

# GEODESIA INTEGRATA

Luigi Mussio  
Politecnico di Milano – DICA  
Piazza L. da Vinci, 32 – 20133 Milano  
Tel. 02-2399-6501, Fax. 02-2399-6602  
e-mail luigi.mussio@polimi.it

## RIASSUNTO

Modelli spazio – temporali, stocastici, deterministici e/o misti, sono sviluppati secondo l'approccio fornito dalla geodesia integrata (intesa nel suo senso più ampio) per lo studio di problemi geodetici e geomatici, ovvero l'analisi di dati a referenza spaziale, tempo varianti e non (con tre esempi a concludere: riferiti a problemi di geodesia, propriamente detta, astrometria e metrologia). Per completezza, si presentano anche alcune metodologie e procedure per la progettazione ed ottimizzazione di strutture di tipo geodetico, mentre un'appendice pone l'accento sulla loro gestione e simulazione, ed un'altra appendice completa il riferimento alla geodesia integrata, presentando le equazioni della fotogrammetria digitale in un approccio globale.

## INTRODUZIONE

Lo scopo della geodesia e della geomatica è la determinazione e rappresentazione, in opportune forme, della posizione di punti e della loro variazione nel tempo. Le osservabili geometriche sono tutte semplici, o più complesse, funzioni della posizione relativa tra due punti. Queste funzioni sono influenzate da vari campi fisici, come quello gravitazionale e quello della rifrazione atmosferica. Nelle loro diverse forme, le reti geodetiche ed i blocchi fotogrammetrici tengono conto delle osservabili geometriche per la determinazione delle posizioni (relative) tra i punti delle reti. Quando le misurazioni sono ripetute nel tempo, si possono valutare anche le variazioni temporali delle posizioni (relative); tuttavia è necessario imporre un sistema di riferimento arbitrariamente scelto per eliminare l'ambiguità dell'origine, dell'orientamento e della scala. Generalmente le osservabili geometriche sono funzioni non-lineari della distanza tra due punti e dipendenti dal tempo.

Nelle stesse equazioni, compaiono anche altri termini, come gli effetti del campo di gravità terrestre, le influenze della rifrazione atmosferica ed i parametri di calibrazione, a seconda delle procedure di acquisizione dei dati. La relazione tra le osservabili e i parametri geometrici, che descrivono la posizione dei punti della rete, è espressa attraverso modelli funzionali noti, spesso non-lineari, che devono essere linearizzati (usando valori approssimati per i parametri). Il difetto di rango del sistema è eliminato con l'introduzione di un sistema di riferimento. La relazione tra le osservabili geodetiche e i campi fisici può essere espressa con opportuni modelli stocastici linearizzati, dalle cui funzioni di covarianza (invarianti rispetto a opportuni gruppi di trasformazioni dei parametri), attraverso il filtraggio, si può ottenere il segnale stocastico.

I modelli stocastici possono servire per interpretare anche i parametri geometrici, come gli errori di misura sistematici o pseudo-sistematici, le altezze, le variazioni di altezza o di posizione, le proiezioni su mappe, il livello di grigio o di colore delle immagini, il contorno o altre caratteristiche delle figure, la superficie o altre caratteristiche degli oggetti. Gli eventuali movimenti delle posizioni dei punti possono essere modellati da un'opportuna funzione temporale. A loro volta, i parametri delle leggi di tale movimento possono essere modellati in funzione delle stesse posizioni dei punti. In questo modo, non solo i parametri di posizione, ma

anche quelli di movimento (spostamenti e deformazioni) possono essere ricondotti alle osservazioni geometriche.

Se si hanno a disposizione campi densi di punti, gli elementi morfologici e le forme delle figure e degli oggetti possono addirittura essere modellati con modelli digitali continui. Se si trascura la loro eventuale dipendenza dal tempo, le equazioni delle osservabili geometriche vengono rappresentate da funzioni geometriche ben note e relativamente semplici. La dipendenza dal tempo, se presente, e gli aspetti morfologici possono essere rappresentati in modo deterministico interpolando i dati con polinomi o funzioni spline e, nel dominio delle frequenze, con l'analisi di Fourier o delle onde. Spesso si preferisce l'approccio stocastico nel caso in cui la serie temporale è lunga o il campo dei punti è vasto. In questi casi, le funzioni di covarianza, indispensabili nel prosieguo, sono definite a priori.

Generalmente si hanno a disposizione ripetizioni delle misurazioni, soprattutto nelle reti appositamente disegnate per il controllo delle deformazioni in situazioni critiche; invece per il controllo di movimenti lenti, le reti contengono molti punti, ma le ripetizioni, se presenti, sono relativamente poche. Infine serie temporali lunghe di campi di punti vasti sono in generale rare. D'altra parte, con l'uso del metodo della collocazione, è naturale che si possa richiedere l'invarianza temporale solo per lunghe serie temporali e l'invarianza spaziale più l'isotropia (o la decomponibilità ortogonale) solo per vasti campi di punti. Secondo l'approccio tradizionale i diversi sistemi sono risolti sequenzialmente. Prima si determinano le influenze dei campi e i parametri di calibrazione, poi per ogni epoca, si effettua una compensazione della rete, e successivamente un'interpolazione dei dati per descrivere gli eventuali movimenti dei punti stessi in funzione del tempo. Infine i parametri caratteristici delle leggi di moto o degli aspetti morfologici sono modellati come funzioni delle posizioni geografiche. Gli ultimi due passi possono anche essere parzialmente scambiati fra loro, studiando dapprima gli aspetti morfologici e successivamente la loro evoluzione temporale.

Nell'approccio fornito dalla geodesia integrata (intesa nel suo senso più ampio), tutti i sistemi sono risolti contemporaneamente. Di conseguenza, dopo la linearizzazione delle equazioni di osservazioni e pseudo-osservazioni, le osservabili e gli altri dati sono raccolti in un unico sistema contenente parametri incogniti incorrelati e correlati, che possono essere interpretati come un segnale stocastico da filtrare dal rumore casuale. Per far questo sono necessari compensazioni separate preliminari: ricavare la matrice di covarianza del segnale dalle stime dei parametri incogniti o dai residui e calcolare sigma zero, che rappresenterà la varianza del rumore. Questo può dare problemi nello stabilire i pesi dei diversi elementi. Comunque, ripetendo la procedura costituita dall'approccio integrato, l'incertezza circa il rapporto dei pesi può essere eliminato e si possono stimare opportuni valori per i pesi, trovando un loro punto di riproduzione. Inoltre si ipotizza l'assenza di dati anomali.

Dato che le osservazioni possono presentare errori grossolani o effetti non modellabili, deve essere applicata una conveniente strategia che combini insieme robustezza ed efficienza. Infatti le procedure robuste sono utili per l'identificazione di errori sospetti, mentre il metodo dei minimi quadrati è molto potente nello stabilire se questi possono essere accettati o meno. Il difetto di rango nell'insieme delle matrici, che descrive l'unico sistema di equazioni, è facilmente determinato. Infatti un sistema contenente ripetute osservazioni della rete ha un difetto di rango pari al numero dei parametri non determinabili delle funzioni di approssimazione che descrivono la variazione temporale della posizione dei punti. Inoltre i sistemi contenenti queste osservazioni insieme a modelli digitali continui (di campi di punti) hanno in generale lo stesso difetto di rango.

## PARTE I: TEORIA DELL'APPROSSIMAZIONE <sup>1</sup>

### 1 Minimi quadrati generalizzati: filtraggio (metodo della collocazione con parametri)

Si noti innanzitutto come questo metodo abbisogni di informazioni (a priori) per la sua esecuzione e pertanto costituisca un raffinamento finale, da eseguirsi dopo aver acquisito tutte le informazioni necessarie. Infatti date equazioni di osservazione, riferite alle osservabili, e di pseudo-osservazione, riferite ad altri dati, raggruppate in un unico sistema, esso ha come incognite non solo parametri incorrelati  $x$ , ma anche parametri correlati che possono essere interpretati come segnale stocastico  $s$  da filtrare dal rumore accidentale  $n$  (dall'inglese, noise). Pertanto il sistema ha questa espressione:

$$y = Ax + Bs$$

dove  $y$  è un vettore contenente le osservabili e gli altri dati e  $A$  e  $B$  due matrici disegno.

L'uso dei parametri sia stocastici che non stocastici richiede di introdurre la norma ibrida di Wiener:

$$1/2 \begin{bmatrix} \hat{s}^T & \hat{n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ss}^{-1} & 0 \\ 0 & P/\sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s} \\ \hat{n} \end{bmatrix} + \lambda' (A\hat{x} + B\hat{s} - \hat{n} - y_0) = \min$$

dove  $y_0$  indica le quantità osservate,  $\hat{x}$ ,  $\hat{s}$  e  $\hat{n}$  le stime rispettivamente di  $x$ ,  $s$  e  $n$ ,  $C_{ss}$  la matrice di covarianza del segnale,  $\sigma_n^2$  la varianza del rumore,  $P$  la matrice dei pesi delle osservazioni,  $\lambda$  un vettore di moltiplicatori di Lagrange ed il modello linearizzato ha espressione:

$$y_0 = A\hat{x} + B\hat{s} - \hat{n}$$

Sfortunatamente la soluzione di questo tipo di sistema non è praticamente computabile. Infatti presenta calcoli onerosi, poiché le incognite sono divise in due parti separate. Perciò il sistema delle equazioni delle osservazioni sopra menzionato viene riscritto in questo modo:

$$y = Bs$$

dove  $s$  contiene i parametri sia stocastici che non stocastici ( $s^T = \begin{bmatrix} x^T & s^T \end{bmatrix}$ ) e la matrice disegno  $B$  è definita come  $B = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ , rappresentando sia il modello funzionale che quello stocastico. Le quantità osservate  $y_0$  sono riferite alle stime  $\hat{s}$  di  $s$  dallo stesso modello linearizzato:

$$y_0 = B\hat{s} - \hat{n}$$

---

<sup>1</sup> Liberamente tratta da: Barzaghi R., Forlani G., Mussio L. (1989): Compensazione cinematica ed analisi spaziale delle reti di livellazione geometrica eseguite dal Catasto in Milano negli anni 1950/72/86. *Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali* - Nuova Serie, anno XLIV, n. 1-2, 1989 e da Mussio L. (1984): Il metodo della collocazione minimi quadrati e le sue applicazioni per l'analisi

La matrice di covarianza  $C_{ss}$  per il nuovo segnale  $s$  contiene quattro blocchi, di cui due diagonali contenenti le matrici di covarianza delle parti stocastica ( $C_{ss}$ ) e non stocastica ( $hI$ ) del segnale e due nulli fuori dalla diagonale principale:

$$C_{ss} = \begin{bmatrix} hI & 0 \\ 0 & C_{ss} \end{bmatrix}$$

La matrice di covarianza dei parametri stocastici è determinata da una o più funzioni di covarianza che possono essere stimate empiricamente con i risultati di precedenti compensazioni separate. La matrice di covarianza dei parametri non stocastici è una matrice diagonale, i cui elementi (se non vincolati e pertanto molto grandi) devono essere scelti in base alle varianze dei parametri stocastici. In questo modo, la soluzione non è troppo vincolata ad altri tipi di parametri.

La varianza generale del rumore  $\sigma_n^2$  deve essere nota a priori e può essere assunta uguale al fattore di varianza  $\sigma_0^2$ , stimato nelle compensazioni precedenti.

Il criterio generalizzato dei minimi quadrati può essere usato per minimizzare contemporaneamente la norma  $s^T C_{ss}^{-1} s$  e la norma dei residui delle osservazioni  $n^T P n / \sigma_0^2$ :

$$1/2 \begin{bmatrix} \hat{s}^T & \hat{n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ss}^{-1} & 0 \\ 0 & P / \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s} \\ \hat{n} \end{bmatrix} + \lambda^T (B\hat{s} - \hat{n} - y_0) = \min$$

dove  $\lambda$  è un vettore di moltiplicatori di Lagrange. Secondo questo criterio, le stime del segnale e del rumore diventano:

$$\hat{s} = C_{ss} B^T (B C_{ss} B^T + \sigma_n^2 P^{-1})^{-1} y_0$$

$$\hat{n} = \sigma_n^2 P^{-1} (B C_{ss} B^T + \sigma_n^2 P^{-1})^{-1} y_0 = y_0 - B\hat{s}$$

e la legge di propagazione della covarianza permette di calcolare le loro matrici di varianza-covarianza:

$$C_{ee} = C_{ss} - C_{\hat{s}\hat{s}} = C_{ss} \left( I - B^T (B C_{ss} B^T + \sigma_n^2 P^{-1})^{-1} \right) B C_{ss}$$

$$C_{\hat{n}\hat{n}} = \sigma_n^4 P^{-1} (B C_{ss} B^T + \sigma_n^2 P^{-1})^{-1}$$

essendo:  $e = s - \hat{s}$ , l'errore di stima del segnale.

Il calcolo di queste espressioni richiede la soluzione di un sistema di dimensione  $m$ , pari al numero di quantità osservate. Sarebbe comunque più conveniente risolvere espressioni analoghe ma che richiedano la

---

statistica dei risultati delle compensazioni. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia Topografia e Fotogrammetria*, vol 4, CLUP, Milano, p. 305-338.

soluzione di un sistema di dimensione  $n < m$ , dove  $n$  è pari al numero dei parametri. Si ricordi che per questioni di affidabilità il numero di quantità osservate deve essere almeno triplo del numero di parametri; inoltre la consistenza delle stime cresce al crescere della ridondanza. Un'ulteriore richiesta è che le espressioni delle stime non coinvolgano matrici inverse che contengano a loro volta matrici inverse. Entrambe le condizioni possono essere soddisfatte con l'applicazione di due noti teoremi di algebra lineare.

Date quattro matrici  $R, S, T$  e  $Q$ , (di cui  $S$  e  $Q$  quadrate) si può dimostrare che:

$$(Q \pm RST)^{-1} = Q^{-1} \mp Q^{-1}R(S^{-1} \pm TQ^{-1}R)^{-1}TQ^{-1} \quad (\text{lemma di Faddayeva})$$

$$Q^{-1}(Q^{-1} \pm S)Q^{-1} = (Q \pm QSQ)^{-1}$$

La stima del rumore può essere riscritta come:

$$\hat{n} = y_0 - B \left( (B^T PB)^{-1} - \sigma_n^2 (B^T PBC_{ss} B^T PB + \sigma_n^2 B^T PB)^{-1} \right) B^T P y_0 = y_0 - B \hat{s}$$

e la stima del segnale diventa:

$$\hat{s} = (B^T PB)^{-1} B^T P y_0 - \sigma_n^2 (B^T PBC_{ss} B^T PB + \sigma_n^2 B^T PB)^{-1} B^T P y_0$$

Con queste nuove espressioni, la legge di propagazione della covarianza permette il calcolo delle corrispondenti matrici di varianza-covarianza, in forma ugualmente conveniente. Le matrici di varianza-covarianza dell'errore di stima del segnale e del rumore residuo diventano rispettivamente:

$$C_{ee} = C_{ss} - C_{\hat{s}\hat{s}} = \sigma_n^2 (B^T PB)^{-1} - \sigma_n^4 (B^T PBC_{ss} B^T PB + \sigma_n^2 B^T PB)^{-1}$$

$$C_{\hat{n}\hat{n}} = \sigma_n^2 P^{-1} - BC_{ee}B^T = \sigma_n^2 (P^{-1} - B(B^T PB)^{-1}B^T) + \sigma_n^4 B(B^T PBC_{ss} B^T PB + \sigma_n^2 B^T PB)^{-1} B^T$$

Si noti che, come già detto, il calcolo di queste espressioni sia del tutto agevole.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Si osservi come, nel caso in cui entrambe le matrici  $B$  e  $P$  siano matrici identità, il problema diventi il filtraggio di un segnale stocastico dal rumore accidentale. Pertanto:

$$\hat{s} = C_{ss} (C_{ss} + \sigma_n^2 I)^{-1} y_0 = y_0 - \hat{n}$$

$$\hat{n} = \sigma_n^2 (C_{ss} + \sigma_n^2 I)^{-1} y_0 = y_0 - \hat{s}$$

Anche le matrici di varianza-covarianza dell'errore di stima del segnale e del rumore diventano rispettivamente:

$$C_{ee} = C_{ss} - C_{\hat{s}\hat{s}} = C_{ss} - C_{ss} (C_{ss} + \sigma_n^2 I)^{-1} C_{ss} = \sigma_n^2 I - C_{\hat{n}\hat{n}}$$

$$C_{\hat{n}\hat{n}} = \sigma_n^4 (C_{ss} + \sigma_n^2 I)^{-1} = \sigma_n^2 I - C_{ee}$$

In questo caso, lo sviluppo dei calcoli è pressoché elementare.

## 2 Filtri ottimali lineari: predizione (metodo della collocazione con parametri)

Il criterio dei minimi quadrati generalizzati, espresso nella formulazione del metodo della collocazione, può fornire, oltre alla stima di un segnale filtrato, anche la stima di un segnale predetto  $\hat{s}_p = \hat{t}$ . Infatti i parametri stocastici possono essere anche stimati in punti che non fanno parte dell'insieme dei dati. Scopo della predizione è validare l'insieme dei dati, facendo uso di una riserva di dati stessi tenuta a parte per il controllo, e fornire output regolari per impiegare programmi di visualizzazione e rappresentazione nel modo più semplice possibile. Infatti questi programmi operano in modo ottimale su insiemi di dati regolari, mentre spesso effettuano scelte arbitrarie quando l'insieme dei dati è fortemente irregolare. Occorre comunque ricordare che possono essere stimati solo i parametri stocastici propriamente detti.

Di conseguenza la matrice di covarianza  $C_{tt}$  conterrà solo i parametri stocastici propriamente detti e la matrice di crosscovarianza  $C_{ts}$  tra il segnale filtrato e quello predetto sarà divisa in due parti: una contenente la covarianza tra il segnale filtrato e i parametri stocastici propriamente detti nel segnale filtrato, l'altra identicamente nulla. Proprio questa matrice nulla determina l'impossibilità di predire i parametri che non sono propriamente stocastici. Dato il funzionale:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{s}^T & \hat{t}^T & \hat{n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{st} \\ C_{st}^T & C_{tt} \end{bmatrix}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & P / \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s} \\ \hat{t} \\ \hat{n} \end{bmatrix} + \lambda^T (B\hat{s} - 0\hat{t} + \hat{n} - y_0) = \min$$

dove  $\lambda$  è un moltiplicatore di Lagrange e, tenendo conto dell'espressione della stima del segnale predetto secondo Kolmogorov (ottenuto imponendo che essa sia corretta e di minima varianza, nell'ambito degli stimatori lineari), si ha:

$$\begin{aligned} \hat{t} &= C_{ts} B^T (B C_{ss} B^T + \sigma_n^2 P^{-1})^{-1} y_0 = \\ &= C_{ts} B^T P B (B^T P B C_{ss} B^T P B + \sigma_n^2 B^T P B)^{-1} B^T P y_0 \end{aligned}$$

Infine sostituendo  $\hat{s}$  con  $\hat{x}$  e  $B$  con  $A$ , forzando un po' le espressioni generali scritte in precedenza e valutando  $\sigma_n^2$  uguale a zero, si ottengono le usuali espressioni di stima ai minimi quadrati, perché il secondo termine di entrambe le espressioni scompare:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} A^T P y_0 \\ \hat{v} &= y_0 - A \hat{x} = y_0 - \hat{y} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le matrici di varianza – covarianza, avendo definito, al solito, le matrici dei cofattori a meno di sigma zero, si ottiene:

$$\begin{aligned} C_{\hat{x}\hat{x}} &= \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} \\ C_{\hat{v}\hat{v}} &= \sigma_0^2 (P^{-1} - A (A^T P A)^{-1} A^T) = \sigma_0^2 P^{-1} - A C_{\hat{x}\hat{x}} A^T = \sigma_0^2 P^{-1} - C_{\hat{y}\hat{y}} \end{aligned}$$

dove, ancora una volta, il secondo termine di entrambe le espressioni scompare.

oppure:

$$\hat{t} = C_{ts} z$$

dove  $z$  è il vettore di servizio:

$$z = B^T P B \left( B^T P B C_{ss} B^T P B + \sigma_n^2 B^T P B \right)^{-1} B^T P y_0$$

che viene calcolato una sola volta al termine del filtraggio.

