questi teoremi sono riportati, nell'immediato prosieguo.

Teorema di Stokes o della circuitazione: la circuitazione di un campo vettoriale, lungo un'arbitraria linea chiusa, appartenente al dominio di definizione del campo, è pari al flusso del rotore del campo medesimo attraverso una qualunque superficie, avente per contorno la stessa linea chiusa.

<sup>49</sup> Pittore del '600, non è dei più famosi, né il quadro dei più noti (e forse anche dei migliori), ma il soggetto è notevole ed eloquente.

<sup>50</sup> I due teoremi, differenti per enunciato ed elementi in gioco, rispondono comunque ad una stessa affinità culturale.

<sup>51</sup> Attualmente, la modellazione 3D è, quasi per intero, sotto il dominio della informatica grafica, ma una sua rivisitazione, da un punto di vista strettamente matematico, è cosa auspicabile e necessaria.

Teorema Gauss-Green o della divergenza: il flusso di un campo vettoriale, attraverso una superficie chiusa, appartenente al dominio di definizione del campo, è pari all'integrale della divergenza del campo medesimo esteso al volume racchiuso dalla stessa superficie chiusa.

Un altro esempio, proveniente dall'analisi matematica e storicamente di grande interesse ed utilità, per la corretta definizione delle equazioni costitutive delle proiezioni e rappresentazioni cartografiche, riguarda le equazioni differenziali e, in particolare, le equazioni differenziali alle derivate parziali (a due variabili). In questo stesso ambito, una disamina completa fa comprendere giocoforza anche le equazioni differenziali ordinarie e le equazioni differenziali alle derivate parziali (a più di due variabili), come pure tutti i problemi al contorno che permettono di definire le soluzioni integrali delle stesse. Storicamente sono state scritte nelle forme più varie, in accordo con la geometria e/o la fisica dei problemi specificamente in esame; tuttavia è possibile, quasi sempre, ricondurle a forme più semplici e standard.

Infatti la loro linearizzazione, in generale, sempre possibile, sotto larghe ipotesi (con uno sviluppo in serie di Taylor), porta queste equazioni ad una forma standard (di cui le equazioni differenziali ordinarie, lineari ed omogenee, di Eulero sono uno degli esempi più semplici). L'ulteriore discretizzazione di queste equazioni fa da battistrada alla definizione di metodi numerici alle differenze finite, agli elementi finiti ed alle funzioni spline che tanta parte hanno oggi giorno nell'analisi numerica di una vasta gamma di problemi. Ad esempio, nel campo specifico delle discipline del rilevamento, questi metodi hanno ampie possibilità d'impiego, dal monitoraggio e controllo di movimenti e deformazioni, all'elaborazione, analisi ed interpretazione d'immagini (soprattutto in telerilevamento, ma non solo).



Jacopo de' Barbari (attribuzione dubbia), Ritratto di Luca Pacioli <sup>52</sup> (Museo di Capodimonte, Napoli)

Ancora un contributo offerto dall'analisi matematica è lo studio dei cosiddetti metodi di Fourier, a partire dalle serie per arrivare alle trasformate. Infatti l'opportuna manipolazione delle prime, in uno spazio 3D, porta alla costruzione delle armoniche sferiche, essenziali per gli sviluppi, insieme classici e moderni, della geodesia e, in particolare, al calcolo del geoide e di altri funzionali del campo della gravità terrestre. In questo ambito, anche l'approccio moderno di una modellazione del campo suddetto, facendo uso di un approccio mediante i processi stocastici, non può prescindere da queste e da loro funzionali, per mantenere l'armonicità del

<sup>52</sup> Il ritratto rappresenta il matematico rinascimentale italiano, intento a dimostrare il 2° teorema di Euclide.

campo stesso. Per quanto riguarda invece, le trasformate di Fourier <sup>53</sup>, queste hanno largo impiego nella fisica delle alte frequenze e nelle telecomunicazioni, e da questi ambiti, in telerilevamento <sup>54</sup>.



Mosaici delle Storie della Vergine <sup>55</sup> (Basilica di San Marco, Venezia)

Il mosaico è la prima immagine, citata in rete, alla voce: matematica-dipinti. Quest'ordine non è del tutto casuale ed attiene alla citazione criptica di numeri cosiddetti mariani, certamente estranei al contesto del presente lavoro, ma bene attestanti un'attenzione ed una vicinanza tra la matematica e le arti figurative e non solo, bastando citare certa letteratura e molta parte della musica. Meno rilevante è invece l'aspetto geometrico del mosaico, con una prospettiva corretta, su una superficie curva, in quanto successiva alle opere di Brunelleschi, Donatello, Masaccio e Leon Battista Alberti, veri e propri inventori della tecnica della prospettiva. In entrambi i casi, la citazione, per i suoi diretti riferimenti e per la non così rilevante ascendenza geometrica, permette di rivolgere l'attenzione ad altri campi della matematica, spostandosi dall'analisi matematica all'algebra ed alla geometria.

Per lungo tempo, l'algebra è stata considerata ed insegnata solo come estensione naturale dell'aritmetica <sup>56</sup>, poi dalla scoperta dei numeri immaginari e complessi, per arrivare ai numeri cosiddetti ipercomplessi (ad esempio, come i quaternioni), l'algebra è diventata una nuova disciplina della matematica, dalle potenzialità enormi <sup>57</sup>. Infatti l'algebra ha provveduto alla definizione di particolari strutture algebriche (come gli insiemi, i

<sup>53</sup> Una moderna estensione di questi stessi metodi è data dalle trasformate *wavelet* (comunemente dette, in italiano, ondine).

<sup>54</sup> Elaborazioni simili permettono altresì la cosiddetta foto-interpretazione d'immagini, scene, sequenze, mappe e modelli 3D.

<sup>55</sup> I dipinti per la successiva realizzazione dei mosaici sono ad opera del pittore toscano del '400: Andrea del Castagno.

<sup>56</sup> In ogni caso, l'aritmetica dei numeri interi spiega banalmente, ma forse non troppo, i sistemi di riferimento e, grazie a sostituzioni e simmetrie, definisce topologie e fornisce strumenti per la costruzione di sistemi informativi geografici o territoriali.

<sup>57</sup> Nelle discipline del rilevamento, l'algebra è rilevante sia in geodesia che in fotogrammetria, ed è importantissima nel trattamento delle osservazioni, per lo studio dei loro sistemi lineari e delle matrici corrispondenti.

gruppi, gli anelli, i corpi, i campi, i moduli, gli spazi vettoriali e le algebre). In particolare, l'algebra lineare con le matrici, le basi e gli spazi lineari, dà interpretazioni astratte e generalizzazioni alla geometria, e fornisce nuove modalità di rappresentazione dei dati addirittura all'analisi matematica. Infine l'algebra è anche la disciplina matematica che, più e meglio, s'è interfacciata con l'informatica.