Applicando la legge di propagazione della varianza, la matrice di varianza-covarianza dell'errore di stima del segnale predetto diventa:

$$C_{ee} = C_{tt} - C_{\hat{t}\hat{t}} = C_{tt} - C_{ts} B^T P B \left( B^T P B C_{ss} B^T P B + \sigma_n^2 B^T P B \right)^{-1} B^T P B C_{st}$$

Purtroppo questa espressione non è di semplice computazione e non può neppure essere semplificata; perciò solitamente viene omessa.

La varianza del rumore può essere stimata a posteriori. Infatti imponendo che la sua stima sia corretta, essa è stimata tramite la norma quadratica del rumore (residuo) pesato:

$$k \sigma_n^2 = k E(\sigma_n^2) = E(\hat{n}^T P \hat{n}) = Tr(PC_{\hat{n}\hat{n}})$$

da cui si ottiene:

$$k = m - n + Tr \left( \sigma_n^2 P^{1/2} B \left( B^T P B C_{ss} B^T P B + \sigma_n^2 B^T P B \right)^{-1} B^T P^{1/2} \right)$$

dove  $m$  è il numero delle osservazioni e  $n$  il numero dei parametri. La stima a posteriori della varianza del rumore diventa:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n^T P n}{k}$$

La stessa formula può essere usata per la stima a posteriori delle varianze e dei pesi di gruppi di osservazioni definiti a priori.

Con riferimento alle possibilità di calcolo, vengono fatte alcune considerazioni riguardo le applicazioni dei teoremi di algebra lineare sopra menzionati, grazie ai quali si possono ottenere sistemi di dimensione  $n < m$ , la cui soluzione non richiede il calcolo di matrici inverse contenenti a loro volta altre matrici inverse.

La soluzione del sistema per la stima di un segnale filtrato contiene il termine

$$(B^T PB)^{-1} B^T P y_0$$

e la matrice inversa ha forma:

$$(B^T PB)^{-1}$$

Procedure standard usate in un qualunque problema ai minimi quadrati forniscono tanto la soluzione del sistema quanto la matrice inversa e, se la matrice disegno  $B$  è quella di una rete, si ricorre ad algoritmi diretti in grado di lavorare con questo tipo di matrici. Infatti queste matrici sono un generale sparse, ma la loro dispersione può essere ridotta con algoritmi di ordinamento e/o dissezione. Le espressioni del segnale filtrato e del suo errore di stima contengono anche i termini:

$$(B^T P B C_{ss} B^T P B + \sigma_n^2 B^T P B)^{-1} B^T P y_0 \quad ; \quad (B^T P B C_{ss} B^T P B + \sigma_n^2 B^T P B)^{-1}$$

La matrice normale  $(B^T PB)$  era già stata calcolata. La matrice di varianza-covarianza  $C_{ss} = C_{ss} * S_{ss}$ , dei parametri stocastici propriamente detti è una matrice sparsa, se costruita moltiplicando secondo Hadamard la matrice di covarianza propria  $C_{ss}$  per l'opportuna matrice di covarianza finita  $S_{ss}$ . La sua sparsità dipende dalla persistenza di correlazione delle funzioni di covarianza finite. La sua dispersione è influenzata dalla numerazione dei dati. Il prodotto di tre matrici sparse  $(B^T PB) C_{ss} (B^T PB)^T$  è ancora una matrice sparsa. La soluzione del corrispondente sistema può essere calcolata con un algoritmo iterativo insieme stabile e veloce. Infatti, in generale, la dispersione di queste matrici non è facilmente riducibile e gli algoritmi diretti presentano oggettive difficoltà di applicazione. Si ricordi comunque che, a valle di un algoritmo iterativo, è possibile avere solo indicazioni approssimate sulla matrice inversa del sistema ridotto.

Da ultimo, si noti come l'uso di dei minimi quadrati ripesati dia a questa metodologia i vantaggi delle procedure robuste, utili per l'identificazione e l'eliminazione degli errori grossolani.

### 3 Metodo della collocazione senza parametri: filtraggio e predizione <sup>3</sup>

Dato un vettore di scarti  $v$  (ovvero un campione di valori argomentali a media nulla e senza altri comportamenti sistematici), esso è suddiviso (con un'operazione cosiddetta di filtraggio) in una parte correlata, detta segnale  $s$ , e una parte aleatoria, detta rumore  $n$  (dall'inglese: noise):

$$v = s + n$$

Il segnale  $s_p$ <sup>4</sup> può essere stimato (con un'operazione cosiddetta di predizione) anche in altri punti, diversi da quelli di osservazione.

<sup>3</sup> Questo paragrafo riprende quanto esposto da: Barzaghi R., Sansò F. (1984): La collocazione in geodesia fisica. In: Boll. di Geodesia e Scienze Affini, n. 2/84.

<sup>4</sup> Per brevità di notazione il simbolo  $t$  sostituisce, nel seguito, il simbolo  $s_p$ .

La matrice di covarianza degli scarti  $C_{vv}$  deve essere nota a priori ed è costruita discretizzando la funzione di covarianza, anch'essa nota a priori, sull'insieme dei dati secondo il parametro ordinatore prescelto. Come il vettore degli scarti anche questa matrice si compone di due parti, sempre note a priori, una riguardante il segnale e l'altra il rumore:

$$C_{vv} = C_{ss} + \sigma_n^2 I$$

essendo  $I$  una matrice identità. In diagonale principale si ha:

$$\sigma_v^2 = \sigma_s^2 + \sigma_n^2$$

Per applicare il criterio dei minimi quadrati, nella sua formulazione classica, occorre definire il vettore:

$$w = \begin{pmatrix} n \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

con matrice di covarianza:

$$C_{ww} = \begin{pmatrix} \sigma_n^2 I & 0 & 0 \\ 0 & C_{ss} & C_{ts}^T \\ 0 & C_{ts} & C_{tt} \end{pmatrix}$$

e una matrice disegno:  $A = \begin{pmatrix} I & I & 0 \end{pmatrix}$ , tale che si abbia:

$$Aw = v$$

Il criterio dei minimi quadrati può essere scritto nella forma:

$$w^T C_{ww}^{-1} w = \min$$

con la condizione:

$$Aw - v = 0$$

Introducendo un vettore di moltiplicatori di Lagrange, si ha:

$$w^T C_{ww}^{-1} w + \lambda^T (Aw - v) = \min$$

con la consueta formulazione di un problema di minimo vincolato. Per trovare il valore di  $w$  che determina il minimo della funzione bisogna annullare il suo differenziale totale, da cui si ricava:

$$w = C_{ww}^{-1} A^T (A C_{ww}^{-1} A^T)^{-1} v$$

Ricordando ora le espressioni del vettore  $w$  e delle matrici  $C_{ww}$  ed  $A$  si ha la stima del segnale (filtrato):

$$\hat{s} = C_{ss}^{-1} C_{sv} v$$

del rumore:

$$\hat{n} = \sigma_n^2 C_{vv}^{-1} v$$

e del segnale predetto:

$$\hat{t} = C_{ts}^{-1} C_{sv} v$$

Per quanto riguarda il calcolo delle matrici di covarianza delle stime effettuate, applicando la legge di propagazione della covarianza, si ottengono la matrice di covarianza del segnale filtrato:

$$C_{\hat{s}\hat{s}} = C_{ss}^{-1} C_{sv} C_{sv}^T C_{ss}^{-1}$$

la matrice di covarianza del rumore residuo:

$$C_{\hat{n}\hat{n}} = \sigma_n^4 C_{vv}^{-1}$$

e la matrice di covarianza del segnale predetto:

$$C_{\hat{t}\hat{t}} = C_{ts}^{-1} C_{sv} C_{sv}^T C_{ts}^{-1}$$

Inoltre posto:  $e = s - \hat{s}$ , l'errore di stima del segnale filtrato, sempre applicando la legge di propagazione della covarianza, si ottiene la corrispondente matrice di covarianza dell'errore di stima del segnale filtrato:

$$C_{ee} = C_{ss} - C_{ss}^{-1} C_{sv} C_{sv}^T C_{ss}^{-1}$$

Si ricordi, a proposito, che il rumore è incorrelato, per definizione, oltreché se stesso, anche da qualsiasi segnale. Questa matrice contiene in diagonale principale le varianze dell'errore di stima del segnale filtrato <sup>5</sup>:

$$\sigma_{s-\hat{s}}^2 = \sigma_s^2 - \text{diag}\left(C_{ss} C_{vv}^{-1} C_{ss}\right)$$

In modo del tutto analogo, si ottengono le varianze dell'errore di stima del segnale predetto:

$$\sigma_{t-\hat{t}}^2 = \sigma_t^2 - \text{diag}\left(C_{ts} C_{vv}^{-1} C_{st}\right)$$

ovviamente si ha:  $\sigma_t^2 = \sigma_s^2$ .

Si noti che la stima del segnale filtrato e predetto e del rumore, nonché le varianze degli errori di stima del segnale, possono essere ottenute minimizzando proprio la varianza dell'errore di stima del segnale predetto:

$e = t - \hat{t}$ , limitandosi a cercare la miglior stima lineare del segnale predetto:

$$\hat{t} = \lambda^T v$$

Occorre pertanto determinare il vettore  $\lambda$  in modo tale che renda minimo il funzionale (quadratico):

$$E^2 = \sigma_e^2 = \sigma_t^2 - 2\sigma_{t\hat{t}} + \sigma_{\hat{t}}^2 = \lambda^T C_{vv}^{-1} \lambda - 2\lambda^T C_{st} + \sigma_t^2 = \min$$

essendo:  $\sigma_{\hat{t}}^2 = \lambda^T C_{vv}^{-1} \lambda$ , e:  $\sigma_{t\hat{t}} = C_{tv} C_{vv}^{-1} \lambda = C_m C_{vv}^{-1} \lambda + C_{ts} C_{vv}^{-1} \lambda = C_{ts} C_{vv}^{-1} \lambda$

Effettuata come di consueto la minimizzazione del suddetto funzionale, si ricava:

$$\lambda = C_{vv}^{-1} C_{st}$$

Quest'ultima espressione, sostituita nell'espressione generica del segnale predetto, fornisce la soluzione cercata, coincidente ovviamente con la stima del segnale predetto, già fornita in precedenza:

$$\bar{t} = C_{ts} C_{vv}^{-1} v$$

la stessa espressione, sostituita nell'espressione del funzionale quadratico che l'ha determinata, fornisce la varianza dell'errore di stima del segnale predetto:

$$\sigma_{t-\bar{t}}^2 = \sigma_t^2 - C_{ts} C_{vv}^{-1} C_{st}$$

---

<sup>5</sup> L'operatore *diag*, applicato ad una matrice quadrata, estrae da questa gli elementi diagonalmente principali.

a sua volta coincidente con la varianza dell'errore di stima del segnale predetto, già fornita in precedenza. Si noti inoltre che la stima lineare del segnale, ottenuta con il metodo di Wiener – Kolmogorov, è una stima corretta, oltretutto ovviamente di minima varianza.

Si osservi infine come problemi di computabilità per il filtraggio, dovuti all'essere la matrice di covarianza del segnale  $C_{ss}$  una matrice, mentre la varianza del rumore  $\sigma_n^2$  è ovviamente uno scalare, consigliano di calcolare dapprima la stima del rumore e di ricavare successivamente, per differenza, la stima del segnale:

$$\hat{s} = v - \hat{n}$$

Gli stessi problemi di computabilità consigliano di modificare le espressioni di alcune matrici di covarianza, ottenendo espressioni più convenienti per il calcolo della matrice di covarianza dell'errore di stima del segnale filtrato:

$$C_{ee} = C_{ss} - C_{ss} C_{vv}^{-1} C_{ss} = (C_{vv} - \sigma_n^2 I) - (C_{vv} - \sigma_n^2 I) C_{vv}^{-1} (C_{vv} - \sigma_n^2 I) = \sigma_n^2 (I - \sigma_n^2 C_{vv}^{-1})$$

e della matrice di covarianza del segnale filtrato:

$$C_{\hat{s}\hat{s}} = C_{ss} - \sigma_n^2 (I - \sigma_n^2 C_{vv}^{-1})$$

Invece nella predizione, sempre per problemi e di computabilità, è conveniente decomporre la stima del segnale predetto, in un prodotto matriciale (utilizzando un vettore di servizio  $z$ ):

$$z = C_{vv}^{-1} v$$

da eseguirsi una sola volta, cui far seguire tanti prodotti scalari:

$$\hat{t} = C_{ts} z$$

quanti sono i punti dove si vuole avere la predizione<sup>6</sup>. Purtroppo non si hanno espressioni vantaggiose per il calcolo delle matrici di covarianza del segnale predetto e dell'errore di stima del segnale predetto.

---

<sup>6</sup> Le seguenti espressioni forniscono i valori estrapolati e/o predetti, nonché le discrepanze fra questi ed i valori osservati in eventuali punti di controllo, non utilizzati nelle precedenti operazioni d'interpolazione e filtraggio. A riguardo, si osservi come estrapolazioni e/o predizioni siano operazioni necessarie per il completamento (riempimento dei cosiddetti "buchi", densificazione, prolungamento cosiddetto "a breve") delle basi di dati, per la loro regolarizzazione e per cross-validazione dei dati e dei modelli.

ESTRAPOLAZIONE      valore estrapolato:  $\hat{y} = y_0 + \hat{v} + \bar{y} = b^T \hat{x} + \bar{y}$   
 discrepanza:       $\hat{v} = \hat{y} - (y_0 + \bar{y})$

PREDIZIONE      valore predetto:  $\hat{s}_p = \hat{t} = v_0 - \hat{\delta} + \bar{v} = c_{ts} z + \bar{v}$

Prima di concludere, si riportano le espressioni per il calcolo di **filtraggio e predizione per un processo a più componenti**<sup>7</sup>. In questa fase, particolare attenzione deve essere prestata nel riconoscere l'influenza delle crosscorrelazioni sulle successive elaborazioni, perché:

- ❑ crosscorrelazioni irrilevanti, separano le componenti del processo;
- ❑ crosscorrelazioni eccessive danno notevoli problemi computazionali, superabili solo operando dapprima a componenti separate e successivamente su tutte le componenti del processo residuo.

La matrice di covarianza del segnale, per un processo a tre componenti, si presenta composta da blocchi del tipo:

$$\text{discrepanza: } \hat{\delta} = (v_0 + \bar{v}) - \hat{t}$$

Si noti come, volendo eseguire in successione queste operazioni, occorre fissare la seguente uguaglianza:  $v_0 = \hat{v}$

$$\begin{aligned} \text{DUE ESTRAPOLAZIONI} \quad \text{valore estrapolato: } & \hat{y} - \hat{y}' = y_0 + \hat{v} + \bar{y} - (y_0' + \hat{v}' + \bar{y}') = a^T \hat{x} + \bar{y} - (b^T \hat{x}' + \bar{y}') \\ \text{discrepanza:} & \hat{v} - \hat{v}' = \hat{y} - (y_0 + \bar{y}) - (\hat{y}' - (y_0' + \bar{y}')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ESTRAPOLAZIONE E PREDIZIONE} \quad \text{valore predetto:} & \hat{y} - \hat{t} = y_0 + \hat{v} + \bar{y} - (v_0 - \hat{\delta} + \bar{v}) = a^T \hat{x} + \bar{y} - (c_{ts} z + \bar{v}) \\ \text{discrepanza:} & \hat{v} + \hat{\delta} = \hat{y} - (y_0 + \bar{y}) - (\hat{t} - (v_0 + \bar{v})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{DUE ESTRAPOLAZIONI} \quad \text{valore predetto:} & \hat{y} - \hat{y}' + \hat{t} = y_0 + \hat{v} + \bar{y} - (y_0' + \hat{v}' + \bar{y}') + v_0 - \hat{\delta} + \bar{v} = \\ \text{E PREDIZIONE} & = a^T \hat{x} + \bar{y} - (b^T \hat{x}' + \bar{y}') + c_{ts} z + \bar{v} \\ \text{discrepanza:} & \hat{v} - \hat{v}' - \hat{\delta} = \hat{y} - (y_0 + \bar{y}) - (\hat{y}' - (y_0' + \bar{y}')) + \hat{t} - (v_0 + \bar{v}) \end{aligned}$$

La seguente legenda fornisce il significato di tutti i simboli utilizzati:

- $y_0$  quantità osservate, riportate a media nulla;
- $\bar{y}$  valori medi delle quantità osservate;
- $\hat{a}, \hat{b}$  funzionali della posizione dei dati, secondo le leggi di interpolazione adottate;
- $\hat{x}$  valore dei coefficienti dell'interpolazione.
- $v_0$  quantità osservate, riportate a media nulla;
- $\bar{v}$  valore medio delle quantità osservate;
- $c_{ts}$  crosscovarianze fra un valore predetto e i valori filtrati, secondo le funzioni di covarianza adottate;
- $z$  valore dei coefficienti ottenuti con il filtraggio.

Si badi come il calcolo delle discrepanze, possibile solo in eventuali punti di controllo, sia un'operazione sempre necessaria per poter correttamente dare un giudizio sulla bontà delle operazioni eseguite.

<sup>7</sup> Una lunghezza di correlazione elevata diminuisce la sparsità della matrice di covarianza, rendendo praticamente incomputabile la soluzione, specie quando si operi su campioni di notevole dimensioni. Per questa ragione è conveniente utilizzare strategie di calcolo capaci di aggirare l'ostacolo. L'esecuzione di un pre – filtraggio, ad es., utilizzando funzioni splines, e l'adozione di funzioni di covarianza finite permettono di ottenere problemi praticamente computabili.

$$\begin{matrix}
 & & & \text{punto } j \\
 & & x_j & y_j & z_j \\
 \text{punto } i & \begin{matrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{matrix} & \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(r_{ij}) & \gamma_{xy}(r_{ij}) & \gamma_{xz}(r_{ij}) \\ \gamma_{yy}(r_{ij}) & \gamma_{yz}(r_{ij}) & \\ \text{sim.} & & \gamma_{zz}(r_{ij}) \end{bmatrix} & = & c_{ss}(r_{ij})
 \end{matrix}$$

La presenza di punti con dati non – completi, in ogni componente, dà origine a 7 combinazioni distinte di dati, cui corrispondono 49 diversi tipi di blocchi, quadrati o rettangolari, di dimensione variabile fra 1x1 e 3x3<sup>8</sup>. Anche la matrice diagonale di covarianza del rumore è sostituita da una matrice diagonale a blocchi, dove un blocco, per un processo a tre componenti, è del tipo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{n_{xx}}^2 & \sigma_{n_{xy}} & \sigma_{n_{xz}} \\ & \sigma_{n_{yy}}^2 & \sigma_{n_{yz}} \\ \text{sim.} & & \sigma_{n_{zz}}^2 \end{bmatrix} = c_{nn}$$

Si noti che, come per il segnale, anche le dimensioni della matrice di covarianza del rumore variano in funzione del numero di dati, ovvero di componenti, presenti in un punto.

Di seguito sono riportate le espressioni utilizzate per il filtraggio e la predizione, nella forma computazionalmente più agevole.

Soluzione del sistema<sup>9</sup>:

$$z = C_{vv}^{-1} v = ( J \otimes C_{ss}(r_{ij}) + \Delta^{(-1)}(i \otimes c_{nn}) )^{-1} v$$

<sup>8</sup> Le tecniche di riempimento della matrice di covarianza richiedono modalità algoritmiche specifiche. Infatti mentre nel caso di un processo ad un parametro ordinatore vengono impiegati algoritmi diretti con memorizzazione a banda delle matrici, nel caso di processi a due o tre parametri ordinatori la memorizzazione delle matrici sparse avviene in forma compatta e l'algoritmo di soluzione è di tipo iterativo.

<sup>9</sup> Questa espressione, come le seguenti, è del tutto rigorosa se tutti i blocchi hanno la stessa dimensione; in caso contrario l'automatismo rappresentato dal prodotto di Kronecker viene meno. Allora si rende necessario memorizzare la sequenza d'arrivo dei blocchi di differente dimensione. Il loro successivo utilizzo è abbastanza agevole, purché si disponga opportunamente di strumenti informatici, quali contatori, puntatori ed altre forme d'indirizzo che si rendano necessarie allo scopo. Una soluzione possibile consiste nell'attribuire il codice:

- 2<sup>0</sup>=1                    in presenza del 1° dato
- 2<sup>1</sup>=2                    in presenza del 2° dato
- 2<sup>2</sup>=4                    in presenza del 3° dato

in modo tale che i 7 casi sopraccitati siano identificati con il codice composto:

- 1                        in presenza del 1° dato
- 2                        in presenza del 2° dato
- 1+2=3                in presenza del 1° e 2° dato
- 4                        in presenza del 3° dato

Stima del rumore:  $\hat{n} = \Delta^{(-1)} (i \otimes c_{nn}) z$

Stima del segnale filtrato:  $\hat{s} = v - \hat{n}$

Stima del segnale predetto:  $\hat{s}_p = c_{s_p s} z = (i^T \otimes c_{ss} (r_{pi})) z$

Matrice di covarianza del rumore residuo:  $C_{\hat{n}\hat{n}} = \Delta^{(-1)} (i \otimes c_{nn}) C_{vv}^{-1} \Delta^{(-1)} (i \otimes c_{nn})$

Matrice di covarianza dell'errore di stima:  $C_{ee} = \Delta^{(-1)} (i \otimes c_{nn}) - C_{\hat{n}\hat{n}}$

Matrice di covarianza del segnale filtrato:  $C_{\hat{s}\hat{s}} = C_{ss} - C_{ee}$

Nelle suddette espressioni, alcuni simboli sono spiegati nella seguente legenda:

- $i$  = vettore colonna avente tutti gli elementi uguali ad uno, di dimensione pari al numero dei punti;
- $J$  = matrice quadrata avente tutti gli elementi uguali ad uno, di dimensioni pari al numero dei punti;
- $\otimes$  = prodotto matriciale di Kronecker<sup>10</sup>;
- $\Delta$  = operatore capace di estrarre da una matrice quadrata tutti i blocchi diagonali, aventi ciascuno la dimensione del blocco  $c_{nn}$ ,

mentre tutti gli altri sono già stati illustrati in precedenza.

#### 4. Stime di covarianza <sup>11</sup>

Le stime di covarianza si occupano dello studio di un modello del secondo ordine, con l'intento di mettere in evidenza la dispersione e la dipendenza (lineare) in un insieme di dati, tramite la stima di opportune varianze e covarianze, e possono essere introdotte facendo riferimento alla teoria dei processi stocastici (di cui si intende brevemente parlare nella nota sottostante <sup>12</sup>, data la loro importanza e rilevanza nell'ambito della

1+4=5	<i>in presenza del 1° e 3° dato</i>
2+4=6	<i>in presenza del 2° e 3° dato</i>
1+2+4=7	<i>in presenza del 1°, 2° e 3° dato</i>

ed i 49 casi riguardanti le corrispondenti matrici di covarianza sono identificati con il codice  $7(i-1)+j$ , essendo  $i$  e  $j$  i codici composti dei due dati, di volta in volta, coinvolti.

<sup>10</sup> Si chiama prodotto di Kronecker fra due matrici  $A$  e  $B$ , aventi rispettivamente dimensioni  $(m, n)$  e  $(k, l)$ , la matrice  $C = A \otimes B$ , avente dimensioni  $(km, ln)$ , ottenuta moltiplicando (con la regola del prodotto di una matrice per un numero) la seconda matrice per tutti gli elementi della prima matrice:

$$C = A \otimes B = [a_{ij} B] \quad \forall ij$$

<sup>11</sup> Questo paragrafo riprende ed aggiorna quanto esposto in: Mussio L. (1984): Il metodo della collocazione mionimi quadrati e le sue applicazioni per l'analisi statistica dei risultati delle compensazioni. In: *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 305-318. Per una versione più breve, seppure maggiormente aggiornata, si veda anche: Crippa B., Mussio L. (1992): I processi stocastici: il metodo della collocazione. In: F. Crosilla, L. Mussio (Ed's) *I sistemi informativi territoriali: fondamenti e applicazioni al controllo e alla gestione del territorio*. CISM, Udine, p. 107-151.

<sup>12</sup> Si chiama processo stocastico la famiglia di funzioni  $X(\xi, \theta)$  definite in tutti i punti del loro campo di esistenza e differenziate fra loro in ogni punto dai valori assunti dalla variabile casuale  $\xi$ , la cui distribuzione di probabilità  $P(\xi)$  viene estesa a tutti i punti del campo

di esistenza  $P(X(\xi, \theta)) = P(\xi)$ . Si chiama realizzazione di un processo stocastico una funzione  $x(\xi, \theta)$  ottenuta effettuando una estrazione  $\xi_0$  della variabile casuale.

Come un processo di astrazione fa diventare una variabile statistica, cioè un insieme di valori argomentali, un campione estratto da una variabile casuale, così un analogo processo di astrazione fa diventare una sequenza temporale o piana o altro, cioè un insieme di valori argomentali ordinati nel tempo o disposti su un piano o su altro, un campione estratto da una realizzazione di un processo stocastico, avendo assunto l'insieme delle coordinate, che definiscono la sequenza temporale o piana o altro, come gruppo d'invarianza per la definizione del processo stocastico stesso.

Si chiamano momenti d'insieme del processo stocastico le statistiche calcolate sulla variabile casuale  $p$  in ogni punto e dell'insieme di punti del campo di esistenza della famiglia di funzioni costituente il processo stocastico.

In particolare, hanno interesse la media e la varianza:

$$\mu(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi, \theta) d\xi$$

$$\sigma^2(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mu(\theta))^2 f(\xi, \theta) d\xi$$

e la (auto) covarianza:

$$\sigma(\theta_1, \theta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_1 - \mu(\theta_1)) (\xi_2 - \mu(\theta_2)) \cdot f(\xi_1, \xi_2, \theta_1, \theta_2) d\xi_1 d\xi_2$$

essendo  $f(\xi, \theta)$  e  $f(\xi_1, \xi_2, \theta_1, \theta_2)$  le funzioni densità di probabilità, rispettivamente, di primo e di secondo ordine. Queste ultime e la funzione densità di probabilità di ordine  $n$ :

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \partial^n F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) / \partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_n$$

si ricavano dalla distribuzione di probabilità, rispettivamente, di ordine primo, secondo e  $n$ , essendo:

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = P(\xi(\theta_1) \leq \xi_1, \xi(\theta_2) \leq \xi_2, \dots, \xi(\theta_n) \leq \xi_n)$$

la distribuzione di probabilità di ordine  $n$ .

Si chiama processo stocastico stazionario in senso forte quel particolare processo stocastico per il quale si ha che le distribuzioni di ogni ordine siano uguali in ogni punto del suo campo di esistenza:

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \theta_1 + \Delta\theta, \dots, \theta_n + \Delta\theta) \forall \Delta\theta$$

Un processo stocastico, per il quale le distribuzioni di primo e secondo ordine siano uguali in tutti i punti del suo campo di esistenza è detto stazionario in senso debole di ordine 2. Si noti come un processo stocastico normale, se è stazionario in senso debole di ordine 2, allora è anche un processo stocastico stazionario in senso forte, in quanto la media, la varianza e le (auto) covarianze sono statistiche sufficienti per la conoscenza di tale processo. In ogni caso, si ha un valore costante per la media:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi) d\xi = \text{cost}$$

per la varianza:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mu)^2 f(\xi) d\xi = \text{cost}$$

mentre la (auto)covarianza non dipende dalla posizione dei punti ma solo dalle componenti del vettore differenza fra le posizioni dei punti stessi ( $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ ):

$$\sigma(\Delta\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_1 - \mu)(\xi_2 - \mu) f(\xi_1, \xi_2, \Delta\theta) d\xi_1 d\xi_2$$

Si osservi innanzitutto che, nel caso di una sequenza piana, il calcolo della (auto) covarianza richiede spesso di formulare, oltre all'ipotesi base di stazionarietà in senso debole di ordine 2 (cioè di invarianza per la traslazione), anche l'ipotesi aggiuntiva di isotropia (cioè di invarianza per rotazione). Così un solo parametro ordinatore, fa sì che l'(auto) covarianza dipenda solo dal modulo del vettore differenza fra le posizioni dei punti. Invece il caso di una sequenza temporale non richiede di formulare alcuna ipotesi aggiuntiva per il calcolo della (auto) covarianza.

Si osservi poi che non sempre la sequenza temporale o piana o altro può considerarsi un campione estratto da una realizzazione di un processo stocastico stazionario, sia pure in senso debole, cosa d'altra parte molto utile per il suo successivo trattamento stocastico. In questo caso è necessario rimuovere con un pretrattamento deterministico una parte sistematica (detta tendenza), così che la sequenza costituita dai residui risulti un campione estratto da una realizzazione di un processo stocastico stazionario, solitamente in senso debole di ordine 2.

Si chiama processo stocastico stazionario ed ergodico quel particolare processo stocastico stazionario per il quale i momenti "temporali", cioè i momenti calcolati lungo una realizzazione, siano identicamente uguali ai momenti d'insieme. In particolare per un processo stocastico stazionario ed ergodico di ordine 2 si ha l'ergodicità della media e della varianza:

statistica avanzata, per quanto riguarda tanto l'analisi dei dati, quanto la statistica computazionale). I passi della procedura di attuazione di questa metodologia comprendono nell'ordine: la stima empirica delle varianze e delle covarianze, la scelta e l'interpolazione delle funzioni di covarianza modello e, se del caso, la loro modulazione in forma di funzioni di covarianze finite.

Per ipotesi, i dati possono essere visti come un campione estratto da una realizzazione di un processo stocastico continuo, lineare, normale, stazionario del secondo ordine, con media nulla e funzione di covarianza dipendente da un'opportuna norma, scelta e fissata, funzione dei parametri del dominio:

$$C(P_1, P_2) = C(\|P_1 - P_2\|).$$

$$\mu = \lim_{V(\theta) \rightarrow \infty} \frac{1}{V(\theta)} \int_{V(\theta)} \xi(\theta) d\theta$$

$$\sigma^2 = \lim_{V(\theta) \rightarrow \infty} \frac{1}{V(\theta)} \int_{V(\theta)} (\xi(\theta) - \mu)^2 d\theta$$

e della (auto) covarianza

$$\sigma(\Delta\theta) = \lim_{V(\theta) \rightarrow \infty} \frac{1}{V(\theta)} \int_{V(\theta)} (\xi(\theta) - \mu)(\xi(\theta + \Delta\theta) - \mu) d\theta$$

avendo indicato con  $V(\theta)$  la regione di spazio (intervallo di tempo, porzione di piano, altro) relativa al campo di esistenza della famiglia di funzioni costituente il processo stocastico.

Si noti come accade spesso che si abbia a disposizione una sola sequenza temporale o piana o altro, ovvero un campione estratto da una sola realizzazione del processo stocastico. In questo caso è indispensabile fare l'ipotesi di ergodicità del processo stocastico per poterne stimare i momenti, in particolare, come già detto, la media, la varianza e la (auto) covarianza. La media calcolata su un campione estratto da una sola realizzazione di un processo stocastico è una stima corretta e consistente della media d'insieme, se lo stesso processo è stazionario in senso debole di ordine 2, cioè ergodico di ordine 1. La varianza e la (auto) covarianza calcolate su un campione estratto da una sola realizzazione di un processo stocastico sono stime corrette e consistenti, rispettivamente, della varianza e delle (auto) covarianze d'insieme, se lo stesso processo stocastico è stazionario in senso debole di ordine 4 oppure normale e stazionario in senso debole di ordine 2, cioè ergodico di ordine 2. La covarianza e tutti i valori di (auto) covarianza costituiscono insieme la funzione di (auto) covarianza  $\gamma(\Delta\theta)$  del processo stocastico; questa funzione deve godere della proprietà di definita positività. Ciò significa che, dato una qualsiasi sequenza temporale o piana o altro, e costruita la corrispondente matrice di covarianza  $C(P, \Delta\theta)$ , devono valere le seguenti relazioni:

$$\mu^T C(P, \Delta\theta) \mu \geq 0 \quad \forall \mu$$

$$\mu^T C(P, \Delta\theta) \mu = 0 \quad \mu \equiv 0$$

ovvero anche la matrice di covarianza deve risultare in ogni caso una matrice definita positiva. Come evidente questa definizione non è operativa; tuttavia una condizione operativa è fornita dal seguente teorema.

Una funzione è definita positiva se e solo se la sua trasformata di Fourier, cioè il suo spettro di potenza  $S(\omega)$ , è una funzione non - negativa:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\Delta\theta} \gamma(\Delta\theta) d^n \Delta\theta \geq 0 \quad \forall \omega$$

essendo  $j$  l'unità immaginaria ( $j^2 = -1$ ). Particolarizzando questa relazione per il caso  $n = 1$ , ovvero per una sequenza temporale, si ottiene una trasformata "coseno":

$$S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega\Delta T) \gamma(\Delta T) d\Delta T \geq 0 \quad \forall \omega (\Delta T \geq 0)$$

e per il caso  $n = 2$ , ovvero per una sequenza piana, avendo fatto anche l'ipotesi aggiuntiva di isotropia, una trasformata di Hankel:

$$S(\omega) = \pi/2 \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(\omega\Delta P) \gamma(\Delta P) d\Delta P \geq 0 \quad \forall \omega$$

essendo  $J_0$  la funzione di Bessel di ordine zero.

(Questa nota riprende quanto esposto da: Barzaghi R., Sansò F. (1983): Sulla stima empirica della funzione di covarianza. In: Boll. di Geodesia e Scienze Affini, n. 4/83.)

Una funzione di covarianza può avere dominio monodimensionale, oppure bidimensionale (o tridimensionale, ecc.), in corrispondenza al parametro ordinatore prescelto, il tempo (o una coordinata ascissa), oppure: una qualsiasi norma (ad es., la distanza pitagorica in norma  $L_2$ , invariante lungo una circonferenza o la superficie di una sfera, in ipotesi d'isotropia, o la distanza Manhattan in norma  $L_1$ ,<sup>13</sup> invariante lungo il contorno di un quadrato o la superficie di un cubo, operando una decomposizione ortogonale lungo le coordinate del dominio, oppure altro ancora) della posizione geografica (o spaziale). Si osservi poi che, se le grandezze sono vettoriali, ad es., a due o a tre componenti, la funzione di covarianza del processo stocastico è costituita rispettivamente da due funzioni di autocovarianza ( $\gamma_{xx}, \gamma_{yy}$ ) più una funzione di crosscovarianza ( $\gamma_{xy}$ ), nel primo caso, e da tre funzioni di autocovarianza ( $\gamma_{xx}, \gamma_{yy}, \gamma_{zz}$ ) più tre funzioni di crosscovarianza ( $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ), nel secondo.

La **stima empirica** delle funzioni di autocovarianza, a partire da un campione di  $n$  dati a media nulla ( $v = x - \bar{x}$ ), consiste nel calcolo delle seguenti statistiche:

- varianza generale:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n v_i^2$$

- covarianze relative, nel caso monodimensionale, ad intervalli, ad es., di tempo:  $\Delta T$ , crescenti:

$$\gamma(\Delta T_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} v_j$$

con:  $T_{k-1} < |t_i - t_{ju}| \leq T_k$  e  $\Delta T_k = T_k - T_{k-1}$

e nel caso bidimensionale (o tridimensionale), a corone circolari (o sferiche):  $\Delta P$ , crescenti:

$$\gamma(\Delta P_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} v_j$$

con:  $P_{k-1} < \|Q_i - Q_j\| \leq P_k$  e  $\Delta P_k = P_k - P_{k-1}$

- coefficienti di correlazione:  $\rho = \gamma / \sigma^2$

---

<sup>13</sup> Si noti che la distanza Manhattan implica separabilità ortogonale ed offre un notevole guadagno dal punto di vista numerico.

La stima empirica delle funzioni di crosscovarianza fra le componenti, ad es.,  $x$  (dove:  $\dim x = n$ ) e  $y$  (dove:  $\dim y = m$ ), di grandezze vettoriali, a partire da un campione doppio di  $l$  dati comuni a media nulla ( $v = x - \bar{x}$ ,  $u = y - \bar{y}$ ), consiste nel calcolo delle seguenti statistiche:

- covarianza generale:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l v_i u_i$$

- covarianze relative, nel caso monodimensionale, ad intervalli, ad es., di tempo:  $\Delta T$ , crescenti:

$$\gamma_{xy}(\Delta T_k) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_j} u_j + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} v_j \right)$$

con:  $T_{k-1} < |t_i - t_j| \leq T_k$  e  $\Delta T_k = T_k - T_{k-1}$

nel caso bidimensionale (o tridimensionale), a corone circolari (o sferiche):  $\Delta P$ , crescenti:

$$\gamma_{xy}(\Delta P_k) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_j} u_j + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} v_j \right)$$

con:  $P_{k-1} < \|Q_i - Q_j\| \leq P_k$  e  $\Delta P_k = P_k - P_{k-1}$

- coefficienti di correlazione:  $\rho_{xy} = \gamma_{xy} / \sigma_x \sigma_y$

**L'ottimizzazione delle stime empiriche** delle funzioni di covarianza, poiché solitamente i dati non sono regolarmente equispaziati, necessita di trovare l'intervallo ottimale per la prima stima empirica di autocovarianza. Infatti un intervallo troppo piccolo risulta pressoché vuoto, mentre uno troppo grande contiene dati di provenienza troppo diversa. In entrambi i casi le stime risultano depresse.

Un criterio empirico, ma efficace, individua quale intervallo ottimale quello che rende minima la differenza fra la varianza generale e la covarianza al primo passo dell'autocorrelazione ( $\sigma^2 - \gamma_1$ ), ovvero massimizza la stima della prima autocovarianza. Questo criterio non è arbitrario, ma corrisponde all'esigenza di minimizzare il rumore incorrelato  $n$  (dall'inglese: noise) per far risaltare il segnale stocastico  $s$ . Si ha infatti:

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 - \sigma_s^2 \cong \sigma^2 - \gamma_1 = \tilde{\sigma}_n^2 \quad \Rightarrow \quad \max \gamma_1 = \min \tilde{\sigma}_n^2 \cong \min \sigma_n^2$$

In pratica, la ricerca dell'intervallo ottimale che determina la minimizzazione del rumore incorrelato, si effettua facendo crescere l'ampiezza dell'intervallo, da un valore limite inferiore ad un valore limite superiore. Infatti occorre trovare il minimo assoluto e non un qualsiasi minimo relativo.

Trovato l'intervallo ottimale (ad es., di tempo  $(\Delta T)$  o di lunghezza  $(\Delta P)$ ), le stime empiriche delle funzioni di autocovarianza e di crosscovarianza sono calcolate, rispettivamente, a  $\Delta T / 2$ ,  $3\Delta T / 2$ ,  $5\Delta T / 2$ , ecc. e  $\Delta P / 2$ ,  $3\Delta P / 2$ ,  $5\Delta P / 2$ , ecc., in modo tale da situarsi esattamente alla metà di ogni intervallo.

Se le grandezze sono vettoriali la determinazione dell'intervallo ottimale si ottiene minimizzando la traccia (somma degli elementi diagonali) della matrice di covarianza del rumore incorrelato:

$$\phi_{(2)} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \min \quad \text{oppure:} \quad \phi_{(3)} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = \min$$

essendo la traccia invariante per rotazione<sup>14</sup>

Invece supponendo di sovrapporre ad ogni campo di punti un reticolo regolare e sfruttando la separabilità ortogonale tra le coordinate, è facile ottenere le stime di covarianza per ogni riga e colonna dei reticoli impiegati. Le medie delle stime di covarianza per ogni riga e colonna forniscono le funzioni empiriche di covarianza per le righe e le colonne.