I contributi della geometria, alle discipline del rilevamento, sono altrettanto rilevanti, anche se più antichi nel tempo. Infatti la geometria, oltre permettere rappresentazioni cartografiche consistenti, con la geometria descrittiva (piana e solida), e disegnare reti topografiche, grazie alla geometria analitica, ha avuto altri interessanti punti di contatto. Pertanto seppure in modi forse più nascosti, la geometria intrinseca è proprio essenziale nella geodesia classica ed in cartografia, mentre la geometria proiettiva ha contribuito alla fondazione della fotogrammetria (prima ancora dell'invenzione di un, vero e proprio, apparato fotografico) e, di recente, è riscoperta e valorizzata in fotogrammetria digitale. Infine la grafica informatizzata è costruita su basi geometriche <sup>58</sup>.



Michelangelo Merisi da Caravaggio, Canestra di frutta (Pinacoteca Ambrosiana, Milano)



Paul Cézanne Natura morta con mele e arance (Musée d'Orsay, Parigi)

---

<sup>58</sup> La canestra di frutta di Caravaggio e maggiormente Natura morta con mele e arance di Cézanne mostrano i limiti del kantismo, nella concezione dello spazio (e del tempo). Infatti senza la canestra di frutta, il primo quadro mostrerebbe solo uno sfondo uniforme ed il bordo di un tavolo, mentre senza la natura morta, nulla rimarrebbe del secondo quadro, ad eccezione di un po' di sfondo, in alto a destra. Allora le cose formano lo spazio (così come gli eventi riempiono il tempo), con inevitabili conseguenze geometriche e fisiche.

Strettamente collegata alla concezione dello spazio è la teoria dei colori che va oltre l'ottica newtoniana, con l'esperimento del prisma diffusore (e l'esperimento inverso con lo stesso prisma), per studiarne vari aspetti: dalle fusioni alle complementarità, come pure dagli accostamenti e alle giustapposizioni. Un esempio fa riferimento alla teoria goethiana, con i suoi fondamenti nella fisiologia, nella psicologia, nell'estetica, nella poetica e nel simbolismo (la polemica fisica – psicologia è storicamente datata e di nullo interesse, ma il confronto è certamente utile, da entrambe le parti). Pertanto mentre nessuna obiezione può essere mossa alla teoria fisica, molto è ancora da fare per dare forma matematica alla composizione ottimale (o meno), ovvero per saperne misurare la qualità.



Wassily Kandinsky, Gorge Improvisation <sup>59</sup> (Städtische Galerie im Lenbachhaus, Monaco di Baviera)

Non è facile parlare di musica, documentando con esempi, come fatto per le arti visive, ma il collegamento tra matematica e musica è altrettanto (e forse maggiormente) importante. Nel mondo antico, matematica e musica sono due scienze strettamente collegate, nel Quadrivio delle scienze esatte (formato da: Aritmetica, Musica, Geometria ed Astronomia), a sua volta affiancato ad un Trivio di scienze umane (costituito da: Grammatica, Retorica e Dialettica). Nel mondo moderno, con la fondazione e lo svilupparsi della scienza nuova, matematica e musica trovano punti di contatto, grazie all'acustica, nel clavicembalo ben temperato bachiano e nella tecnica del contrappunto mozartiano <sup>60</sup>; dopodichè con un altro balzo fino al mondo moderno, le stesse sono ancora vicine con la serialità dodecafonica e le grammatiche regolari.

Non irrilevanti sono le implicazioni nei confronti delle discipline del rilevamento, in particolare con le analisi in frequenza, dove la matematica fornisce strumenti all'acustica, all'ottica ed alle telecomunicazioni, e mette a disposizione gli stessi strumenti, ad esempio, per la geodesia, l'ingegneria geodetica, la foto-interpretazione ed il telerilevamento. Tuttavia nuovi punti di contatto sono da segnalare, in geomatica, laddove le grammatiche regolari e particolari topologie si spiegano a vicenda. In conclusione la matematica applicata, affiancando il trattamento delle osservazioni, estende le capacità d'elaborazione, analisi ed interpretazione, grazie ad una maggiore ricchezza e complessità del linguaggio matematico impiegato, e fornisce spunti veramente interessanti per nuovi approcci.

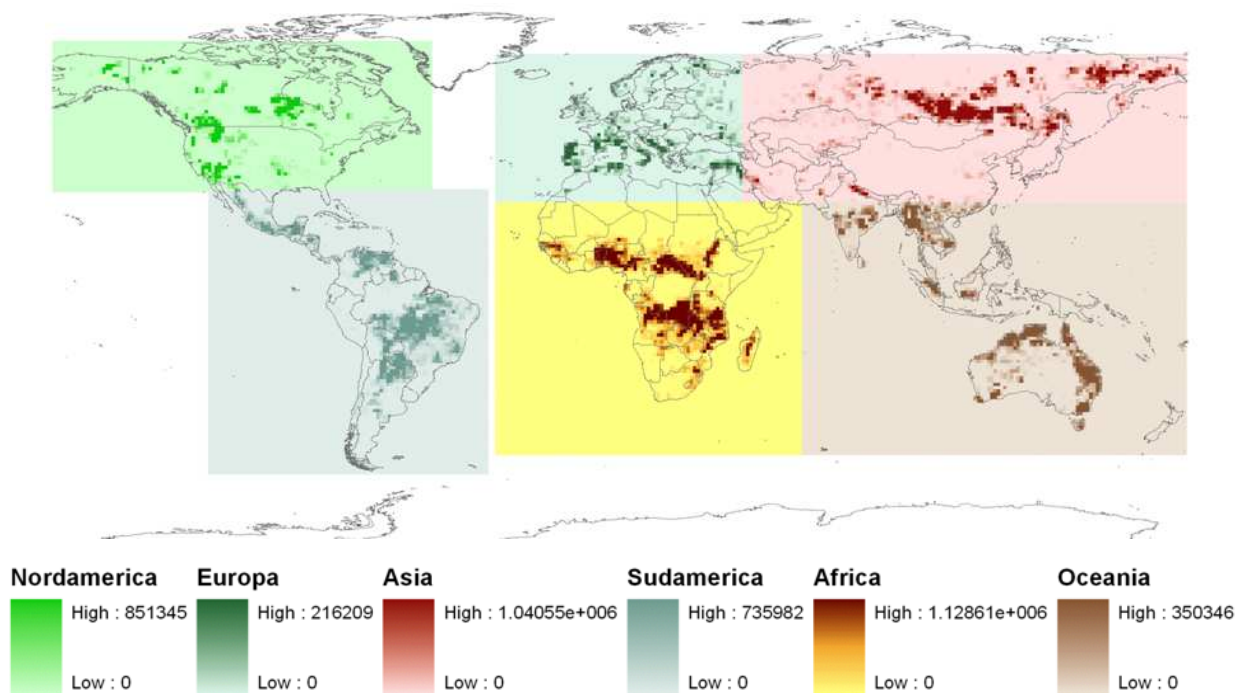
<sup>59</sup> L'esplosione di colore e l'astrattismo non sono esclusivi dell'autore, ma di certo, sono notevoli e bene illustrativi della tesi esposta.