La stima della covarianza continua moltiplicando le righe di covarianze stimate per le colonne di covarianze stimate nei processi stocastici 2D in modo da ottenere la funzione di covarianza dei dati. Nel caso di processi stocastici 3D, la separabilità ortogonale lungo le tre coordinate porta alla stima delle covarianze per ogni riga, per ogni colonna e per ogni pila. Le rispettive medie forniscono le funzioni empiriche di autocovarianza e il prodotto lungo le tre componenti di covarianza rappresenta la funzione di covarianza dei dati.

Lo stesso procedimento deve essere seguito per la determinazione della funzione di crosscovarianza di miglior adattamento e per la stima della varianza del rumore. Si noti come la sovrapposizione di un reticolo sia immediata nel caso di campi grigliati e del tutto agevole nel caso di campi costituiti da seminati densi di punti. Al contrario, campi costituiti da seminati radi di punti pongono difficoltà, non tanto alla sovrapposizione di un reticolo, quanto e soprattutto alla stessa operazione di stima di covarianza.

La **scelta ed interpolazione delle funzioni di covarianza modello** permette di adattare, alle stime empiriche, quegli opportuni modelli capaci di simulare proprio il comportamento delle funzioni di covarianza. Ciò significa utilizzare per l'interpolazione delle stime empiriche solo funzioni definite positive<sup>15</sup> su un dominio, ad es., monodimensionale, oppure bidimensionale (o tridimensionale), in corrispondenza al parametro ordinatore prescelto.

Esistono diversi approcci nella scelta di un'opportuna classe di funzioni di covarianza. Una possibile scelta è basata sull'analisi della concavità o convessità in una regione vicina all'origine, sulla possibile presenza di uno zero e, se esistono zeri, sui massimi e minimi relativi. Il tipo di modello viene definitivamente fissato

<sup>14</sup> L'operatore traccia, applicato ad una matrice quadrata, calcola la somma degli elementi diagonali principali di questa.

<sup>15</sup> Si chiama funzione definita positiva una funzione la cui corrispondente matrice, costruita su un qualsiasi insieme di punti disposti, ad es., su una retta, oppure su un piano (o nello spazio), soddisfi le seguenti relazioni:

imponendo che la funzione interpolante passi esattamente per la prima stima empirica di covarianza.

Di seguito sono riportati alcuni esempi di funzioni di covarianza modello (Le prime due funzioni, identiche alle distribuzioni esponenziale e normale, sono interamente positive, mentre le seconde due ottenute moltiplicando le prime funzioni per una parabola, centrale capovolta e traslata di uno sull'asse delle ordinate, sono alternate, presentando valori dapprima positivi e successivamente negativi):

$$\gamma(\xi) = ae^{-b\xi}$$

$$\gamma(\xi) = ae^{-b\xi^2}$$

$$\gamma(\xi) = ae^{-b\xi}(1 - c\xi^2) \quad \text{con } b \geq \sqrt{2c} \text{ nel caso monodimensionale}$$

$$\text{con } b \geq \sqrt{6c} \text{ nel caso bidimensionale}$$

$$\gamma(\xi) = ae^{-b\xi^2}(1 - c\xi^2) \quad \text{con } b \geq c/2 \text{ nel caso mono dimensionale}$$

$$\text{con } b \geq c \text{ nel caso bidimensionale}$$

Si noti come, nel caso tridimensionale, la determinazione esatta della disuguaglianza sul coefficiente di smorzamento sia alquanto complessa; comunque un forte coefficiente di smorzamento garantisce, in ogni caso, la definita positività delle funzioni di covarianza.

Per la costituzione di altre funzioni di covarianza modello valgono i seguenti teoremi:

- la combinazione lineare (a coefficienti positivi) di funzioni di covarianza è una funzione di covarianza;
- il prodotto di funzioni di covarianza è una funzione di covarianza;
- la convoluzione di una funzione densità di probabilità, con se stessa, è una funzione di covarianza.

In particolare, usando il secondo teorema, è possibile costruire alcune funzioni di covarianza modello oscillanti, facendo uso di funzioni trigonometriche:

$$\gamma = ae^{-b|\xi|} \cos(c\xi) \quad (\text{limitatamente al solo caso monodimensionale})$$

$$\gamma = ae^{-b\xi^2} \cos(c\xi) \quad (\text{limitatamente al solo caso monodimensionale})$$

$$\gamma = ae^{-b|\xi|} \frac{\sin(c\xi)}{c\xi}$$

$$\gamma = ae^{-b\xi^2} \frac{\sin(c\xi)}{c\xi}$$

oppure di funzioni di Bessel:

---


$$u^T Q u \geq 0 \quad \forall u \quad u^T Q u = 0 \quad \Rightarrow u \equiv 0$$

$$\gamma = ae^{-b|\xi|} J_0(c\xi) \quad (\text{limitatamente ai soli casi monodimensionale e bidimensionale})$$

$$\gamma = ae^{-b\xi^2} J_0(c\xi) \quad (\text{limitatamente ai soli casi monodimensionale e bidimensionale})$$

$$\gamma = 2ae^{-b|\xi|} \frac{J_1(c\xi)}{c\xi}$$

$$\gamma = 2ae^{-b\xi^2} \frac{J_1(c\xi)}{c\xi}$$

Le strategie per l'identificazione di una funzione di covarianza modello, adatto per l'interpolazione delle stime empiriche e il calcolo dei coefficienti delle curve, sono certamente parecchie e fra loro differenziate. Una strategia possibile consiste in una procedura robusta di stima dei parametri incogniti delle funzioni di covarianza con modello non – lineare.

Allora l'identificazione del modello si articola nello studio dell'andamento (concavo o convesso) in un intorno dell'origine, nella ricerca degli eventuali zeri e, se vi è almeno uno zero, dei massimi e dei minimi relativi (ovviamente del solo minimo relativo se lo zero è uno soltanto), altrimenti del punto di dimezzamento della funzione di covarianza. Come evidente, questa strategia è fondata sulla preoccupazione, notevolmente suffragata dall'esperienza fatta, di interpolare al meglio i primi valori delle stime empiriche, sicuramente i più importanti ed i più significativi.

Per quanto riguarda lo studio dell'andamento in un intorno dell'origine, la differenza finita seconda ( $\Delta^2\gamma$ ) calcolata sui primi tre valori delle stime empiriche:

$$\Delta^2\gamma = (\gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3) / \Delta\xi^2$$

risulta positiva in presenza di una concavità e negativa in presenza di una convessità; ciò consente di scegliere fra una funzione esponenziale ed una funzione normale.

Eseguita la scelta fra una funzione esponenziale ed una funzione normale, se tutti i valori delle stime empiriche sono positivi, il calcolo del coefficiente dell'esponente ( $b$ ), cioè di smorzamento, si ottiene, dati due valori delle stime empiriche e passando ai logaritmi, rispettivamente per la funzione esponenziale e per quella normale:

$$b = \frac{\ln \gamma_1 - \ln \gamma_2}{|\xi_2| - |\xi_1|}$$

oppure:

$$b = \frac{\ln \gamma_1 - \ln \gamma_2}{\xi_2^2 - \xi_1^2}$$

Se invece non tutti i valori delle stime empiriche sono positivi:

- ❑ se esiste un solo zero, si utilizzano funzioni modello di tipo alternato, ovvero si combinano a prodotto le funzioni esponenziale o normale con una parabola centrale capovolta e traslata di uno sull'asse delle ordinate;
- ❑ al contrario, se esistono più zeri, si utilizzano funzioni modello di tipo oscillante, ovvero si combinano a prodotto le funzioni esponenziale o normale con le funzioni trigonometriche e di Bessel.

Individuata una coppia di valori consecutivi delle stime empiriche di segno opposto, l'ascissa dello zero ( $\xi_0$ ) è facilmente calcolata quale intersezione con l'asse  $\xi$  della retta passante per entrambi i punti della coppia individuata:

$$\xi_0 = \frac{\xi_{i+1}|\gamma_i| + \xi_i|\gamma_{i+1}|}{|\gamma_i| + |\gamma_{i+1}|}$$

Se esiste uno solo zero, il coefficiente della parabola ( $c$ ) è calcolato annullando l'espressione:  $1 - c\xi_0^2 = 0$ ,

$$c = 1/\xi_0^2$$

Dopodiché il calcolo del coefficiente dell'esponente ( $b$ ), cioè di smorzamento, si ottiene, dati due valori delle stime empiriche e passando ai logaritmi, rispettivamente per la funzione esponenziale e per quella normale:

$$b = \frac{\ln \frac{\gamma_1}{1 - c\xi_1^2} - \ln \frac{\gamma_2}{1 - c\xi_2^2}}{|\xi_2| - |\xi_1|} \quad \text{oppure:} \quad b = \frac{\ln \frac{\gamma_1}{1 - c\xi_1^2} - \ln \frac{\gamma_2}{1 - c\xi_2^2}}{\xi_2^2 - \xi_1^2}$$

Se il coefficiente dell'esponente ( $b$ ) delle funzioni esponenziale o normale, risulta minore di  $\sqrt{2c}$  o di  $c/2$ , nel caso monodimensionale, e di  $\sqrt{6c}$  o di  $c$ , nel caso bidimensionale, questo deve comunque essere posto uguale a questi valori, costituendo essi i limiti inferiori, perché una funzione di tipo alternato sia una funzione definita positiva. Nel caso tridimensionale, data la difficoltà di individuare il limite esatto della disuguaglianza, è opportuno che il coefficiente dell'esponente ( $b$ ) delle funzioni esponenziale o normale sia, in ogni caso, maggiore di  $\sqrt{24c}$  o di  $2c$ .

Al contrario, se esistono più zeri, il coefficiente della funzione trigonometrica o di Bessel ( $c$ ), cioè di oscillazione, si ottiene come media aritmetica dei primi rapporti di scala (ad es., i primi due):

$$c = \frac{1}{2} \left( \frac{x_{0_1}}{\xi_{0_1}} + \frac{x_{0_2}}{\xi_{0_2}} \right)$$

fra gli zeri ricavati dalle stime empiriche ( $\xi_0$ ) e gli zeri delle funzioni standard ( $x_0$ ) 16:

---

16 Gli zeri delle curve standard delle funzioni di Bessel, come le ascisse e le ordinate dei massimi e dei minimi relativi, possono essere approssimativamente ricavati anche dal primo termine dell'espansione asintotica di Poisson per la funzione di Bessel di ordine zero:

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

e di Hansen per la funzione di Bessel di ordine uno:

$$\cos x = 0 \quad \text{per } x_0 \cong 1.571, 4.721, 7.854, 10.996, 14.137, \dots$$

$$\sin x = 0 \quad \text{per } x_0 \cong 3.142, 6.283, 9.425, 12.556, 15.708, \dots$$

$$J_0(x) = 0 \quad \text{per } x_0 \cong 2.410, 5.520, 8.650, 11.780, 14.930, \dots$$

$$J_1(x) = 0 \quad \text{per } x_0 \cong 3.830, 7.020, 10.170, 13.330, 16.500, \dots$$

Si ricordi che le funzioni  $\sin x/x$  e  $2J_1(x)/x$  per  $x$  che tende a zero hanno limite uguale ad uno. La scelta fra le funzioni oscillanti dipende dal rapporto fra la differenza di ascissa dei primi due zeri e l'ascissa del primo zero: se risulta maggiore di 1.50, con funzioni trigonometriche, oppure di 1.07, con funzioni di Bessel, si adottano rispettivamente la prima e la terza funzione, ed altrimenti la seconda e la quarta. In ogni caso, data la scarsa differenziazione in termini di zeri fra le due funzioni di Bessel, in uso, ed il maggiore smorzamento di quella di ordine uno, rispetto a quella di ordine zero, quest'ultima è solitamente preferita. Tutto ciò non si pone nell'uso delle funzioni trigonometriche, essendo queste ben differenziate in termini di zeri.

Trovato il coefficiente di oscillazione ( $c$ ), per trovare il coefficiente dell'esponente ( $b$ ), cioè di smorzamento è necessario trovare i massimi ed i minimi relativi delle funzioni trigonometriche o di Bessel. Date le ascisse dei massimi e dei minimi relativi delle funzioni standard ( $x_+, -$ ):

$$|\cos x| = \max \quad \text{per } x \cong 3.142, 6.283, 9.425, 12.566, \dots$$

$$|\sin x| = \max \quad \text{per } x \cong 4.721, 7.854, 10.996, 14.137, \dots$$

$$|J_0(x)| = \max \quad \text{per } x \cong 3.830, 7.020, 10.170, 13.330, \dots$$

$$|J_1(x)| = \max \quad \text{per } x \cong 5.520, 8.650, 11.780, 14.930, \dots$$

si ricavano da tavole numeriche delle funzioni trigonometriche o di Bessel le corrispondenti ordinate ( $f_{+,-}$ ).

Dalle stime empiriche, si ricavano poi le ordinate dei valori massimi e minimi ( $\gamma_{+,-}$ ). Si noti come l'utilizzo diretto dei valori delle stime empiriche, in corrispondenza dei massimi o dei minimi delle funzioni standard, per le inevitabili fluttuazioni delle stesse stime empiriche, potrebbe portare a tutti altri valori delle ordinate e, in generale, a sovrastimare lo smorzamento. Il calcolo del coefficiente dell'esponente ( $b$ ), cioè di smorzamento, si ottiene come media aritmetica dei primi rapporti di scala (ad es., i primi due) fra i valori ricavati dalle stime empiriche ( $\gamma_{+,-}$ ) e le ordinate delle funzioni standard ( $f_{+,-}$ ):

$$\cos x = -1, 1, -1, 1, \dots$$

$$\sin x = -1, 1, -1, 1, \dots$$

$$J_0(x) = -0.403, 0.300, -0.259, 0.218, \dots$$

---


$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$J_1(x) = -0.346, 0.273, -0.233, 0.207, \dots$$

essendo il singolo rapporto di scala, rispettivamente, per la funzione esponenziale e per quella normale:

$$b = \frac{\ln \frac{\gamma_1}{f_1} - \ln \frac{\gamma_2}{f_2}}{c|x_2| - c|x_1|} \quad \text{oppure:} \quad b = \frac{\ln \frac{\gamma_1}{f_1} - \ln \frac{\gamma_2}{f_2}}{cx_2^2 - cx_1^2}$$

Se il coefficiente dell'esponente ( $b$ ), cioè di smorzamento, risulta negativo, deve essere posto uguale a zero<sup>17</sup>, non essendo funzioni definite positive le funzioni con esponente positivo, così come esso diventa ricordando la regola dei segni.

Da ultimo, qualunque sia la funzione di covarianza modello utilizzata per l'interpolazione delle stime empiriche, il valore dell'ordinata all'origine ( $a$ ) della curva interpolante, ovvero della varianza del segnale ( $\sigma_s^2$ ), oppure della covarianza fra le componenti, ad es.,  $xy$  del segnale ( $\gamma_{s,xy}$ ), si ottiene imponendo che la funzione interpolante assuma, in corrispondenza del primo passo, esattamente lo stesso valore della stima empirica.

Infine la varianza del rumore ( $\sigma_n^2$ ) si ricava come differenza fra la varianza generale e la varianza del segnale:  $\sigma_n^2 = \sigma^2 - \sigma_s^2$ .

La stessa lista è utilizzata per interpolare una funzione di crosscovarianza; tutto ciò non è teoricamente corretto, ma in pratica è accettabile, se i valori di crosscovarianza stimati assumono valori sufficientemente bassi. Infatti per quanto riguarda la covarianza fra le componenti, ad es.,  $xy$  del rumore ( $\gamma_{n,xy}$ ) questa si ricava come differenza fra la covarianza generale ( $\gamma_{xy}$ ) e la covarianza del segnale ( $\gamma_{s,xy}$ ), tenendo tuttavia conto che, tanto la covarianza del rumore, quanto quella del segnale, devono soddisfare la disuguaglianza di Schwarz<sup>18</sup>, ossia:

<sup>17</sup> Si noti come, in questo caso, le funzioni di covarianza oscillanti (con l'eccezione della funzione coseno che abbisogna pertanto di un almeno debolissimo smorzamento) non hanno altro smorzamento oltre quello proprio:

$$\begin{aligned} \frac{a}{cx} & \quad \text{per} & \quad f = \frac{a \sin cx}{cx} \\ \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\pi cx}} & \quad \text{per} & \quad f = aJ_0(cx) \\ \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(cx)^3}} & \quad \text{per} & \quad f = \frac{2aJ_1(cx)}{cx} \end{aligned}$$

<sup>18</sup> Dati due vettori qualsiasi:  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , aventi ciascuno  $n$  componenti, vale in ogni caso la disuguaglianza:

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$|\gamma_{n,xy}| < \sigma_{n,x} \sigma_{n,y}$$

ed inoltre:

$$|\gamma_{s,xy}| < \sigma_{s,x} \sigma_{s,y}$$

Se ciò non avviene, poiché vale comunque per la covarianza generale la disuguaglianza di Schwarz, ossia:

$$|\gamma_{xy}| < \sigma_x \sigma_y$$

allora basta alterare arbitrariamente (come necessita: in più o in meno) il valore stimato dell'ordinata all'origine ( $a$ ) della curva interpolante la funzione di crosscovarianza, fino a soddisfare entrambe le disuguaglianze. Più in generale la definita positività per le funzioni insieme di auto e crosscovarianza è assicurata dalla verifica della disuguaglianza:

$$|S_{xy}|^2 < |S_{xx}| |S_{yy}|$$

dove si è posto:

$S_{xx}$  = spettro di potenza della componente  $x$  del processo;

$S_{yy}$  = spettro di potenza della componente  $y$  del processo;

$S_{xy}$  = spettro di potenza fra le componenti  $x$ ,  $y$  del processo.

Infatti in mancanza di modelli teorici adeguati, le funzioni di crosscovarianza modello sono cercate fra l'insieme di funzioni definite positive utilizzate per le funzioni di autocovarianza modello. In questa fase, particolare attenzione deve essere prestata nel riconoscere l'influenza delle funzioni di crosscovarianza modello adottate sulle successive elaborazioni. Pertanto come già detto in precedenza, crosscorrelazioni irrilevanti separano le componenti del processo, mentre crosscorrelazioni eccessive danno notevoli problemi computazionali. Un confronto, in termini d'ordine di grandezza, fra i valori empirici di auto e crosscovarianza fornisce informazioni preziose per scegliere il successivo trattamento.

Le **funzioni di covarianza finite** sono ulteriori funzioni di covarianza modello, definite esclusivamente su un supporto finito. Al contrario, le usuali funzioni di covarianza hanno valori nulli, al più, solo in un'infinità numerabile di punti e sono asintotiche a zero solo all'infinito. Di conseguenza, le matrici di covarianza corrispondenti, costituite su un dato insieme di punti, sono matrici piene. Tutto ciò comporta insormontabili problemi di computabilità, per quanto riguarda sia l'occupazione di memoria, sia i tempi di calcolo necessari, ad es., per la loro fattorizzazione ed inversione richiesta.

Una matrice di covarianza buona, in quanto non comporta insormontabili problemi di computabilità, è una matrice sparsa. Infatti per quanto riguarda l'occupazione di memoria richiesta, basta memorizzare gli elementi non – nulli di detta matrice, affiancata dal loro indicatore di, oltretutto i puntatori delle colonne. Inoltre per quanto riguarda i tempi di calcolo, se la matrice è poco dispersa dalla diagonale principale, come nel caso monodimensionale, si possono utilizzare algoritmi diretti a banda, se invece la matrice è abbastanza

dispersa e poco riordinabile, come nei casi bidimensionale e tridimensionale, si possono utilizzare algoritmi iterativi, appositamente predisposti per operare con matrici sparse, insieme stabili e veloci. Inoltre in ogni caso, in presenza di regolarità tra i dati, si utilizzano le matrici di Toeplitz e, quando la dimensione dei problemi è maggiore di uno, la decomposizione di Kronecker.