<sup>60</sup> Meno facile è trovare contatti diretti tra matematica e musica, nella musica barocca, nella grande sinfonia romantica tedesca, nel melodramma italiano (dalla seconda metà del '700, per tutto l'800, fino agli inizi del '900) e nel jazz afro/americano. Tuttavia queste distanze non sono cesure, ma una prova provata della struttura della libertà. Del resto, contatti esistono certamente tra la musica e le arti figurative, di quei periodi, e così indirettamente con la matematica, seppure in modi molto, molto lievi.

## APPENDICE D – Un’applicazione geomatica su dati telerilevati <sup>61</sup>

L’insegnamento di Trattamento delle Osservazioni 2 (Geomatica), attivo presso alcune Facoltà d’Ingegneria del Politecnico di Milano, si sviluppa con lezioni ex-cathedra che, dopo un’alfabetizzazione statistica, spaziano dalla statistica computazionale all’analisi dei dati, affiancate da seminari di geomatica e da un laboratorio statistico – numerico – informatico (essendo questo ultimo auto-organizzato dagli studenti partecipanti). Scopo del laboratorio è sperimentare varie tecniche statistiche, quali ad esempio, la statistica descrittiva, l’inferenza multivariata, l’analisi multivariata, la matematica discreta ed i processi stocastici, su dati campionari di fenomeni e/o processi s’interesse.

Alcuni dati riguardano, nello specifico, tematiche propriamente geomatiche ed una, tra queste, verte sulle emissioni globali di CO<sub>2</sub>, nell’anno 2002, rilevate attraverso il satellite con sensori multispettrali NOAA, e la loro ripartizione per continenti (si veda, a riguardo, la figura sottostante). Da queste osservazioni e l’elaborazioni conseguenti sono estratti dati ed alcuni risultati, tra i più significativi (illustrati nel prosieguo). La provenienza dei dati e parte dell’elaborazioni sono da riferire alla Sezione Telerilevamento dell’IREA del CNR, sita a Milano presso l’Area Bassini che, relativamente agli incendi, da tempo, ha in corso un progetto Africa, dove il problema è tra i più rilevanti ed i meno sotto controllo.



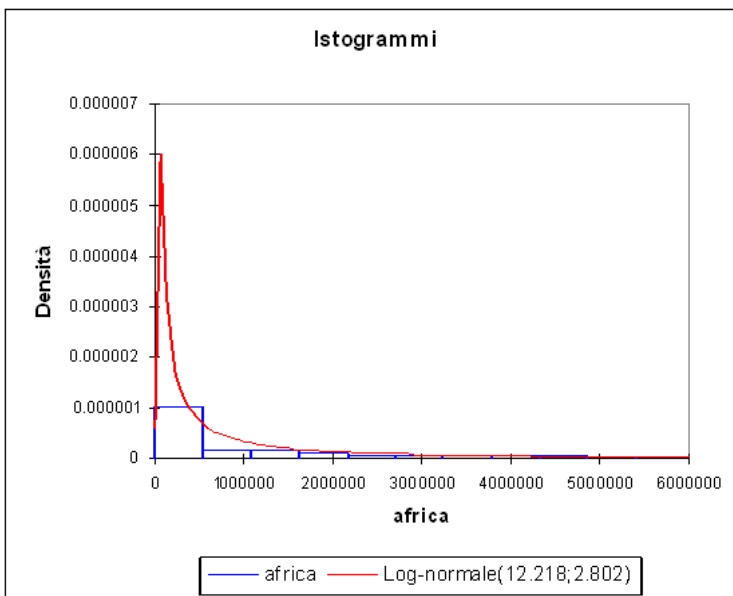
Emissioni globali di CO<sub>2</sub> e la loro ripartizione per continenti

A valle delle usuali analisi preliminari di statistica descrittiva e delle, successive e conseguenti, validazioni, per mezzo dell’inferenza multivariata, una prima analisi statistica, di sicuro interesse geomatico, è data dalla cluster analysis che ha lo scopo di formare gruppi, relativamente omogenei e compatti (ed abbastanza distinti tra loro), per poterli poi confrontare con altri, aventi caratteristiche simili. Così un’analisi, per fasce di

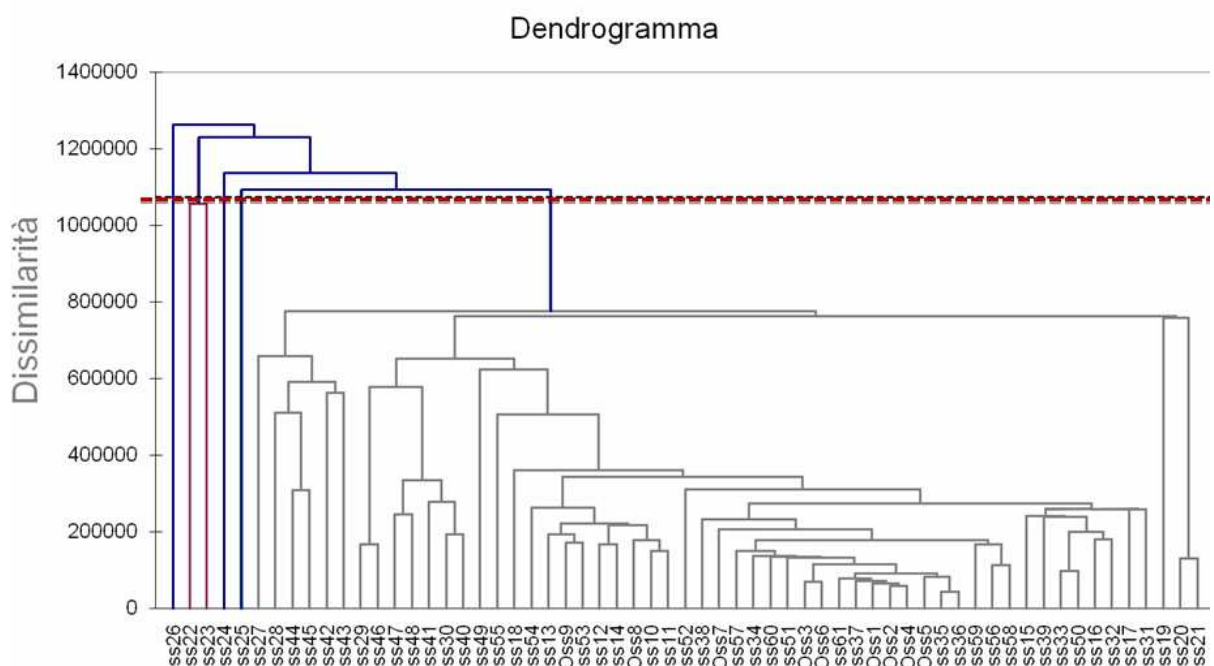
<sup>61</sup> L’autore intende ringraziare particolarmente le ingegneri Valentina Forcella e Cynthia Zambrano che, nell’ambito dell’insegnamento di Trattamento delle Osservazioni 2 (Geomatica), hanno svolto uno dei migliori lavori di laboratorio statistico – numerico – informatico, riguardante le emissioni globali di CO<sub>2</sub> e la loro ripartizione per continenti da cui sono qui estratti i dati e le elaborazioni riferiti all’Africa. Come certamente evidente dalla lettura di tutta questa parte, il lavoro prende in considerazione moltissimi aspetti dell’analisi statistica e, di certo, tutti i principali e più importanti per le elaborazioni richieste da questo tema specifico.

latitudine, porta ad un confronto tra Africa, America Latina ed Oceania (principalmente l'Australia), individuando una vastissima (e davvero preoccupante) diffusione nelle aree forestali bruciate, ad eccezione delle aree più interne dell'Amazzonia e del Congo.

Una prima osservazione preliminare e necessaria mette in luce il comportamento log-normale dei dati acquisiti (come mostrato dalla figura appena sottostante), perché gli stessi sono comunque eventi rari; di conseguenza, lontani dai classici comportamenti lineari e normali. Pertanto tecniche di matematica discreta (un esempio nel dendrogramma, in figura, riportato poco più oltre) ed inferenza non-parametrica bene si prestano ad un'analisi dei dati, meglio aderente al comportamento degli stessi. Dopodichè la successiva analisi multivariata procede più correttamente e dà risultati più verosimili, adottando le debite trasformazioni alla distribuzione normale, altrimenti completamente disattesa.

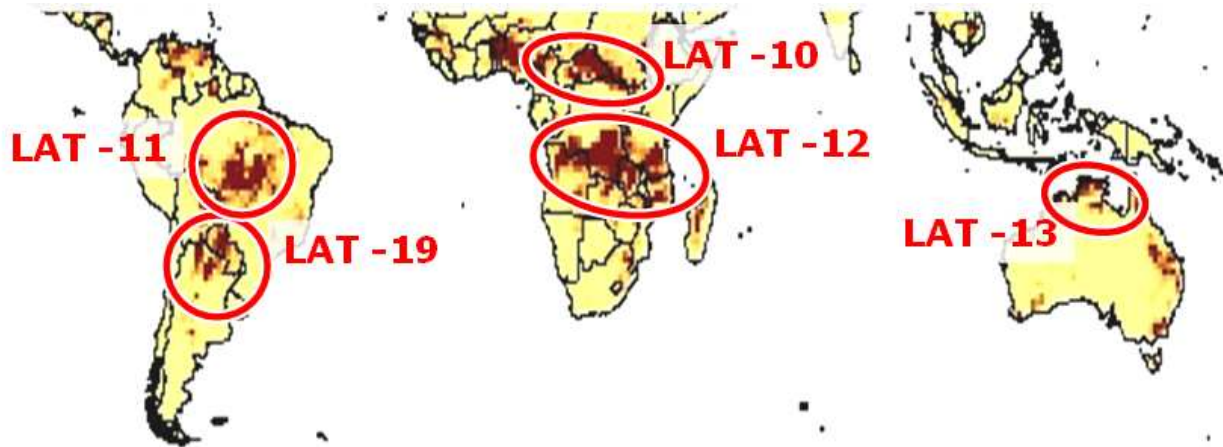


Istogramma e distribuzione di probabilità delle emissioni di CO in Africa



Dendrogramma per la cluster analysis delle emissioni di CO nella fascia equatoriale e sud-tropicale

OGGETTO	LAT - 19	LAT - 13	LAT - 12	LAT - 11	LAT - 10
CENTRALE					
Oggetti	56	2	1	1	1
Somma pesi	56	2	1	1	1
Var. intraclasse	2160543908035.010	558701929730.478	0.000	0.000	0.000
D. min intercl.	157660.939	528536.626	0.000	0.000	0.000
D. med intercl.	1185255.264	528536.626	0.000	0.000	0.000
D. max intercl.	4350027.887	528536.626	0.000	0.000	0.000



Clusterizzazione delle emissioni di CO nella fascia equatoriale e tropicale (tropico del Capricorno)