Tuttavia una matrice di covarianza sparsa può essere ottenuta solo a partire da una funzione di covarianza finita, ovvero da una funzione che gode delle proprietà di una funzione di covarianza, ma che sia definitivamente nulla, a partire da un valore opportunamente piccolo dell'ascissa. Ad esempio, la moltiplicazione di una funzione di covarianza per una funzione scalino<sup>19</sup>, se quest'ultima godesse delle proprietà di una funzione di covarianza, darebbe per il teorema del prodotto<sup>20</sup> una funzione di covarianza finita. Tutto equivale alla moltiplicazione, secondo Hadamard<sup>21</sup>, di una matrice di covarianza qualsiasi per una matrice ricavata da una funzione scalino, al fine di ottenere una matrice di covarianza sparsa. Purtroppo la funzione scalino non gode delle proprietà di una funzione di covarianza; allora occorre trovare una funzione di covarianza che svolga, al meglio, il compito della funzione scalino.

A tale proposito si ricordi che la funzione di convoluzione<sup>22</sup> di una funzione qualsiasi con se stessa è una funzione di covarianza e, se la funzione qualsiasi è finita, anche la funzione di convoluzione è finita. Pertanto a partire, ad es., dal settore parabolico<sup>23</sup>, nel caso monodimensionale, e dal settore di paraboloide di rotazione<sup>24</sup>, nel caso bidimensionale in condizioni di isotropia, è possibile generare per convoluzione una funzione di covarianza finita ben soddisfacente allo scopo. La funzione di covarianza finita, per il caso monodimensionale, ottenuta per convoluzione di un settore di parabolico con sé stesso, ha forma:

$$S_1(t) = \int_{t-a}^a (a^2 - x^2)(a^2 - (t-x)^2) dx = \frac{16a^5}{15} - \frac{4a^3 t^2}{3} + \frac{2a^2 t^3}{3} - \frac{t^5}{30} \quad \text{per } t \leq 2a$$

<sup>19</sup>Si definisce funzione scalino una funzione per cui si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 & \text{per} & & -a \leq x \leq a \\ f(x) &= 0 & \text{per} & & x \leq -a \quad \text{oppure} \quad x \geq a \end{aligned}$$

<sup>20</sup> Condizione sufficiente, affinché il prodotto ha di due funzioni  $f$  e  $g$  ( $h = fg$ ) sia una funzione di covarianza, è che entrambe le funzioni date siano funzioni di covarianza.

<sup>21</sup> Si chiama prodotto di Hadamard fra due matrici  $A$  e  $B$ , aventi stesse dimensioni ( $m, n$ ), la matrice  $C = A * B$ , avente ancora le stesse dimensioni, ottenuta moltiplicando (con le regole del prodotto dell'aritmetica) ogni elemento della matrice  $B$  per il corrispondente elemento della matrice  $A$ :

$$C = A * B = [a_{ij} b_{ij}] \quad \forall i, j$$

<sup>22</sup> Si definisce funzione di convoluzione la funzione densità di probabilità  $h$  della somma  $z$  di due variabili casuali indipendenti  $x$  e  $y$  ( $z = x + y$ ), aventi rispettivamente funzione densità di probabilità  $f$  e  $g$ ; così ottenuta:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x) dx$$

<sup>23</sup>Si definisce settore parabolico una funzione per cui si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= a^2 - x^2 & \text{per} & & -a \leq x \leq a \\ f(x) &= 0 & \text{per} & & x \leq -a \quad \text{e} \quad x \geq a \end{aligned}$$

<sup>24</sup> Si definisce settore di paraboloide di rotazione una funzione per cui si ha:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a^2 - (x^2 + y^2) & \text{per} & & 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ f(x, y) &= 0 & \text{per} & & \sqrt{x^2 + y^2} \geq a \end{aligned}$$

$$S_1(t) = 0 \quad \text{per } t \geq 2a$$

La funzione di covarianza finita, per il caso bidimensionale in condizioni di isotropia, ottenuta per convoluzione di un settore di paraboloidi di rotazione con sé stesso, ha forma:

$$\begin{aligned}
 S_2(r) &= \int_{r/2}^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy (a^2 - x^2 - y^2)(a^2 - (r-x)^2 - y^2) = & \text{per } r \leq 2a \\
 &= \frac{4}{15} \int_{r/2}^a (8x^4 - 20rx^3 + (10r^2 - 16a^2)x^2 + 20a^2rx - 10a^2r^2 + 8a^4) \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\
 &= 5a^6\pi - \frac{15a^4r^2\pi}{2} + (5a^4r + \frac{20a^2r^3}{3} - \frac{5r^5}{12}) \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{4} + (15a^4r^2 - 10a^6) \arcsin \frac{r}{2a}
 \end{aligned}$$

$$S_2(r) = 0 \quad \text{per } r \geq 2a$$

Nel caso tridimensionale, come già detto in precedenza, la costruzione di modelli isotropi è talvolta più complessa e addirittura non possibile, nel caso di funzioni di covarianza finite, in quanto non è contenuta, nell'insieme delle funzioni trascendenti elementari, la funzione primitiva ottenuta per convoluzione di un settore di iper - paraboloidi di rotazione con sé stesso.

A tutto ciò, si può ovviare, rinunciando all'isotropia del dominio tridimensionale e procedendo alla decomposizione ortogonale del dominio tridimensionale stesso. Si noti come, benché le due assunzioni differiscono concettualmente in modo sostanziale, l'effettiva distanza dalla condizione di isotropia risulti, per lo più, alquanto contenuta, specialmente ai valori più elevati di correlazione.

La procedura di stima, qualora si assuma la **decomposizione ortogonale** del dominio tridimensionale, si effettua pertanto nei seguenti passi che riprendono quanto esposto in precedenza, in particolare, si rifanno alle procedure già illustrate per il caso monodimensionale, con l'avvertenza che ogni passo dovrà essere svolto tre volte, tante sono le componenti del dominio tridimensionale:

- ❑ calcolo delle stime empiriche, per ciascuna riga, ciascuna colonna e ciascuna pila in cui si è suddiviso il dominio tridimensionale, in corrispondenza dell'intervallo ottimale (Si badi come, nel caso di decomposizione ortogonale, il primo intervallo sia costituito da un cubo, anziché da una sfera, come avviene in condizioni di isotropia, e come gli intervalli successivi siano definiti da scatole concentriche al cubo centrale, anziché da corone sferiche concentriche alla sfera centrale.);
- ❑ calcolo delle medie delle stime empiriche, fra tutte le righe, tutte le colonne e tutte le pile (Questa operazione unifica le stime empiriche per ciascuna componente del dominio e, grazie al notevole incremento della numerosità dei dati, serve a migliorare la consistenza delle stime empiriche, spesso alquanto poco consistenti, per mancanza di dati, quando effettuate separatamente per ciascuna riga, ciascuna colonna e ciascuna pila.);
- ❑ scelta ed interpolazione delle funzioni di covarianza modello per ciascuna componente del dominio

tridimensionale, ovvero ripetendo tre volte quello che si fa per la scelta ed interpolazione delle funzioni di covarianza modello nel caso monodimensionale (Ciò dà ragione della avvenuta decomposizione ortogonale del dominio tridimensionale la cui ricomposizione avviene, come noto, tramite il prodotto di Kronecker delle singole componenti.);

- modifica delle funzioni di covarianza modello tramite funzioni di covarianza finite per ciascuna componente del dominio tridimensionale, ovvero ripetendo sempre tre volte quello che si fa per la modifica delle funzioni di covarianza modello tramite funzioni di covarianza finite nel caso monodimensionale (Considerazione identiche a quelle fatte per il passo precedente giustificano l'avvenuta decomposizione ortogonale e la ricomposizione, tramite prodotto di Kronecker.).

Si noti come la stessa procedura possa essere adottata anche nel caso bidimensionale, rinunciando all'isotropia del dominio bidimensionale e procedendo alla decomposizione ortogonale del dominio bidimensionale stesso. In questo caso le componenti sono solo due: righe e colonne, e gli intervalli: un quadrato e cornici concentriche al quadrato centrale.

Si osservi poi come, nel caso di **problemi spazio – temporali**, la decomposizione ortogonale del dominio e la sua ricomposizione, tramite prodotto di Kronecker, siano operazioni indispensabili. Infatti esse dipendono da due importantissime ipotesi aggiuntive, strettamente connesse con la natura composta del dominio dei problemi in esame:

- la condizione di irrotazionalità tra le coordinate dello spazio ed il tempo;
- la condizione di separabilità nella stima empirica fra il dominio spaziale e quello temporale.

In questo modo, le coordinate spaziali sono libere di muoversi per ogni istante prefissato del tempo e lo stesso tempo è libero di muoversi per ogni posizione prefissata dello spazio. Ciò significa che le funzioni di covarianza e le corrispondenti matrici di covarianza, stimate e modellate separatamente per ciascuna componente del dominio, sono poi ricomposte, tramite il prodotto di Kronecker:

$$\gamma(\Delta P, \Delta T) = \gamma(\Delta P) \bullet \gamma(\Delta T) \quad \Rightarrow \quad C(\Delta P, \Delta T) = C(\Delta P) \otimes C(\Delta T)$$

dove la cluster analysis potrebbe aiutare a raccogliere stime di covarianza omogenee.

Infine, nonostante l'uso di funzioni di covarianza finite da cui si ottengono matrici di covarianza sparse, il numero di elementi non-nulli di queste matrici può rimanere troppo elevato, cosa che lascia aperti problemi di computabilità. La causa di questa relativamente scarsa sparsità è dovuta a sua volta alla essensiva persistenza di correlazione<sup>25</sup> nella sequenza di una realizzazione di un processo stocastico. Pertanto il superamento dei suddetti problemi di computabilità, si ottiene solo riducendo drasticamente la persistenza di

---

<sup>25</sup> Si definisce persistenza di correlazione il numero di passi della funzione di covarianza, prima che questa assuma definitivamente valori pressochè trascurabili (ad es., inferiori al 5% ÷ 10% della varianza generale).  
Si ricordi inoltre che si chiamano lunghezza di correlazione la distanza alla quale la funzione di covarianza vale (eventualmente una prima volta) la metà della varianza generale e punto di annullamento la distanza alla quale la funzione di covarianza si annulla, se ciò avviene (se ciò avviene più volte, allora la prima volta).

correlazione. A tale proposito, si osservi innanzitutto che ridurre la persistenza di correlazione (e conseguentemente anche la scala e la forma delle funzioni di covarianza) significa mutare il processo stocastico da cui è estratto la sequenza di realizzazione in esame.

In ogni caso, proprio l'idea assurda di un filtraggio prima del filtraggio indica un modo di procedere vantaggioso, al fine di ridurre la persistenza di correlazione. Infatti un **pre – filtraggio** è un'operazione del tutto simile al filtraggio, anche se meno efficiente, che fa dipendere il segnale in un punto qualsiasi principalmente dai valori osservati nei punti circostanti in un intorno prefissato. Ciò significa modellare una parte del segnale con procedimenti interpolativi locali (ad es., con il metodo degli elementi finiti). Si badi che il pre – filtraggio, proprio perché meno efficiente, in generale, non abolisce affatto il successivo filtraggio.

### 5. La struttura di Taylor-Karman

Quella della predizione è un'operazione che può essere utilizzata in molte applicazioni. Infatti si possono stimare non solo il segnale, ma anche i suoi funzionali e, tra questi, operatori differenziali lineari, quali le variazioni prime e seconde, che forniscono informazioni sulla forma e la struttura. Di seguito si mette in evidenza la struttura di Karman nella propagazione di covarianza in un processo stocastico isotropo 2D, quando vengono applicati diversi operatori differenziali. Le prime due derivate di una funzione sono descritte, rispettivamente, dalle matrici Jacobiana e Hessiana:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{vmatrix} = \nabla \xi \quad ; \quad H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \nabla \nabla' \xi$$

Perciò data l'autocovarianza del processo stocastico, dalla legge di propagazione della varianza e dalla commutabilità degli operatori (per la loro linearità), la crosscovarianza tra le derivate prime e il processo stocastico stesso assume la seguente espressione:

$$\begin{aligned} C(\nabla_Q \xi_Q, \xi_P) &= \nabla_Q C(r_{PQ}) \\ &= C'(r_{PQ}) \nabla_Q (|r_{PQ}|) \\ &= -C'(r_{PQ}) r_{PQ} / |r_{PQ}| = \\ &= C'(\xi_Q, \xi_P) r_{PQ} / |r_{PQ}| \end{aligned}$$

essendo:

$$r_{QP} = -r_{PQ} \quad \text{e} \quad \nabla |r| = r / |r| = |\cos \theta \quad \sin \theta|^t$$

dove l'angolo  $\theta$  è misurato in senso antiorario a partire dal semiasse positivo delle x. Un'importante funzione delle derivate prime è il modulo del gradiente:

$$|\nabla \xi| = \sqrt{\left(\frac{\delta \xi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta \xi}{\delta y}\right)^2}$$

Allo stesso modo la crosscovarianza tra le derivate seconde di un processo stocastico e il processo stesso ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} C(\nabla_Q \nabla_Q' \varepsilon_Q, \varepsilon_P) &= \nabla_Q \nabla_Q' C(r_{PQ}) \\ &= \nabla_Q C'(r_{PQ}) r_{PQ}' / |r_{PQ}| \\ &= -C''(r_{PQ}) r_{PQ} r_{PQ}' / |r_{PQ}|^2 - C'(r_{PQ}) \nabla_Q (r_{PQ}' / |r_{PQ}|) = \\ &= C''(r_{PQ}) \Pi r_{PQ} - C'(r_{PQ}) \left( -I / |r_{PQ}| + r_{PQ} r_{PQ}' / |r_{PQ}|^3 \right) = \\ &= (C''(r_{PQ}) - C'(r_{PQ}) / |r_{PQ}|) \Pi r_{PQ} + C'(r_{PQ}) I / |r_{PQ}| = \\ &= (C''(\varepsilon_Q, \varepsilon_P) - C'(\varepsilon_Q, \varepsilon_P) / |r_{PQ}|) \Pi r_{PQ} + C'(\varepsilon_Q, \varepsilon_P) I / |r_{PQ}| \end{aligned}$$

essendo:

$$\nabla r^t = I \quad \nabla \left( \frac{1}{|r|} \right) = -\frac{\nabla(|r|)}{|r|^2} = -\frac{r}{|r|^3}$$

$$\Pi r = \frac{r r^t}{|r|^2} = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen} \theta \cos \theta \\ \text{sen} \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} (\Pi r)^2 &= \Pi r \\ \text{Tr}(\Pi r) &= 1 \\ \text{Det}(\Pi r) &= 0 \end{aligned}$$

Un'importante funzione delle derivate seconde è il Laplaciano:

$$\nabla^2 \xi = \left( \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} \right) + \left( \frac{\delta^2 \xi}{\delta y^2} \right)$$

che rappresenta una dilatazione o contrazione, mentre il massimo fattore di taglio locale è:

$$\gamma = \sqrt{\left( \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 \xi}{\delta y^2} \right)^2 + \left( \frac{\delta^2 \xi}{\delta x \delta y} \right)^2} / 4a$$

Si noti che la struttura di Taylor-Karman appartiene anche ai processi stocastici isotropi multidimensionali; in particolare, in un processo stocastico isotropo 3D, il vettore  $\nabla|r|$  e la matrice di proiezione  $\Pi r$  hanno la seguente espressione:

$$\nabla|r| = |\cos \theta \cos \alpha \quad \text{sen} \theta \cos \alpha \quad \text{sen} \theta|^t$$

$$\prod r = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \theta \cos^2 \alpha & \cos \theta \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \theta \cos^2 \alpha & \sin^2 \theta \cos^2 \alpha & \sin \theta \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos \theta \sin \alpha \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{vmatrix}$$

dove  $\theta$  è lo stesso angolo usato nel caso 2D e  $\alpha$  l'angolo di elevazione. Infine prendendo in considerazione l'integrale del segnale, operatore lineare altrettanto importante per la misura di aree, volumi, ecc., si possono stimare nuovi funzionali. Pertanto data la funzione di autocovarianza del processo stocastico, la crosscovarianza fra l'integrale cercato ed il processo stocastico stesso ha la seguente espressione, tenuto conto della legge di propagazione della covarianza e della commutabilità degli operatori lineari:

$$C\left(\int_{S_Q} \xi dS_Q, \xi_P\right) = \int_{S_Q} C(\xi, \xi_P) dS_Q$$

Si osservi come il dominio sia un intervallo, quando la funzione è una linea e l'integrale è la misura di un'area; il dominio diventa invece un'area, quando la funzione è una superficie e l'integrale è la misura di un volume. Nei casi multidimensionali, il dominio è un iperspazio, la funzione un'ipersuperficie e l'integrale è la misura di un ipervolume.

## 6. Interpolazione con funzioni spline <sup>26</sup>

Si può effettuare un'interpolazione agli elementi finiti in vari modi; fra questi, uno dei più utilizzati è quello che utilizza le funzioni spline (ad esempio funzioni spline cubiche). Nel dominio spazio-temporale, una funzione spline è data dalla somma del prodotto di due o tre funzioni spline cubiche ortogonali (nel dominio spaziale) e di una funzione spline (nel dominio del tempo):

$$S(P, t) = S(x)S(y)S(z) + S(t)$$

La scelta del numero di celle e del numero di nodi dipende dal numero di osservazioni  $m$  e dai passi di interpolazione  $\delta_p$  e  $\delta_t$  rispettivamente nel dominio spaziale e temporale. Il numero di celle è pari alla somma del prodotto tra i numeri di classi in ogni direzione spaziale e del numero di classi nel tempo:

$$v = v_x v_y v_z + v_t$$

dove:

$$v_x = \text{int}(\Delta X / \delta_p) + 1 \quad ; \quad v_y = \text{int}(\Delta Y / \delta_p) + 1 \quad ; \quad v_z = \text{int}(\Delta Z / \delta_p) + 1$$

$$v_t = \text{int}(\Delta t / \delta_t) + 1$$

<sup>26</sup> Liberamente tratta da: Crippa B., Forlani G. (1990): Il calcolo con il metodo degli elementi finiti In: L. Mussio (Ed) *Ricerche di Geodesia Topografia e Fotogrammetria*, vol 6, CLUP, Milano, p. 92-137.

essendo  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  e  $\Delta Z$  le dimensioni della regione di spazio in due o tre direzioni e  $\Delta t$  la dimensione dell'intervallo temporale. Di conseguenza il numero di nodi è:

$$n = n_x n_y n_z + n_t = (v_x + 3)(v_y + 3)(v_z + 3) + (v_t + 3)$$

L'interpolazione con le spline è risolta come un classico problema ai minimi quadrati scrivendo un sistema di equazioni di osservazioni:

$$\hat{s}_h = s_h^0 + \hat{v}_h = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \hat{a}_{I+I_j+K+k} S_{ijk}(\varepsilon_h, \eta_h, \varsigma_h) + \sum_{l=1}^4 b_{L+l} S_h(\tau_l)$$

e associando ad esso la norma ai minimi quadrati:

$$\phi = \sum_{k=1}^m \hat{v}_k^2 = \min$$

Nella maggior parte dei casi, i pesi sono posti uguali a uno; comunque un modello stocastico più complesso dovrebbe essere definito considerando, eventualmente, le correlazioni tra le osservazioni, che solitamente vengono omesse. Le seguenti espressioni rappresentano la legenda del modello funzionale. Considerando la direzione  $x$ , la coordinata del punto  $h$ -esimo rispetto all'angolo iniziale, viene divisa in due parti:

$$\Delta x_h = I \delta_p + \delta x_h$$

dove il numero dei nodi precedenti è:

$$I = \text{int}(\Delta x_h / \delta_p)$$

e la posizione nella classe è:

$$\xi_h = \delta x_h / \delta_p$$

dove:

$$\delta x_h = \Delta x_h - I \delta_p$$

Allo stesso modo, per le direzioni  $y$  e  $z$ , si ha:

$$\Delta y_h = J \delta_p + \delta y_h \qquad \Delta z_h = K \delta_p + \delta z_h$$

dove:

$$\begin{aligned}
 J &= \text{int}(\Delta y_h / \delta_p) & Z &= \text{int}(\Delta z_h / \delta_p) \\
 \eta_h &= \delta y_h / \delta_p & \zeta_h &= \delta z_h / \delta_p \\
 \delta y_h &= \Delta y_h - J \delta_p & \delta z_h &= \Delta z_h - K \delta_p
 \end{aligned}$$

Inoltre per il tempo:

$$\Delta t_h = L \delta_t + \delta t_h$$

dove:

$$\begin{aligned}
 L &= \text{int}(\Delta t_h / \delta_t) \\
 \tau_h &= \delta t_h / \delta_t \\
 \delta t_h &= \Delta t_h - L \delta_t
 \end{aligned}$$

Si noti che si dovrebbero imporre vincoli per i nodi lungo i bordi e nelle eventuali regioni vuote. Infatti la norma ibrida di Tikhonov crea continuità nel modello imponendo la regolarità delle derivate prime. Essa può risolvere eventuali sistemi mal-condizionati e grazie ai bassi pesi non distrugge il modello, in caso di buon-condizionamento. In pratica le equazioni alle differenze finite del primo ordine sono scritte, per ogni nodo, considerando: nel dominio spaziale, i punti sinistro e destro (lungo la stessa riga), indietro e avanti (lungo la stessa colonna), inferiore e superiore (lungo la stessa pila) e nel dominio del tempo i punti precedente e seguente:

$$\begin{aligned}
 a_{I+i+1 \ J+j \ K+k} - a_{I+i-1 \ J+j \ K+k} &= 0 \\
 a_{I+i \ J+j+1 \ K+k} - a_{I+i \ J+j-1 \ K+k} &= 0 & \text{e:} & \quad b_{L+l+1} - b_{L+l-1} = 0 \\
 a_{I+i \ J+j \ K+k+1} - a_{I+i \ J+j \ K+k-1} &= 0
 \end{aligned}$$

Si noti che le pseudo-osservazioni sono sempre uguali a zero, essendo questo il valore medio delle derivate prime. Inoltre i pesi sono scelti opportunamente bassi, in modo che i vincoli risolvano i problemi dati dal bordo e dalle regioni vuote, rispettando l'informazione fornita dai dati.