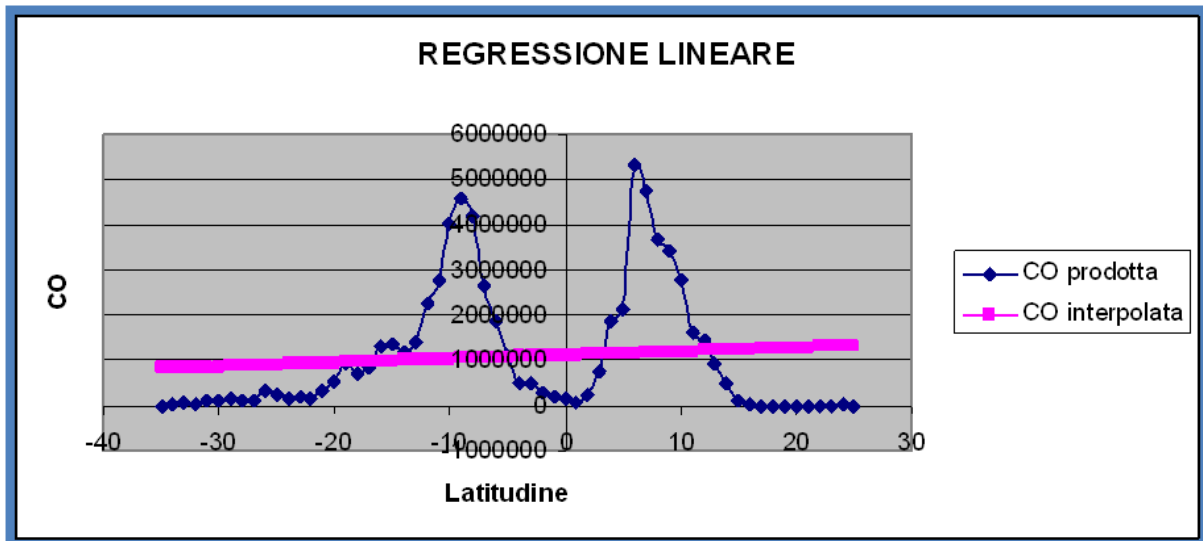
Una seconda osservazione complementare, ma non secondaria, rileva come, in tutte queste aree, a differenza di quanto accade nel mondo industrializzato, l'emissioni di CO sono da imputare soprattutto ad incendi boschivi la maggior parte dei quali provocati dall'impronta umana. Si ha così una forte pressione che sovra-popolazione, penuria di suoli agricoli e mancanza di risorse economiche, se non vera e propria miseria, producono con la devastazione della natura, accanto a guerre ed altri flagelli. A tutto ciò, va aggiunto il contributo paradossale dato dai paesi sviluppati, già con il colonialismo ed il neocolonialismo, ed ora con il turbo-capitalismo, che producono altri ulteriori danni, anziché provvedere ad aiuti sostanziali.

Fonte	GDL	Somma quadrati	Media quadrati	F	Pr > F
Modello	1	1310666382285.420	1310666382285.420	0.663	0.419
Errore	59	116715973200734.000	1978236833910.750		
Totale corretto	60	118026639583020.000			

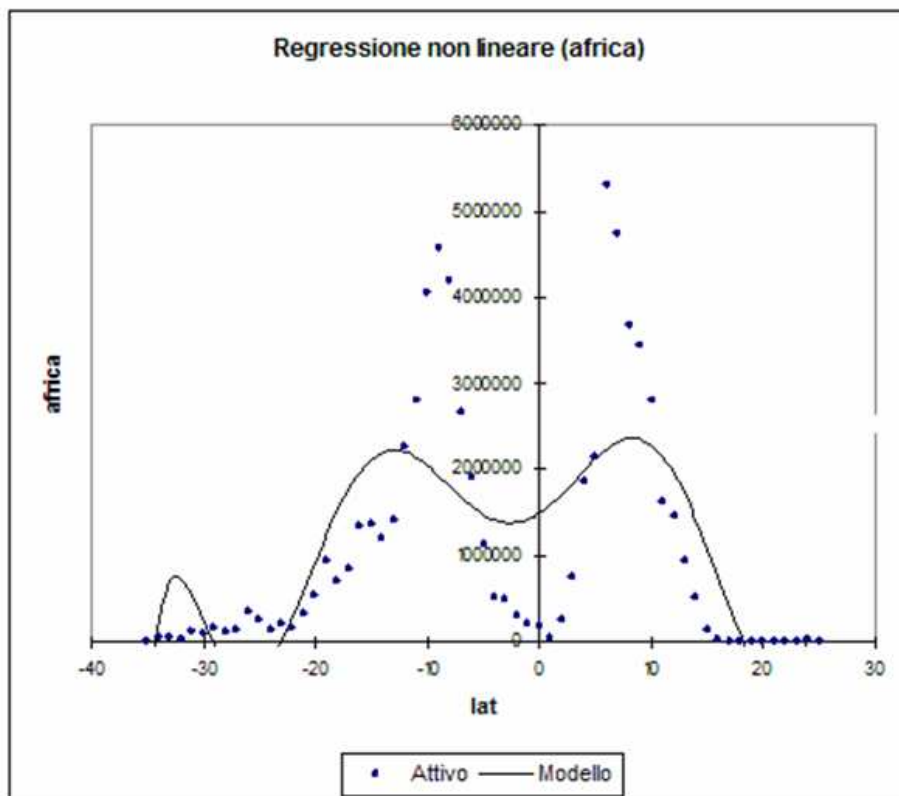
Osservazioni	61.000
Somma pesi	61.000
Gdl	59.000
R <sup>2</sup>	0.011

Tabelle riassuntive dell'analisi di varianza ad una via

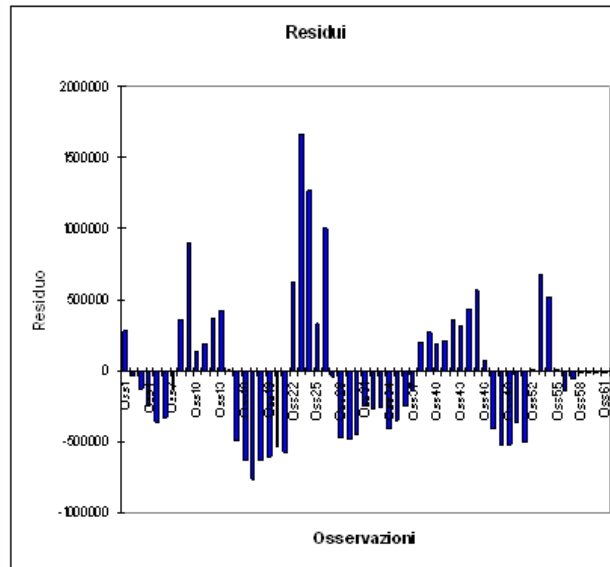
Le tabelle riassuntive dell'analisi di varianza ad una via (riportate poco sopra) attestano la significatività della clusterizzazione, dimostrando che la dispersione interna ai cluster formati è minore della distanza tra i cluster stessi (misurata sempre in termini di dispersione). Dopodiché concentrandosi sulla sola Africa, oggetto s'interesse specifico, modelli regressivi possono essere applicati, al fine di meglio interpretare il comportamento dei fenomeni oggetto di studio. Allora una semplice regressione lineare non riesce a dare ragione della complessità del fenomeno, mentre già una regressione non-lineare, con un polinomio di basso ordine, risponde abbastanza bene alle attese (si veda appena sotto, per entrambe le prove).



Regressione lineare delle emissioni di CO in funzione della latitudine

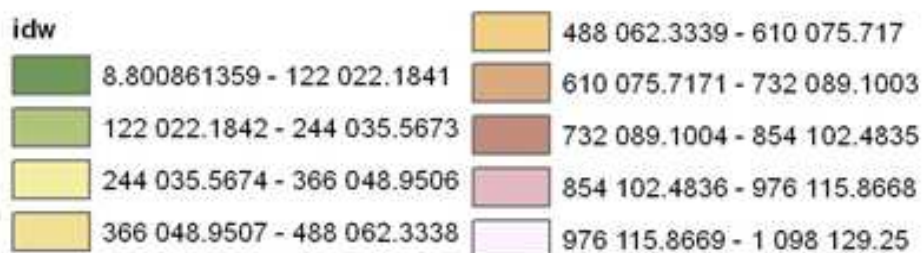
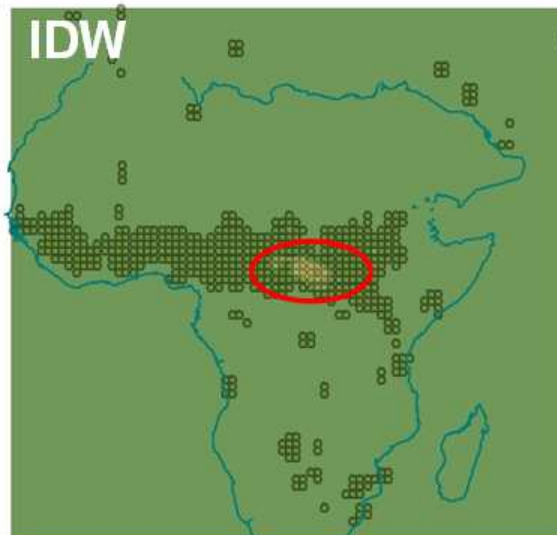


Regressione non-lineare delle emissioni di CO in funzione della latitudine

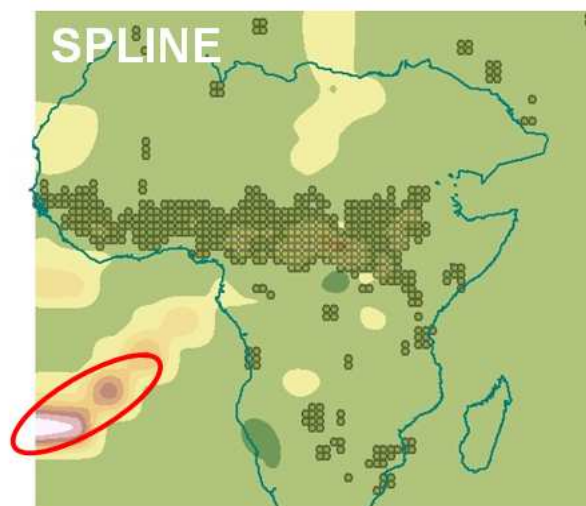


Residui della regressione non-lineare delle emissioni di CO in funzione della latitudine

Un primo commento osserva che un'interpolazione non-lineare, per tenere conto anche della longitudine, e maggiormente interpolazioni locali, con il metodo degli elementi finiti (ad esempio, con medie mobili o con funzioni spline: per entrambe, a riguardo, si veda appena più oltre), oppure approssimazioni adattative, facendo uso dell'approccio fornito dai processi stocastici, possono meglio interpretare la variabilità presente, riducendo l'errore residuo. Tuttavia in questa sede, quanto qui presentato, è già sufficiente a confermare la validità dell'analisi spaziale di dati georeferenziati (in questo caso specifico, originanti da osservazioni telerilevate, come già detto in precedenza).



Interpolazioni locali con medie mobili e funzioni spline



Interpolazioni locali con medie mobili e funzioni spline

Un secondo commento rileva come notevole sia comunque l'uso d'interpolazioni locali, con il metodo degli elementi finiti, utilizzando prima medie mobili e poi funzioni spline bidimensionali, gradualmente variate. Infatti questi metodi, come le approssimazioni adattative (facendo uso dell'approccio fornito dai processi stocastici), permettono di regolarizzare i dati, riempire buchi inaspettati e, se le basi di dati in esame sono dinamiche (nel caso specifico, esaminando più anni di osservazioni telerilevate), predire estrapolazioni temporali (seppure a solo breve, data la forte espansione degli intervalli fiduciari, a lungo termine). Un'ultima constatazione nota, come qualsiasi algoritmo e/o procedura, per quanto ottimale, abbia comunque limiti propri cui occorre sottostare.

## CONCLUSIONE

Vi e' un proverbio che si usa dire: che la moglie di Cesare non deve essere sospettata, ma prima di tutto è Cesare che non deve essere sospettato. Ed allora ogni sospetto devono allontanare dalla loro persona gli uomini politici (accademici, ecc.), non possono rimanere, non può rimanere al suo posto chi è stato indiziato ... (Sandro Pertini, Messaggio di Fine Anno agli Italiani del Presidente della Repubblica, Palazzo Del Quirinale 31 Dicembre 1981).

La stima ed il rispetto sono parole collegabili. Infatti stima è una parola bivalente, anche se i due significati sono collegabili, a loro volta, e significa valutare ed essere valutato. Così la stima effettuata è connessa alle operazioni di misura, mentre la stima concessa e/o ricevuta si collega al rispetto. Quest'ultimo è certamente necessario e dovuto, per il mantenimento di buoni rapporti di relazione tra gli esseri umani, e si perde a fronte di comportamenti considerati illegittimi. L'assassinio, la menzogna, la frode e gli abusi sessuali sono alcune delle tante forme, facenti sì che il rispetto venga perso, tanto verso se stessi, quanto riferendosi a

quello concesso agli altri e/o ricevuto da questi. Tralasciando discorsi ovvi sulla menzogna e la frode <sup>62</sup>, purtroppo discorsi sensati devono essere fatti, ancora oggi, sulla gestione della sessualità.

Infatti sembra quasi assurdo, ma si oscilla spesso tra tesi, cosiddette puritane o perbeniste (talvolta solo fintamente, come nel caso di vizi privati e pubbliche virtù), e l'esaltazione del libertinaggio che riduce donne (e non solo <sup>63</sup>), da membri di una propria corte dei miracoli fino a semplici oggetti del proprio divertimento. Tutto ciò è purtroppo cosa non infrequente anche negli ambienti accademici <sup>64</sup>, dove si trova chi, forte del suo ruolo (perché ad altri subalterni non sarebbero concessi, né tollerati), disturba giovanissime/i, oppure intrattiene rapporti ambigui (anche se forse consenzienti, quando ostentati pubblicamente) che inducono menti deboli al pettegolezzo. Per quanto riguarda invece il superamento delle tesi puritane, la storia del quadro della Natività di Filippo Lippi e dello stesso pittore sono altamente eloquenti.