Anche con questa metodologia, si noti come l'uso dei minimi quadrati ripesati offra i vantaggi delle procedure robuste, utili per l'identificazione e l'eliminazione degli errori grossolani.

## 7. Altri metodi d'interpolazione ed approssimazione

Gli approcci deterministici con gli elementi finiti e le funzioni spline (e quelli un po' più complessi dalla triangolazione – tetraedrazione alla rappresentazione parametrica di curve e superfici) hanno alternative praticabili negli approcci stocastici. Tra questi sono d'interesse le stime di covarianza ed il metodo della

collocazione (come si ha avuto modo di mostrare in questa stessa prima parte), il calcolo del variogramma ed il metodo di kriging, e lo studio della geometria frattale (il cui carattere soprattutto descrittivo fa sì che tutto quanto si riferisce ad essa sia considerato estraneo agli scopi del presente lavoro). Di seguito, si danno alcune indicazioni sommarie sul calcolo del variogramma e sul metodo di kriging, mettendo in evidenza un certo parallelismo possibile con le stime di covarianza ed il metodo della collocazione.

Infatti data la seguente espressione per la stima del semivariogramma (dove la non equispaziatura dei dati richiede di calcolare medie per zone e l'estensione a spazi bidimensionali o tridimensionali necessita di ipotesi aggiuntive, come l'isotropia o la decomposizione ortogonale):

$$\omega(\Delta_k) = \frac{1}{2n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (z(x_i + \Delta_k) - z(x_i))^2 \quad \forall \Delta_k$$

essendo:  $z$  un campione di dati (a media nulla) estratti da una data realizzazione di un determinato processo stocastico continuo, lineare, stazionario del secondo ordine e normale (e pertanto, punto a punto, un'estrazione da una certa variabile casuale),  $x$  il parametro ordinatore del suddetto processo stocastico e  $\Delta$  il passo di campionamento.

La Fig. A.1 mostra un diagramma piano isotropo per la stima della funzione di covarianza od il calcolo del variogramma, in quanto la procedura è sostanzialmente identica nei due casi. Resta da osservare come la riduzione ad un caso lineare, faccia passare da corone circolari a semplici intervalli e l'estensione al caso spaziale a corone sferiche. Inoltre l'adozione di decomposizioni ortogonali, al posto dell'ipotesi d'isotropia, sostituisce cornici quadrate o scatole cubiche rispettivamente a corone circolari ed a quelle sferiche.

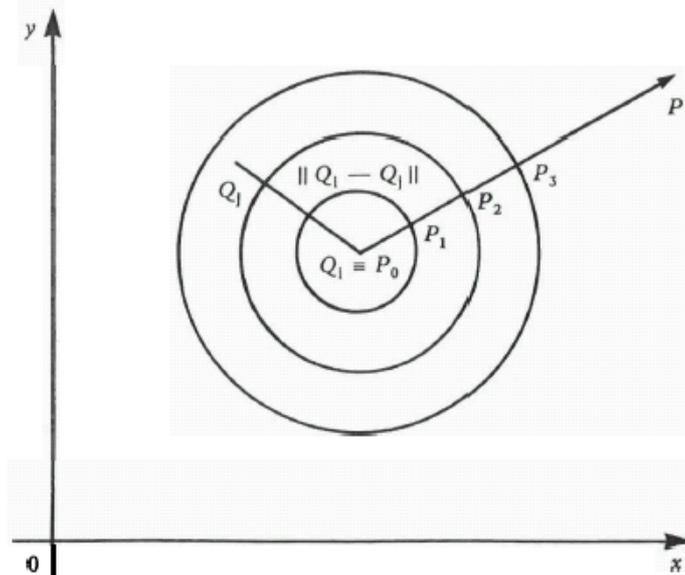


Fig. A.1 – Diagramma piano isotropo per la stima della funzione di covarianza od il calcolo del variogramma

Infine sulla base delle seguenti relazioni, si noti come sia agevole passare da un variogramma  $\omega(\Delta)$  ad una funzione di covarianza  $\gamma(\Delta)$  e viceversa:

$$\omega(\Delta_k) = \frac{1}{2n_k} \sum_{i=1}^{n_k} z(x_i + \Delta_k)^2 + \frac{1}{2n_k} \sum_{i=1}^{n_k} z(x_i)^2 - \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} z(x_i + \Delta_k)z(x_i) = \sigma^2 - \gamma(\Delta_k) \quad \forall \Delta_k$$

$$\gamma(\Delta_k) = \sigma^2 - \omega(\Delta_k)$$

cosa utile tanto per le preliminari stime empiriche, quanto per i successivi modelli teorici. Pertanto poiché la Fig. A.2 mostra alcuni modelli teorici di funzioni di covarianza tipo, altrettanti modelli teorici di variogrammi possono essere derivati da questi, facendo uso delle suddette espressioni. A riguardo, si osservi come, data la definita positività delle funzioni di covarianza, derivi la definita negatività dei variogrammi corrispondenti.

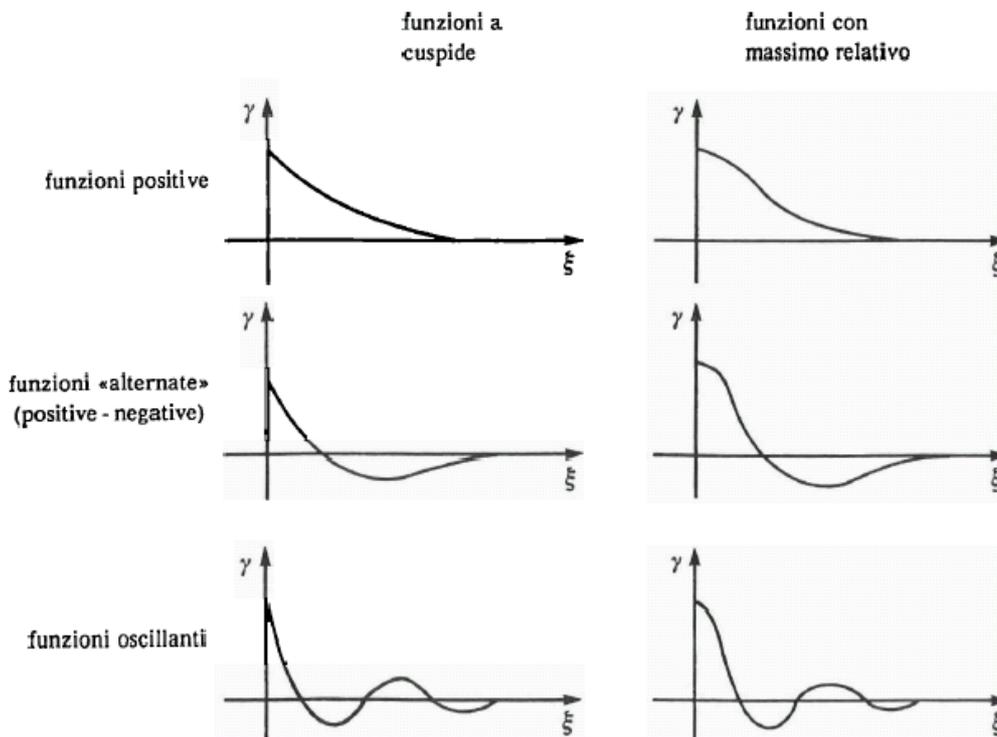


Fig. A.2 – Esempi di funzioni di covarianza tipo

Dopodiché facendo uso opportuno dei modelli teorici di variogrammi è possibile procedere con il metodo di kriging, provvedendo alla separazione di un segnale stocastico (correlato) da un rumore aleatorio (incorrelato da se stesso, nonché dal segnale) ed eventualmente alla stima di alcuni parametri deterministici. Infatti il metodo di Kriging distingue vari di tipi di algoritmi tra i quali i più importanti sono:

- ❑ il kriging semplice, per variabili stazionarie a media nulla 27;
- ❑ il kriging ordinario, per variabili stazionarie a media incognita;
- ❑ il cokriging ordinario, per più variabili correlate sempre tutte stazionarie;
- ❑ il kriging universale, per variabili non – stazionarie 28;

Tutti gli algoritmi impostano il problema scrivendo un modello funzionale composto dalla somma di un

27 Il caso particolare, a media nulla nota, è formalmente identico al metodo della collocazione senza parametri.

28 E' altresì possibile (e non particolarmente più complesso) un cokriging universale, per più variabili sempre correlate, ma non – stazionarie; tuttavia la sua presentazione è omessa, perché tale algoritmo consiste semplicemente nell'unione dei due casi precedenti.

segnale stocastico correlato che collega tra loro le osservazioni, tramite pesi derivati dal variogramma, di un rumore aleatorio incorrelato e da alcuni parametri deterministici (nel caso di variabili non – stazionarie). Dopodiché il modello stocastico è dedotto dal variogramma che tiene conto delle covarianze tra le variabili e della varianza generale (a sua volta, decomposta nella varianza del segnale ed in quella del rumore). Infine la norma minimizza l'errore quadratico medio di stima del segnale, se il metodo di kriging è sviluppato a minimi quadrati, oppure un'altra norma (a sua volta, spesso ricondotta alla norma quadratica, tramite opportuni pesi ausiliari), se lo stesso metodo è sviluppato con una qualche procedura robusta.

- Il kriging semplice determina innanzitutto un vettore di pesi, a partire dalla funzione di covarianza stimata:

$$w(x_i) = \Gamma^{-1}(x_i, x_j) \gamma(x_j, x_0) \quad \forall i$$

da cui ricavare l'interpolazione di un qualsiasi valore filtrato e/o predetto ed il suo errore quadratico medio di stima:

$$\hat{z}(x_0) = \gamma^T(x_0, x_i) \Gamma^{-1}(x_i, x_j) z(x_j) = w^T(x_i) z(x_j)$$

$$\hat{\sigma}^2(x_0) = \sigma^2(x_0) - \gamma^T(x_0, x_i) \Gamma^{-1}(x_i, x_j) \gamma(x_j, x_0)$$

essendo:  $z$  il vettore delle osservazioni,  $\gamma$  un vettore di covarianza, dedotto dalla suddetta funzione per collegare la stima attesa ai dati, e  $\Gamma$  la matrice di covarianza dei dati, ricavata dalla stessa funzione.

- Il kriging ordinario determina innanzitutto un vettore di pesi ( $w$ ), a partire tuttavia dal variogramma stimato, imponendo, tramite un'incognita ausiliaria costituita da un moltiplicatore di Lagrange ( $\lambda$ ), che la loro somma abbia valore unitario ( $\sum_i w(x_i) = 1$ ):

$$\begin{bmatrix} w(x_i) \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega(x_i, x_j) & i \\ i^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega(x_j, x_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall i$$

da cui ricavare l'interpolazione di un qualsiasi valore filtrato e/o predetto ed il suo errore quadratico medio di stima (essendo  $i$  un vettore i cui elementi sono tutti uguali ad 1):

$$\hat{z}(x_0) = \begin{bmatrix} \omega^T(x_0, x_i) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega(x_i, x_j) & i \\ i^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(x_j) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^T(x_i) & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(x_j) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2(x_0) = \begin{bmatrix} \omega^T(x_0, x_i) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega(x_i, x_j) & i \\ i^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega(x_j, x_0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

essendo:  $z$  il vettore delle osservazioni,  $\omega$  un vettore di covarianza, dedotto dal variogramma per collegare la stima attesa ai dati, e  $\Omega$  la matrice di covarianza dei dati, ricavata ancora dal variogramma.

- Il cokriging ordinario determina innanzitutto quattro vettori di pesi ( $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}$ ), a partire dai due variogrammi ed dal covariogramma stimati, imponendo, tramite quattro incognite ausiliarie costituite da quattro moltiplicatori di Lagrange ( $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ ), che la somma degli elementi di due vettori abbia valore unitario ( $\sum_i w_{11}(x_i)=1, \sum_k w_{22}(x_k)=1$ ) e degli altri due valore nullo ( $\sum_i w_{12}(x_i)=0, \sum_k w_{21}(x_k)=0$ ):

$$\begin{bmatrix} w_{11}(x_i) \\ w_{12}(x_i) \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(x_i, x_j) & \Omega_{12}(x_i, x_l) & i & 0 \\ \Omega_{12}^T(x_i, x_j) & \Omega_{22}(x_i, x_l) & 0 & j \\ i^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{11}(x_j, x_0) \\ \omega_{12}(x_l, x_0) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall i$$

$$\begin{bmatrix} w_{21}(x_k) \\ w_{22}(x_k) \\ \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(x_k, x_j) & \Omega_{12}(x_k, x_l) & 0 & i \\ \Omega_{12}^T(x_k, x_j) & \Omega_{22}(x_k, x_l) & j & 0 \\ 0 & j^T & 0 & 0 \\ i^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{11}(x_j, x_0) \\ \omega_{12}(x_l, x_0) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k$$

da cui ricavare l'interpolazione di due qualsiasi valore filtrato e/o predetto (essendo  $i$  e  $j$  due vettori i cui elementi sono tutti uguali ad 1):

$$\begin{aligned} \hat{z}_1(x_0) &= \begin{bmatrix} \omega_{11}(x_0, x_j) & \omega_{12}(x_0, x_l) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{11}(x_i, x_j) & \Omega_{12}(x_i, x_l) & i & 0 \\ \Omega_{12}^T(x_i, x_j) & \Omega_{22}(x_i, x_l) & 0 & j \\ i^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1(x_j) \\ z_2(x_l) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} w_{11}(x_i) & w_{12}(x_i) & \lambda_1 & \mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(x_j) \\ z_2(x_l) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\hat{z}_2(x_0) = \begin{bmatrix} \omega_{21}(x_0, x_j) & \omega_{22}(x_0, x_l) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{11}(x_k, x_j) & \Omega_{12}(x_k, x_l) & 0 & i \\ \Omega_{12}^T(x_k, x_j) & \Omega_{22}(x_k, x_l) & j & 0 \\ 0 & j^T & 0 & 0 \\ i^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1(x_j) \\ z_2(x_l) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} w_{21}(x_k) & w_{22}(x_k) & \lambda_2 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(x_j) \\ z_2(x_l) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ed i loro errori quadratici medi di stima:

$$\hat{\sigma}_1^2(x_0) = \begin{bmatrix} \omega_{11}(x_0, x_j) & \omega_{12}(x_0, x_l) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{11}(x_k, x_j) & \Omega_{12}(x_k, x_l) & i & 0 \\ \Omega_{12}^T(x_k, x_j) & \Omega_{22}(x_k, x_l) & 0 & j \\ i^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{11}(x_j, x_0) \\ \omega_{12}(x_l, x_0) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_2^2(x_0) = \begin{bmatrix} \omega_{21}(x_0, x_j) & \omega_{22}(x_0, x_l) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{11}(x_k, x_j) & \Omega_{12}(x_k, x_l) & 0 & i \\ \Omega_{12}^T(x_k, x_j) & \Omega_{22}(x_k, x_l) & j & 0 \\ 0 & j^T & 0 & 0 \\ i^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{21}(x_j, x_0) \\ \omega_{22}(x_l, x_0) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

essendo:  $z_1$  e  $z_2$  i vettori delle osservazioni,  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{21}$  e  $\omega_{22}$  quattro vettori di covarianza, dedotti dai due variogrammi e dal covariogramma per collegare la stima attesa ai dati, e  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$  le matrici di covarianza dei dati, ricavate ancora dalle stesse funzioni.

- Il kriging universale determina innanzitutto un vettore di pesi ( $w$ ), sempre a partire dal variogramma stimato, imponendo, tramite alcune incognite ausiliarie costituite da moltiplicatori di Lagrange ( $\lambda$ ,  $\mu_k$ ), che la loro somma abbia valore unitario ( $\sum_i w(x_i) = 1$ ) ed opportune loro combinazioni lineari, con altrettante funzioni date ( $f_k$ ) nei punti d'osservazione (scelte e fissate), dia il valore delle stesse funzioni nel punto predetto ( $\sum_i w(x_i) f_k(x_i) = f_k(x_0) \quad \forall k$ ). E' necessario notare come queste funzioni, usate per modellare andamenti non – stazionari, siano incorrelate dal segnale stocastico, cosa che permette anche una loro determinazione preliminare, rimuovendo gli andamenti non – stazionari e potendo procedere al calcolo del variogramma sugli scarti – residui, nonché del sopraccitato vettore di pesi:

$$\begin{bmatrix} w(x_i) \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega(x_i, x_j) & i & F(x_i) \\ i^T & 0 & 0 \\ F^T(x_i) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega(x_j, x_0) \\ 1 \\ f(x_0) \end{bmatrix} \quad \forall i$$

da cui ricavare l'interpolazione di un qualsiasi valore filtrato e/o predetto ed il suo errore quadratico medio di stima (essendo  $i$  un vettore i cui elementi sono tutti uguali ad 1):

$$\hat{z}(x_0) = \begin{bmatrix} \omega^T(x_0, x_i) & 1 & f^T(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega(x_i, x_j) & i & F_k(x_i) \\ i^T & 0 & 0 \\ F^T(x_i) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(x_j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^T(x_i) & \lambda & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(x_j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2(x_0) = \begin{bmatrix} \omega^T(x_0, x_i) & 1 & f^T(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega(x_i, x_j) & i & F(x_i) \\ i^T & 0 & 0 \\ F^T(x_i) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega(x_j, x_0) \\ 1 \\ f(x_0) \end{bmatrix}$$

essendo:  $z$  il vettore delle osservazioni,  $\omega$  un vettore di covarianza, dedotto dal variogramma per collegare la stima attesa ai dati,  $\Omega$  la matrice di covarianza dei dati, ricavata ancora dal variogramma e  $f$  l'insieme delle suddette funzioni date (raggruppate nella matrice dei coefficienti  $F$ ).

A conclusione della presentazione dei vari tipi di kriging, corre il dovere di segnalare come la stessa complessità di modellazione di fenomeni e/o processi, ipotizzata per il metodo della collocazione, possa essere messa in gioco anche per il kriging universale od il cokriging universale. Infatti benché la presentazione precedente possa sembrare maggiormente adatta ad una rimozione di andamenti non – stazionari, tramite interpolazioni polinomiali, le stesse formule permettono di tenere conto di interpolazioni ad elementi finiti, come pure di strutture reticolari od entrambe, opportunamente collegate.

La ragione della scelta di un determinato ordine di presentazione risponde bene alla storia della geodesia integrata<sup>29</sup> che, dando contributi originali ed innovativi, ha studiato originariamente il metodo della collocazione e, solo recentemente, ha acquisito i vari tipi di kriging tra le sue metodologie e procedure d'interesse. D'altra parte, la loro larga intercambiabilità non dà particolare importanza all'ordine prescelto, fatto salvo l'osservazione che i variogrammi prescindono dalla conoscenza, a priori, di valori medi, mentre le funzioni di covarianza ne richiedono obbligatoriamente la conoscenza, a priori.

Resta da osservare come invece, per entrambi i metodi, sia necessario rimuovere eventuali andamenti non – stazionari, quasi sempre presenti nei fenomeni e/o processi, oggetti di studio, al fine di poter stimare variogrammi e funzioni di covarianza. Tutto ciò dà ulteriore ragione di voler considerare largamente intercambiabili, tra loro, i due metodi e suggerisce, per entrambi, di voler procedere, per passi non – lineari, alla determinazione preliminare dei sopraccitati andamenti non – stazionari, per poi procedere stima dei variogrammi o delle funzioni di covarianza.

A partire da essi/e, sarà poi possibile effettuare la separazione del segnale stocastico dal rumore incorrelato, cosicché l'intera procedura possa eventualmente essere ripetuta, fino ad ottenere un punto di riproduzione. Questo modo di procedere è un tipico e ben noto metodo non – lineare che, riconoscendo la quasi generale impossibilità di giungere, in un solo passo, ad una soluzione accettabile (perché la soluzione in un solo passo, propria dei problemi lineari, è possibile solo per pochi problemi non – lineari, riconducibili in forma lineare), provvede alla ricerca della stessa, tramite passi successivi via, via convergenti.

<sup>29</sup> La geodesia, a fianco dell'astronomia ed insieme alla cartografia, ha una storia antichissima ed è alla base della geometria e dell'intera matematica del mondo antico. Pertanto si ritiene particolarmente importante dare menzione dei più moderni metodi della geodesia integrata, così come una nobile ed antica scienza ha avuto modo di studiare, applicare ai suoi problemi più importanti (ad es., quale la determinazione della figura e forma della terra) e far proficuamente conoscere a vaste comunità di studiosi di altre discipline.

## 8. Campi d'applicazione

La naturale conclusione di una presentazione di metodi deterministici e/o stocastici per l'analisi dei dati deve trattare dei possibili campi d'applicazione degli stessi in geodesia e geomatica. In quest'ambito è necessario puntualizzare la dipendenza delle osservabili (siano esse funzioni di punto o di differenze di posizione), tanto dal tempo quanto dalle posizioni stesse. Infatti eventuali parametri cinematici (capaci di collegare le osservabili ai parametri di posizione) sono ovviamente funzione del tempo, inoltre i medesimi parametri cinematici e comunque i parametri morfologici (ancora capaci di collegare le osservabili ai parametri di posizione) sono funzione delle posizioni stesse. Si noti poi come il riferimento alle posizioni possa essere descritto tramite le traiettorie dei punti, in funzione di un parametro (spesso il tempo d'osservazione), oppure tramite le cosiddette linee di fumo separando fra i parametri una componente (spesso la quota o la sua variazione) da tutte le altre componenti (spesso le coordinate planimetriche e, più raramente, le coordinate spaziali). Nel caso di strutture reticolari, i modelli geometrici sono comunemente familiari; al contrario, nel caso di campi (seminati o grigliati) di punti:

- ❑ una legge deterministica del comportamento di un fenomeno oggetto di studio può essere nota da studi precedenti ed attende solo di essere confermata;
- ❑ oppure quella stessa legge può essere incognita e deve essere costruita a partire dai dati stessi, con metodi deterministici e/o stocastici.

La teoria dei modelli distingue i due casi come modelli grigi e modelli neri. Nel primo caso, occorre stimare i parametri del modello adottato e verificarne la significatività; nel secondo caso, occorre invece procedere alla costruzione del modello richiesto. A riguardo, l'analisi dei dati a referenza spaziale (o georeferenziati), tempo varianti e non, si occupa:

- ❑ della compensazione congiunta o separata di reti geodetiche o topografiche e/o blocchi fotogrammetrici;
- ❑ della ricostruzione di superfici e di descrittori di forma;
- ❑ dell'estrazione di caratteristiche morfologiche e del loro raggruppamento;
- ❑ della centratura (matching) di immagini, mappe e di modelli 3D, e della ricostruzione ed oggetti;
- ❑ dell'interpretazione di scene e dell'analisi di sequenze,

comprendendo così tanto i problemi di classificazione (a basso livello), quanto questioni sottili di interpretazione semantica (ad alto livello), passando per lo studio dell'analisi sintattica delle tessiture (a medio livello). Di conseguenza approcci partizionati e sequenziali, facenti uso di tecniche multilivello (multi – risoluzione, multi – temporale, multi – spaziale, multi – scala), costituiscono strumenti validi ed efficaci per il trattamento delle osservazioni, da far precedere da note tecniche progettuali di simulazione ed ottimizzazione e far seguire da altrettanto note regole inferenziali di validazione dei dati e dei modelli per il controllo di qualità ed il controllo e confronto d'ipotesi.

Quanto esposto ha un suo naturale campo d'applicazione negli studi, ormai da lungo tempo condotti ed approfonditi, per il controllo geodetico di movimenti (siano essi spostamenti o deformazioni), ma i campi delle sue possibili applicazioni possono essere molteplici ed assai diversificati. In ambito topografico e/o cartografico, ha spesso trionfato un approccio empirico che ha condotto a risolvere molti problemi attraverso

un vero e proprio bricolage, dove ogni problema costituisce un caso a sé stante, forse brillantemente risolto, ma che non lascia traccia metodologica per altri problemi che si dovranno affrontare.

In questo caso, la modellazione analitica al continuo serve per descrivere una vasta gamma di fenomeni, dove le nozioni di prossimità e somiglianza possono essere applicate allo studio di problemi normali, isotropi (o decomponibili ortogonalmente), continui e gradualmente variati:

- ❑ i modelli digitali dalle altezze (DEM) e di variazione d'altezza;
- ❑ i modelli digitali di superficie (DSM) e di variazione di superficie;
- ❑ i modelli digitali di dati tematici a referenza spaziale (DTM);
- ❑ i modelli digitali dei livelli di grigio e delle scale di colore di immagini e mappe;
- ❑ la trasformazione fra mappe in diversi sistemi di coordinate e/o di rappresentazione;
- ❑ la georeferenziazione di ortofotografie su mappe e modelli 3D;
- ❑ la descrizione di sezioni e profili;
- ❑ la descrizione di contorni e curve di livello;
- ❑ la descrizione di linee di rottura in immagini, mappe, modelli 3D ed oggetti;
- ❑ la descrizione di linee strutturali o scheletriche in immagini, mappe, modelli 3D ed oggetti;
- ❑ la sovrapposizione di elementi metrici vettoriali ad ortofotografie georeferenziate;
- ❑ la regolarizzazione delle discrepanze fra dati cartografici comuni a due o più sistemi di riferimento;

In tutti questi casi, l'informazione necessaria è ottenuta dalle osservazioni tipiche della geodesia e della geomatica, e delle tecniche derivate dalle loro scienze affini, nonché da informazioni a priori dedotte da sistemi di riferimento più generali e/o da campi di punti (cosiddetti di inquadramento, emanazione od appoggio) già determinati in precedenza. A queste osservazioni corrispondono precise equazioni d'osservazione ed alle informazioni a priori equazioni semplici di pseudo-osservazione diretta. Queste formano una prima parte del modello funzionale cui deve sempre corrispondere un ben definito modello stocastico: i pesi delle osservazioni e delle pseudo-osservazioni, nel caso più semplice, ovvero la loro matrice di varianza-covarianza nei casi più complessi (quantomeno per le informazioni a priori, in quanto certamente provenienti da precedenti elaborazioni e pertanto sicuramente correlate).

Per una più completa analisi ed interpretazione dei problemi in esame, a questa prima parte deve seguire una seconda parte cosiddetta morfologica del modello funzionale, in generale costituita da modelli neri per descrivere, rappresentare o ricostruire rispettivamente linee, superfici od oggetti. Le equazioni di questa seconda parte "morfologica" del modello funzionale collegano parametri puntuali a parametri morfologici capaci di modellare la forma di linee, superfici od oggetti in esame. Esse non contengono alcuna informazione, ma non possono essere scritte come equazioni di vincolo, bensì devono essere scritte come equazioni di pseudo-osservazione, non solo per ben noti e spesso insormontabili problemi computazionali, ma anche e soprattutto per permettere tutta la flessibilità necessaria per collegare (lisciando) un gran numero di parametri puntuali ad un ben minor numero di parametri morfologici.

Pertanto il modello stocastico a corredo di questo secondo gruppo di equazioni non comporta una loro sovrappesatura, come se le pseudo-osservazioni sostituissero vincoli, ma la definizione di pesi opportunamente equilibrati fra i pesi delle osservazioni e delle informazioni a priori (cui corrisponde il primo gruppo di equazioni) e le varianze attese dei parametri puntuali (tenuto conto anche del liscio)

effettuato proprio con le suddette equazioni di pseudo-osservazione morfologiche). Come è già evidente per semplici problemi di compensazione mista e/o di interpolazione/approssimazione con dati eterogenei, la definizione di un modello stocastico completo costituisce un problema complesso, non-lineare, da risolvere quantomeno con un algoritmo iterativo cosiddetto di riproduzione dei pesi o, e talvolta meglio, con opportune stime di covarianza.

Si badi altresì che eventuali misure di controllo e/o collaudo collegate a punti della rappresentazione/ricostruzione possono essere compensate globalmente ed impiegate per verifiche di crossvalidazione solo grazie al collegamento dato dalle pseudo-osservazioni morfologiche fra i parametri puntuali prima e dopo il lisciamento prodotto dalle stesse pseudo-osservazioni morfologiche. A tal fine, per evitare possibili fraintendimenti conviene chiamare "seminati" gli insiemi di parametri puntuali prima del lisciamento (tradizionalmente infatti le strutture reticolari sono abbastanza e talvolta fortemente irregolari) e "grigliati" gli insiemi di parametri puntuali dopo il lisciamento (infatti altrettanto tradizionalmente i campi di punti restituiti sono spesso regolari o quasi).

Per quanto riguarda inoltre eventuali sovrapposizioni temporali, basta semplicemente applicare quanto usualmente fatto per il controllo geodetico dei movimenti. Infatti una terza parte cosiddetta "dinamica" del modello funzionale, corredata da un opportuno modello stocastico (in questo caso specifico costituito da semplici pesi, poiché le varie epoche sono per lo più fra loro indipendenti), potrebbe essere messa in atto con le stesse modalità della seconda collegando fra loro i parametri morfologici delle tante seconde parti "morfologiche" quante sono le epoche che costituiscono i vari strati della sovrapposizione temporale. Resta da osservare che prevalendo solitamente l'estensione spaziale su quella temporale, è conveniente impiegare modelli deterministici per la modellazione dinamica, se del caso, riservando quelli stocastici alla modellazione morfologica.

Infine si noti come, tutti i casi in cui i dati in esame siano essenzialmente discreti, oppure la continuità o quantomeno la graduale variabilità dei fenomeni in esame non possa essere assunta come un'ipotesi valida, richiedano di procedere al loro studio per altra via. Allora tecniche particolari, offerte dalla matematica discreta ed alternative alla modellazione analitica al continuo, sono costituite da importanti metodologie e procedure complementari, quali la "cluster analysis", i metodi di "perceptual grouping" ed algoritmi "ad hoc", cosiddetti nella letteratura specialistica: analizzatori sintattici (o "parsers") cui si rimanda, avendo avuto modo sicuramente di parlarne altrove, trattandosi di problemi non troppo dissimili dalla modellazione di oggetti e/o di cartografia informatica.

Un'ultima osservazione deve rilevare come tutta la trattazione svolta e quella a seguire siano poco geodetiche, da un punto di vista classico. Infatti la geodesia geometrica è pressoché del tutto assente ed anche la geodesia fisica è confinata in un esempio, verso la fine del presente lavoro. Tutto ciò è certamente vero ed il presente lavoro non vuole certamente costituire un testo base per lo studio della geodesia, ma mettere chiaramente in evidenza come la geodesia (insieme alla cartografia ed accanto all'astronomia) abbia contribuito, da sempre, a formare parti rilevanti della matematica applicata e della statistica e come queste stesse parti abbiano poi vissuto di vita propria, dando importanti sostegni alla formazione, allo sviluppo ed al consolidamento di altre scienze e/o altre tecniche, vicine e più lontane. Una conferma eloquente è dato dal fatto che, ancora non molti decenni fa, le parti più elementari del trattamento delle osservazioni erano note, nell'ambito della fisica sperimentale, con l'espressione: teoria degli errori, di evidentissima derivazione astronomica e geodetica.

## APPENDICE A – TRE ESEMPI DI PROBLEMI A MINIMI QUADRATI

La compensazione di strutture reticolari, come pure la successiva interpolazione di seminati o grigliati di punti per la ricostruzione di superfici, sono problemi caratteristici delle discipline del rilevamento e, in particolare della geodesia operativa e della topografia, come pure della geomatica: dalla fotogrammetria . attraverso la cartografia, fino ai sistemi informativi territoriali. Problemi analoghi sono dati dalla compensazione di blocchi di immagini (e eventualmente mappe e modelli 3D), come pure dalle trasformazioni elementari piane o spaziali e dalla centratura di segmenti, figure e elementi 3D. Gli stessi problemi (di compensazione di strutture reticolari ed interpolazione di seminati o grigliati di punti) si ritrovano comunque anche in altre discipline che, nel tempo, li hanno fatti propri.

### DUE COMPENSAZIONI DI STRUTTURE RETICOLARI

#### A) MODELLO FUNZIONALE – EQUAZIONI DI OSSERVAZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE PRIME <sup>30</sup>:

$$D(I,J)=ALFA \times Z(J)-BETA \times Z(I)+GAMMA$$

$$ALFA = 5 \qquad BETA = 2 \qquad GAMMA = 4$$

MODELLO STOCASTICO:  
OSSERVAZIONI INDIPENDENTI E DI UGUALE PRECISIONE  
PESO DEI VINCOLI (SULLA INCOGNITA 1) UGUALE A 10000

#### DATI IN INGRESSO

I	J	D(I,J)
1	2	1.81
2	3	4.36
3	4	3.61
4	1	4.62
1	3	3.23
2	4	5.15

#### ELABORAZIONI

MATRICE DISEGNO A				T. NOTO B	PESI
-2	5			2.19	1
	-2	5		-0.36	1
		-2	5	0.39	1
5			-2	-0.62	1
-2		5		0.77	1
	-2		5	-1.15	1
1				0	10.000

<sup>30</sup> Un modello funzionale alle differenze prime, come pure il successivo modello funzionale alle differenze seconde, da sempre, sono tipici delle discipline geodetiche e geomatiche, in particolare i primi, per la loro evidente maggiore semplicità. Quelli qui presentati sono volutamente astratti, perché si possa analizzarli, prescindendo dalla conoscenza specifica di singoli modelli funzionali, derivati da ben precisi schemi propri della geodesia e della geomatica delle loro scienze affini. Gli stessi modelli funzionali possono altresì derivare dalla discretizzazione di equazioni differenziali di primo e secondo ordine, nonché dalle cosiddette reti di trasporto, limitatamente ai soli modelli funzionali alle differenze prime.

B) MODELLO FUNZIONALE – EQUAZIONI DI OSSERVAZIONE  
ALLE DIFFERENZE FINITE SECONDE:

$$D(I,J,K)=ALFA \times Z(I)-2 \times BETA \times Z(J)+GAMMA \times Z(K)+DELTA$$

$$ALFA = 10 \quad BETA = 4 \quad GAMMA = 2 \quad DELTA = 5$$

MODELLO STOCASTICO:  
OSSERVAZIONI INDIPENDENTI E DI UGUALE PRECISIONE  
PESO DEI VINCOLI (SULLE INCOGNITE 1 E 2) UGUALE A 10000

DATI IN INGRESSO

I	J	K	D(I,J,K)
3	1	2	4.32
1	2	4	6.91
4	3	1	4.67
2	4	3	4.26
5	3	4	5.36
3	4	6	7.79
6	5	3	3.77
4	6	5	4.93

ELABORAZIONI

MATRICE DISEGNO A				T. NOTO B	PESI	
-8	2	10		0.68	1	
10	-8		2	-1.91	1	
2		-8	10	0.33	1	
10	2	-8		0.74	1	
	-8	2	10	-0.36	1	
	10	-8		2	-2.79	1
	2		-8	10	1.23	1
		10	2	-8	0.07	1
1				0	10.000	
1				0	10.000	

INTERPOLAZIONE PER LA RICOSTRUZIONE DI SUPERFICIE

MODELLO FUNZIONALE – INTERPOLAZIONE AD ELEMENTI FINITI <sup>31</sup>:

$$S = A + B \times X + C \times Y + H \quad SE \quad X^2 + Y^2 < 4$$

$$S = D + E \times X + F \times Y + K \quad SE \quad X^2 + Y^2 > 4$$

$$H = -0.62 \quad K = 2.33$$

31 Un modello funzionale ad elementi finiti è ormai tipico delle discipline geodetiche e geomatiche, anche se la sua tipicità è una conquista ben più recente, rifacendosi alla ricostruzione di linee, superfici ed oggetti 3D, alle trasformazioni piane o spaziali elementari ed alla centratura di segmenti, figure o mappe e corpi 3D. Oggigiorno gli stessi modelli funzionali possono anche derivare dalla discretizzazione di equazioni differenziali, specialmente se alle derivate parziali, nonché dalla modellazione matematica di parecchi campi fisici. La ragione della più recente acquisizione di tali modelli sta nelle attuali maggiori capacità di calcolo, proprie delle tecnologie dell'informazione che, assieme alla conquista dello spazio hanno pure esteso e cambiato radicalmente forma e natura delle strutture reticolari proprie della geodesia e della geomatica (bastando per tutto ciò fare riferimento al GPS ed al telerilevamento).

## OSSERVAZIONI INDIPENDENTI E DI UGUALE PRECISIONE

### DATI IN INGRESSO

VAR. IND. X	VAR. IND. Y	S OSSERVATO
0.16	0.16	0.57
-0.16	0.16	0.78
-0.16	-0.16	0.92
0.16	-0.16	-0.52
2.57	2.57	-0.70
-2.57	2.57	-1.87
-2.57	-2.57	-0.17
2.57	-2.57	-0.48

### ELABORAZIONI

MATRICE DISEGNO A			T. NOTO B	PESI		
1	0.16	0.16	-1.19	1		
1	-0.16	0.16	-1.40	1		
1	-0.16	-0.16	-1.54	1		
1	0.16	-0.16	-0.10	1		
		1	2.57	2.57	3.03	1
		1	-2.57	2.57	4.20	1
		1	-2.57	-2.57	2.50	1
		1	2.57	-2.57	.. 2,81	1

La soluzione di questi problemi a minimi quadrati richiede di calcolare, nell'ordine:

- la matrice normale ed il termine noto normale;
- il vettore della soluzione;
- il vettore delle osservazioni compensate e quello degli scarti – residui;
- sigma zero;
- la matrice inversa della matrice normale;
- gli sqm della soluzione;
- gli sqm delle osservazioni compensate e quelli degli scarti – residui;
- il numero di condizione tra i parametri del sistema;
- le ridondanze locali delle osservazioni.