Filippo Lippi, Natività (Museo Civico di Prato)

Infatti Filippo Lippi, orfano in tenera età (la madre muore di parto e perde precocemente il padre e la zia paterna) ed in convento da ragazzo, assiste all'affresco della Cappella Brancacci, da parte di Fra Masolino e del suo grande allievo Masaccio. Cappellano, a Prato, dipinge la suddetta Maternità, avendo per modella della Madonna una giovane e bellissima suora (Lucrezia Buti). Dalla loro unione, nasce Filippino Lippi e, otto anni più tardi, Alessandra. Lo scandalo, bigotto e codino, è risolto da Cosimo il Vecchio de' Medici che scrive al Papa umanista Pio II (al secolo, Enea Silvio Piccolomini <sup>65</sup>), affinché i due ottengano una dispensa dai voti che è accordata. L'epoca è il tardo medioevo: ecco la differenza tra un umanista ed un inquisitore, come tragicamente, poco più tardi, davanti alla Riforma e per tutta la Controriforma.

Anche la storia di Filippino Lippi è significativa. Infatti al lavoro, già da ragazzo, come garzone di bottega, dapprima con il padre, nei lavori per la decorazione del Duomo di Spoleto, e successivamente, rimasto orfano, con il Botticelli, acquista infine uno stile personale che lo fa antesignano del manierismo, praticato

<sup>62</sup> Fortunatamente si può considerare l'assassinio un caso rarissimo, tra le persone perbene che, se incorrenti, cessano di esserlo.

<sup>63</sup> I cambi di genere sono dovuti e certamente reali, ma occorre constatare, forti anche di una ben diversa distribuzione del potere, come gli abusi perpetrati da uomini siano di gran lunga più numerosi di quelli perpetrati dalle donne.

<sup>64</sup> Del fatto che situazioni analoghe si verificano anche in altri ambienti, ad esempio, politici, militari, ecclesiastici, ecc., non sminuisce la gravità della cosa, anzi ...

<sup>65</sup> Papa Pio II nasce a Pienza, già Corsignano, nel senese.

poi dagli allievi di Michelangelo fino al giovane Caravaggio. Rimarchevole è la continuità e la collaborazione, pur tra rivalità e contrasti, tra questi artisti, ovvero Fra Masolino, Masaccio, Filippo Lippi, Botticelli e Filippino Lippi. Da qui, un insegnamento, affatto secondario, porta a considerare la collaborazione (ed il rispetto) superiori alla competizione (ed al dileggio). D'altra parte, mentre è insensato stabilire classifiche tra i migliori, spiace non aver mai visto alcuna censura, verso le poche mele marce (cioè i peggiori, di gran lunga).



Sandro Botticelli, Madonna del libro <sup>66</sup> (Museo Poldi Pezzoli, Milano)

Nell'ambito delle discipline del rilevamento, rispetto è allora quanto dovuto e preteso, se si segue un preciso codice deontologico. In particolare, per quanto riguarda il trattamento delle osservazioni, occorre sempre non addomesticare le misure, né camuffare i risultati. Dati anomali, cioè errori grossolani od altro, possono sempre accadere: allora occorre elencarli, in numero e misura. I modelli richiedono spesso aggiustamenti, tramite parametri di servizio, oppure mediante altre strategie consimili: anche in questo caso, è necessario presentare i risultati prima e dopo un trattamento specifico. Tutto ciò significa, rispettare i dati, i modelli ed i risultati, come pure operatori e committenti del lavoro in atto. Solo da questo, deriva il rispetto accordato all'esecutore del trattamento delle osservazioni, la stima conseguita e la propria autostima.

Due pensieri di René Descartes (italianizzato in Cartesio) ed Immanuel Kant, tratti rispettivamente dal Discorso del metodo e da Per la pace perpetua, prendono in considerazione i problemi collegati a quelli della stima e del rispetto nei confronti del metodo scientifico e della democrazia.

Al posto del gran numero di regole della logica, pensai che sarebbero bastate le quattro seguenti:

- ❑ La prima, non accettare mai per vera nessuna cosa che non conoscessi con evidenza come tale: ovvero evitare la precipitazione e la prevenzione, e non accogliere nei giudizi niente che non si presentasse alla mente, in modo così chiaro e distinto, da escludere ogni motivo di metterlo in dubbio.
- ❑ La seconda, dividere ciascuna delle difficoltà che avrei esaminato, in quante più parti fosse possibile e richiesto, per risolverle meglio.
- ❑ La terza, svolgere con ordine i pensieri, cominciando dagli oggetti più semplici, per risalire, poco a poco, come per gradi, fino alla conoscenza dei più complessi.
- ❑ La quarta, fare dappertutto rassegne così generali, da essere certo di non omettere nulla (Cartesio).

---

<sup>66</sup> Secondo un'interpretazione del Vasari, Filippino Lippi collabora alla pittura del mantello, azzurro e finemente decorato.

La costituzione fondata:

- sul principio della libertà dei membri di una società;
- sul principio della dipendenza di tutti da un'unica legislazione;
- sulla legge dell'uguaglianza,

è l'unica costituzione che derivi dal contratto originario su cui deve essere fondata ogni legislazione giuridica ed è repubblicana. Ora la costituzione repubblicana ha anche la prospettiva del fine desiderato, cioè della pace perpetua (Kant).

A mo' di commento sul collegamento, tra le sopraccitate questioni piccole e grandi, è sufficiente osservare come l'assenza della democrazia oltreché di un metodo scientifico infici anche la stima ed il rispetto, nei rapporti privati e/o nelle situazioni specifiche. La stima ed il rispetto, nei rapporti privati e/o nelle situazioni specifiche, così come il metodo scientifico e la democrazia, conducono anche a tanti problemi di linguaggio, per mezzo del quale rappresentare il mondo e rapportarsi/valutare persone, azioni e situazioni. In generale, il linguaggio studia la struttura di quei fenomeni e processi che hanno una certa modellazione geometrica e/o fisica, mentre prende in considerazione il pattern (ovvero la trama o la tessitura) di quegli eventi e quelle storie che non hanno una modellazione certa. Pertanto le discipline del rilevamento, dalla loro nobile origine nella geodesia e nella cartografia, passando per tutte le tecniche della topografia generale, fino al prorompere attuale della geomatica, complesso e caotico, devono saper affrontare gli stessi problemi, essendo esse stesse soprattutto un linguaggio.



Noi protestiamo, protestiamo come uomini liberi e come uomini che hanno il dovere di difendere i diritti civili ed umani di tutti ... (Sandro Pertini, Messaggio di Fine Anno agli Italiani del Presidente della Repubblica, Palazzo Del Quirinale 31 Dicembre 1981).

## **BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE**

### **Autori italiani autorevoli (in ordine cronologico <sup>67</sup>)**

1. Bordoni A. (1859): Geodesia elementare. Tipografia degli Eredi Bazzoni, Pavia.
2. Schiavoni F. (1880): Principi di Geodesia. Stabilimento tipografico dell'Unione, Napoli.
3. Pucci E. (1883): Fondamenti di Geodesia. Vol. I e II. Ulrico Hoepli, Milano.
4. Jadanza N. (1895): Elementi di Geodesia. Tip. lit. CV. Giorgis, Torino.
5. Reina V. (1901): Corso di Geodesia. A cura di C. De Caroli e D. Benedetti. Università degli Studi di Roma – La Sapienza, Roma.
6. Ciconetti G. (1927): Geodesia e Topografia. Stabilimento tipo – litografico del Genio Civile, Roma.
7. Cassinis G. (1928): Calcoli numerici grafici e meccanici. Mariotti – Pacini, Pisa.
8. Pizzetti P. (1928): Trattato di Geodesia teoretica. Nicola Zanichelli, Bologna.
9. Cassinis G. (1938): Lezioni di Topografia con elementi di Geodesia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
10. Ciconetti G. (1938): Trattato di Geodesia e Topografia. Vallardi, Milano.

<sup>67</sup> Per quanto riguarda alcuni autori, più antichi, chi scrive rinvia alla consultazione dell'Archivio Storico dell'Osservatorio Astronomico di Brera – Milano (A.O.B.) i lettori, interessati all'argomento specifico.

11. Boaga G. (1943): Elementi di Geodesia e Topografia. CEDAM – Casa Editrice Dott. Antonio Milani, Padova.
12. Cassinis G. (1955): Complementi di Topografia e Geodesia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
13. Solaini L. (1956): Topografia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
14. Marussi A. (1957): Corso di Geodesia. Università degli Studi di Trieste, Trieste.
15. Dore P. (1960): Geodesia e Topografia. Casa Editrice del Prof. Riccardo Pàtron, Bologna.
16. Aquilina C.F. (1963): Lezioni di topografia. CEDAM – Casa Editrice Dott. Antonio Milani, Padova.
17. Cunietti M. (1964): Corso Teorico Pratico sulle Misure. Libreria Cortina Ed., Milano.
18. Mazzon C (1970): Lezioni di Geodesia. Istituto Idrografico della Marina, Genova.
19. Solaini L., Inghilleri G. (1972): Topografia. Levrotto e Bella, Torino
20. Inghilleri G. (1974): Topografia Generale, UTET, Torino.
21. Cunietti M. (1977): Le misure e il loro trattamento. CLUP, Milano.
22. Birardi G. (1978): Corso di Topografia. Pitagora Editrice, Bologna.
23. Folloni G. (1982): Principi di Topografia. Ed. Patron, Bologna.
24. Tomelleri V., et al. (1991): Algoritmi Topografici Unificati. Edizioni Metria, Padova.

### **Letteratura internazionale di riferimento**

25. Blachut T.J., Chrzanowsky A., Saastamoinen J.H. (1979): Urban Surveying and Mapping. Springer, New York.
26. Bonford B.G. (1952): Geodesy. Oxford University Press, London.
27. Doebelin E.O. (1975): Measurement Systems. Application and Design. McGraw-Hill, New York.
28. Heiskanen W.A., Moritz H. (1967): Physical Geodesy. Freeman and Company, San Francisco.
29. Kramer B. (1988): The Art of Measurement. Metrology in Fundamental and Applied Physics. VCH, Weinheim (Rhein-Neckar).
30. Koch K.R. (1987): Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. Springer, Berlino.
31. Kraus K. (2007): Photogrammetry: Geometry from Images and Laser Scans.
32. Lambeck K. (1988): Geographical Geodesy – The Slow Deformation of the Earth. Oxford University Press, Oxford.
33. Meissl P. (1982): Least Squares Adjustment a Modern Approach. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 43, Graz.
34. Mikhail E.M., Ackermann F. (1976): Observations and Least Squares. IEP–A Dun–Donnelley Publisher., New York.
35. Moritz H. (1980): Advanced Physical Geodesy. Wichmann, Karlsruhe. Walter de Gruyter, Berlino.
36. Richardus P., Adler R.K. (1972): Map Projections. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
37. Richardus P., Allam J.S. (1977): Project Surveying. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
38. Telford W.M., Geldart L.P., Sheriff R.E., Keys D.A. (1976): Applied Geophysics. Cambridge University Press, Cambridge.
39. Torge W. (1980): Geodesy. De Gruyter, Berlin.
40. Vaníček P., Krakiwsky E. (1982). Geodesy: the Concepts. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

### **Altre indicazioni bibliografiche**

41. Della Valle V., Patota G. (2009): Viva il congiuntivo! Come e quando usarlo senza sbagliare. Sperling & Kupfer, Milano, 2009.
42. Documenti del processo di don Milani (1969): L'obbedienza non è più una virtù. Libreria Editrice Fiorentina, Firenze.
43. Eco U. (1968): La struttura assente – Introduzione alla ricerca semiologia. Bompiani, Milano.
44. Eco U. (2008): Come si fa una tesi di laurea. Tascabili Bompiani, Milano.
45. Montgomery D.C. (2000): Controllo statistico della qualità. McGraw-Hill, Milano.
46. Mood A.M., Graybill F.A., Boes D.C. (1988): Introduzione alla statistica. McGraw-Hill, Milano.
47. Ricci F. (1975): Statistica ed elaborazione statistica delle informazioni. Zanichelli, Bologna.
48. Rinaldi S. (2010): [http://home.dei.polimi.it/rinaldi/tds/01\\_cosa\\_sono\\_i\\_sistemi\\_dinamici.pdf](http://home.dei.polimi.it/rinaldi/tds/01_cosa_sono_i_sistemi_dinamici.pdf)<sup>68</sup>.
49. Scuola di Barbiana (1967): Lettera a una professoressa. Libreria Editrice Fiorentina, Firenze.
50. Tonti E. (1976): La struttura formale delle teorie fisiche. Clup, Milano.

<sup>68</sup> Il sito citato contiene altresì un'ampia documentazione relativamente alla Teoria dei sistemi (Dinamica non lineare) ed alla Dinamica dei sistemi complessi. Chi scrive non è certamente un esperto di Teoria dei sistemi, né di Dinamica dei sistemi complessi, ma ha presentato un esempio e segnalato un sito, perché già la sapienza socratica insegna che chi più sa, sa che non sa.