Tutti questi passaggi sono assolutamente standard nel calcolo della soluzione di problemi a minimi quadrati e, per questa ragione, si rimanda allo svolgimento di altri semplici esempi numerici di problemi minimi quadrati, considerando inutile riportare lunghi elenchi tabellari, poco significativi. Resta invece da osservare, come nel caso di problemi non – lineari, a causa della non – linearità del modello funzionale o di quello stocastico, oppure della norma (ad es., per l'uso di procedure robuste), un qualsiasi problema minimi quadrati debba essere ripetuto, aggiornando la soluzione, passo a passo, sulla base dei risultati intermedi ottenuti, fino ad arrivare alla convergenza del metodo alla soluzione attesa, oppure altrimenti arrestato perché non convergente per qualche motivo da ricercare.

Infine è interessante notare come la conoscenza dei metadati di una compensazione di una rete di tipo geodetico (sia essa una rete geodetica propriamente detta, oppure un blocco fotogrammetrico od un'altra struttura topologicamente assimilabile) porti a studiare le matrici di covarianza di parametri, osservazioni compatibili con i parametri e scarti-residui.

Se alcuni di questi sono geometricamente raggruppati a due, a due o a tre, a tre (come, ad es., rispettivamente per le coordinate di punti nel piano o nello spazio 3D), allora è d'interesse conoscere anche le loro componenti principali, operando un'opportuna rotazione sulle parti interessate delle sopraccitate matrici di covarianza.

Una matrice di covarianza a due o tre dimensioni (o minori diagonali principali, due per due o tre per tre, di una matrice di covarianza più grande) ha forma rispettivamente:

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \text{sim.} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \text{sim.} & & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

Nell'ipotesi consueta di normalità delle quantità osservate, la funzione densità di probabilità a due o tre componenti è gaussiana e ha espressione:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}} e^{-\frac{1}{2}u^T C^{-1}u} \quad p(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det C}} e^{-\frac{1}{2}u^T C^{-1}u}$$

dove:

$$u = \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{bmatrix}$$

ovvero a due dimensioni:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right]}$$

essendo:  $\rho = \sigma_{xy} / \sigma_x\sigma_y$

La sezione della campana di Gauss con un piano genera un'ellisse, caratterizzato da due semiassi (maggiore e minore) e da un angolo d'orientamento:

$$\lambda_{max,min} = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arctan \frac{-2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

calcolati attraverso una riduzione a forma spettrale della matrice inversa della matrice di covarianza:

$$C^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_{xy} \\ \text{sim.} & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$$

La suddetta riduzione si compie in due passi, in quanto:

- i semiassi sono dati dagli autovalori del determinante secolare, ottenuti risolvendo l'equazione caratteristica (di 2° grado):  $\lambda^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\lambda + (\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) = 0$
- l'angolo d'orientamento è ottenuto imponendo l'annullamento del termine extra-diagonale della matrice degli autovalori, essendo la matrice degli autovettori la usuale matrice di rotazione nel piano:

$$\sin \vartheta \cos \vartheta (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \sigma_{xy} = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + \cos 2\vartheta \cdot \sigma_{xy} = 0$$

La sezione dell'iper-superficie normale di Gauss con un iper-piano (entrambe a tre dimensioni e disposti in uno spazio 4D) genera un ellissoide, caratterizzato da tre semiassi (maggiore, intermedio e minore) e da tre angoli d'orientamento (secondo la convenzione di Eulero: precessione, nutazione e rotazione propria), e calcolati attraverso una riduzione a forma spettrale della matrice inversa della matrice di covarianza:

$$\det C = \sigma_x^2 \sigma_y^2 \sigma_z^2 + 2\sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz} - \sigma_x^2 \sigma_{yz}^2 - \sigma_y^2 \sigma_{xz}^2 - \sigma_z^2 \sigma_{xy}^2$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} \sigma_y^2 \sigma_z^2 - \sigma_{yz}^2 & \sigma_{xz} \sigma_{yz} - \sigma_z^2 \sigma_{xy} & \sigma_{xy} \sigma_{yz} - \sigma_y^2 \sigma_{xz} \\ \sigma_x^2 \sigma_z^2 - \sigma_{xz}^2 & \sigma_{xy} \sigma_{xz} - \sigma_x^2 \sigma_{yz} & \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 \\ \text{sim.} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d & e \\ & b & f \\ \text{sim.} & & c \end{bmatrix}$$

- I semiassi dell'ellissoide sono gli autovalori del determinante secolare, ottenuti risolvendo l'equazione caratteristica di 3° grado (di cui si ha avuto modo di parlare altrove ed a lì si rimanda 32):

$$\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (ab + ac + bc - d^2 - e^2 - f^2)\lambda - (abc + 2def - af^2 - be^2 - cd^2) = 0$$

e, confrontando fra loro le lunghezze dei semiassi, si individua il massimo, l'intermedio ed il minimo.

- Dopodiché la matrice degli autovettori (calcolabile con note tecniche di analisi fattoriale di cui, a sua volta, si ha avuto modo di parlare altrove ed a lì ancora si rimanda) è una matrice orto-normale e può essere studiata come una matrice di rotazione che, nel caso di angoli di Eulero (detti: precessione, nutazione e rotazione propria), ha forma:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \alpha - \sin \vartheta \cos \zeta \sin \alpha & \sin \vartheta \cos \alpha + \cos \vartheta \cos \zeta \sin \alpha & \sin \alpha \sin \zeta \\ -\cos \vartheta \sin \alpha - \sin \vartheta \cos \zeta \cos \alpha & -\sin \vartheta \sin \alpha + \cos \vartheta \cos \zeta \cos \alpha & \cos \alpha \sin \zeta \\ \sin \vartheta \sin \zeta & -\cos \vartheta \sin \zeta & \cos \zeta \end{bmatrix}$$

32 Si noti come la relativa lunghezza e complessità della sua soluzione, come pure l'esplicitazione dell'incorrelazione dei tre autovalori, impediscano purtroppo di scrivere, in forma chiusa, le espressioni dei tre semiassi e dei tre angoli d'orientamento degli ellipsoidi.

## APPENDICE B - EQUAZIONI DELLA FOTOGRAMMETRIA DIGITALE IN UN APPROCCIO GLOBALE <sup>33</sup>

È possibile affrontare il problema della ricostruzione della forma e della luminosità apparente di un oggetto da sue immagini digitali, in modo globale, scrivendo equazioni valide in grande. Vari procedimenti a passi o, almeno sotto certe condizioni, globali permettono la loro soluzione. Vale la pena ricordare, ancora una volta, due maggiori ostacoli da affrontare:

- ❑ determinazione dei valori approssimati delle incognite;
- ❑ archiviazione ed elaborazione di grandi quantità di dati.

Dette equazioni possono essere scritte, in modo formalmente molto semplice, supponendo l'oggetto ripreso descrivibile con due funzioni monodrome di due variabili rappresentanti rispettivamente:

- ❑ la forma in termini della quota in funzione delle coordinate planimetriche, anche se, in questo modo, non è possibile descrivere integralmente un solido a tutto tondo;
- ❑ la luminosità apparente della superficie dell'oggetto stesso.

Le variabili, algebriche e funzionali, da prendere in considerazione sono le seguenti:

- ❑  $X, Y, Z$  coordinate nello spazio oggetto;
- ❑  $x, y$  coordinate nel piano immagine;
- ❑ funzione di descrizione geometrica della superficie;
- ❑ funzione di descrizione radiometrica della superficie;
- ❑  $\underline{X} = (X, Y)$  vettore delle coordinate planimetriche;
- ❑  $\underline{x} = (x, y)$  vettore delle coordinate del piano immagine;
- ❑  $\underline{O} = (X_0, Y_0, Z_0, \omega, \phi, k, \dots)$  vettore dei parametri di orientamento e di calibrazione,

mentre l'osservabile è, come usualmente in fotogrammetria digitale, l'insieme di valori di toni di grigio (o di scale di colore) della superficie registrato dai pixel del sensore. Il modello funzionale, ottenuto a partire dalle ipotesi di propagazione della luce è estremamente semplice: la luce va dai punti della superficie dell'oggetto ai punti del piano del sensore, percorrendo una linea retta e copiando punto per punto il valore di grigio o di colore della superficie nel valore registrato dal pixel del sensore. Pertanto si trascurano gli effetti dovuti:

- ❑ alla non – planarità della superficie del sensore;
- ❑ alla non – uniforme spaziatura degli elementi sensibili;
- ❑ alla distorsione dell'obbiettivo;
- ❑ agli aspetti geometrici e radiometrici dell'attraversamento dell'atmosfera ad altro ancora.

Il legame tra le coordinate del punto oggetto e del corrispondente punto immagine, ed i parametri di orientamento del sensore è espresso dalle equazioni di collinearità, esprimibili modo puramente formale, nell'ambito di questa trattazione:

---

<sup>33</sup> Questo paragrafo è una trascrizione di un rapporto interno redatto dai Proff. Giovanni Battista Benciolini, Gianfranco Forlani e Domenico Sguerso su argomenti di fotogrammetria digitale; a loro vanno i ringraziamenti dell'autore.

$$x = C(X, Z, O)$$

altrimenti semplicemente esprimibile come:  $x = (X, Z, O)$ . Pertanto l'equazione d'osservazione dell'omologia fra immagini diviene:

$$g(x(\underline{X}, Z(\underline{X}), \underline{O})) - G(\underline{X}) = 0$$

Questa equazione é suscettibile di essere applicata in vari contesti, considerando incognite diverse grandezze.

- Nell'approccio globale, interessante per la sua generalità, é possibile considerare incogniti i parametri di orientamento di tutti i sensori e le due incognite funzionali  $Z, G$ .
- In alternativa, si possono determinare dapprima le incognite algebriche (con osservazioni apposite, oppure considerando solo alcune finestre ritagliate sulle immagini) e successivamente le incognite funzionali di descrizione dell'oggetto.
- Un caso estremo, utile tuttavia nella pratica fotogrammetrica, si ha se sono noti sia i parametri di orientamento, sia la forma della superficie ripresa; allora nell'equazione precedente risulta incognita solo la funzione  $G$  e la sua determinazione, ottenibile da un'immagine singola, é la produzione di un'ortimmagine.
- E' ovviamente possibile effettuare anche il passaggio inverso: date le funzioni  $Z, G$ , si scelgono valori convenienti per i parametri di orientamento di due immagini fittizie e si producono valori di grigio (o di colore) di due immagini sintetiche che costituiscono una stereo - orto - immagine, utile per la fotointerpretazione.

L'utilizzo delle equazioni dell'omologia fra immagini in una compensazione pone diversi problemi. L'equazione stessa deve essere linearizzata e si deve decidere, come trattare le incognite funzionali  $Z, G$ . É possibile linearizzare detta equazione e risolvere formalmente il problema di stimare tutte le incognite (algebriche e funzionali) del problema, mantenendo la descrizione continua dell'oggetto e delle immagini; é tuttavia necessario precisare che un'applicazione numerica della soluzione, definita al continuo, richiede comunque una qualche forma di discretizzazione, anche se non imposta a priori e, di conseguenza, meno arbitraria dell'adozione di modelli parametrici. Si deve ricordare anche che la funzione  $g$  é disponibile solo sotto forma di un insieme di valori discreti e si deve notare poi come certe scelte arbitrarie, quali la risoluzione e la regolarità dei modelli parametrici, possano essere guidate proprio da un'analisi del problema condotta al continuo. Infine i modelli continui, possono dare indicazioni sulla precisione delle stime.

Nel prosieguo, si trattano, sommariamente e formalmente, la linearizzazione delle equazioni di osservazione e la parametrizzazione delle funzioni che descrivono l'oggetto. La parametrizzazione più semplice e conveniente é costituita da due modelli ad elementi finiti. La risoluzione spaziale di tali modelli ed il loro grado di regolarità devono essere scelti con cura. Un'indicazione, in proposito, si potrebbe ottenere, come già detto in precedenza, dall'analisi del problema condotta al continuo; é tuttavia possibile applicare regole empiriche.

- La risoluzione del modello radiometrico deve essere paragonabile alla risoluzione delle immagini, riportata, alla scala dell'oggetto.
- La risoluzione del modello geometrico deve essere scelta in base alle caratteristiche della superficie, morfologicamente più o meno ondulata, ed alla ricchezza di contenuto geometrico delle immagini.

Le funzioni modello sono indicate con i simboli:

$$Z(\underline{X}) = Z(\underline{X}, \underline{Q}) \quad \text{e} \quad G(\underline{X}) = G(\underline{X}, \underline{R})$$

dove:  $\underline{Q}, \underline{R}$ , sono i vettori dei parametri dei modelli. Si possono considerare due diverse versioni discrete dell'equazione dell'omologia fra immagini e, data la funzione  $g$ , campionata ad intervalli regolari o comunque predefiniti sul piano immagine, si può scrivere:

- un'equazione d'osservazione per ogni valore campionato sul piano immagine operando sui groundel (proiezione dei pixel immagine sull'oggetto) e riflettendo così la struttura dei dati delle immagini digitali;
- un'equazione d'osservazione per punti definiti regolarmente nello spazio oggetto, operando sui voxel (discretizzazione, tridimensionale dell'oggetto), procedura che richiede l'interpolazione dei valori della funzione  $g$ , ma consente una trattazione più semplice, dovuta alla forma delle equazioni di collinearità.

Per trattare l'equazione dell'omologia fra immagini, in base alla seconda ipotesi, si introducono due indici  $i, k$ , corrispondenti rispettivamente alle diverse immagini ed ai diversi punti considerati (determinati dalle loro coordinate planimetriche nello spazio oggetto). Di conseguenza, l'equazione d'osservazione dell'omologia fra immagini ha espressione:

$$g_i(\underline{x}(\underline{X}_k, Z(\underline{X}_k, \underline{Q})), \underline{O}_i) - G(\underline{X}_k, \underline{R}) = 0$$

Il numero di equazioni da considerare deve essere determinato controllando, per ogni coppia  $i, k$ , se le coordinate immagine:  $\underline{x}(\underline{X}_k, Z(\underline{X}_k, \underline{Q})), \underline{O}_i$ , sono all'interno del formato utile delle immagini. Dopodiché avendo indicato con una tilde ( $\sim$ ) i valori approssimati delle incognite e con  $\Delta$  le nuove incognite delle equazioni linearizzate, l'equazione d'osservazione dell'omologia fra immagini linearizzata ha espressione:

$$g_i(\underline{x}(\underline{X}_k, Z(\underline{X}_k, \tilde{\underline{Q}})), \tilde{\underline{O}}_i) - G(\underline{X}_k, \tilde{\underline{R}}) + \left( \frac{\partial g_i}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{Z}} \frac{\partial \underline{Z}}{\partial \underline{Q}} \right) \Delta \underline{Q} + \left( \frac{\partial g_i}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{O}} \right) \Delta \underline{O}_i - \frac{\partial G}{\partial \underline{R}} \Delta \underline{R} = 0$$

Per trattare detta espressione linearizzata in una compensazione, si devono calcolare i valori del termine noto, interpolando la funzione  $g$  con un modello ad elementi finiti, tenendo conto delle correlazioni, propagate dai valori campionati ai valori interpolati, mentre i coefficienti dell'espressione linearizzata sono espressi come prodotti di derivate, secondo la regola di derivazione di funzione composta:

- le derivate della funzione  $g$  sono determinate numericamente;
- le derivate di  $x$  si calcolano in base alle espressioni complete delle equazioni di collinearità;
- le derivate di  $Z, G$  si calcolano in base alle espressioni esplicite dei due modelli ad elementi finiti della superficie dell'oggetto rilevato.

Il numero di incognite del problema é molto elevato e dipende dalla risoluzione dei modelli geometrico e radiometrico dell'oggetto, ovvero dalle dimensioni dei due vettori di parametri  $Q, R$ . In alcuni casi, é possibile sostituire la funzione modello  $G$  con i suoi valori direttamente definiti nei punti di coordinate  $X_k$ . In questo modo, l'espressione linearizzata diventa e le incognite  $G_k$  possono essere isolate dalle altre, nel calcolo della soluzione:

$$g_i(\underline{x}(X_k, Z(X_k, \tilde{Q}), \tilde{O}_i)) + \left( \frac{\partial g_i}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \underline{Q}} \right) \Delta \underline{Q} + \left( \frac{\partial g_i}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{O}} \right) \Delta \underline{O}_i - G_k = 0$$

Le equazioni d'osservazione possono essere discretizzate, come già detto in precedenza, anche facendo riferimento al campionamento sul piano immagine. Per fare questo, conviene separare nell'equazione d'osservazione dell'omologia fra immagini, due espressioni, dove l'indice  $j$  indica un generico pixel dell'immagine  $i$ :

$$g_i(\underline{x}_j) - G(\underline{X}_{i,j}, \underline{R}) = 0$$

$$\underline{x}_j = C(\underline{X}_{i,j}, Z(\underline{X}_{i,j}, \underline{Q}), \underline{O}_i)$$

che linearizzate diventano:

$$g_i(\underline{x}_j) - G(\tilde{\underline{X}}_{i,j}, \tilde{\underline{R}}) - \frac{\partial G}{\partial \underline{X}} \Delta \underline{X}_{i,j} - \frac{\partial G}{\partial \underline{R}} \Delta \underline{R} = 0$$

$$\underline{x}_j - C(\tilde{\underline{X}}_{i,j}, Z(\tilde{\underline{X}}_{i,j}, \tilde{\underline{Q}}), \tilde{\underline{O}}_i) - \frac{\partial C}{\partial \underline{X}} \Delta \underline{X}_{i,j} - \left( \frac{\partial C}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \underline{Q}} \right) \Delta \underline{Q} - \frac{\partial C}{\partial \underline{O}} \Delta \underline{O}_i = 0$$

Per ciascun pixel di ciascuna immagine, si ha un'equazione d'osservazione ed una coppia di equazioni di vincolo (o di pseudo-osservazione sovrappesate), mentre le incognite del problema comprendono anche le coordinate planimetriche  $x_{ij}$  del punto oggetto, corrispondente al singolo pixel. Si osservi come utilizzando queste equazioni non sia necessario interpolare i valori dei toni di grigio (o delle scale di colore), né derivarli.

Un'osservazione conclusiva di grande interesse pone poi l'attenzione sul fatto che quanto qui esposto, per la fotogrammetria digitale, abbia una sua possibile applicazione anche nell'ambito della cartografia numerica.

Infatti il problema del passaggio da un sistema di coordinate cartografico ad un altro è un problema non troppo diverso, può essere risolto percorrendo una strada simile, richiedendo preliminarmente di prendere in considerazione i seguenti casi.

- ❑ I due sistemi di coordinate cartografici sono interamente noti, cioè la forma e l'orientamento dell'ellissoide è noto, come pure è nota la proiezione / rappresentazione cartografica adottata, la condizioni di tangenza ed altri suoi eventuali particolari affatto secondari (ad es., false origini, speciali contrazioni, ecc.). Allora una trasformazione, facente uso delle equazioni dirette ed inverse della cartografia, permette il passaggio da un sistema all'altro (e viceversa) e la stima dei parametri delle trasformazioni serve solo a minimizzare gli inevitabili errori accidentali, insiti nella misura geodetico – topografica o fotogrammetrica dei punti e nella loro rappresentazione cartografica.
- ❑ I due sistemi di coordinate cartografici non sono interamente noti, oppure addirittura non lo sono per nulla, in quanto almeno uno dei due ellissoidi non è ben conosciuto, quantomeno nel suo orientamento, come pure almeno una delle due proiezioni / rappresentazioni cartografiche adottate non è ben conosciuta, quantomeno nelle condizioni di tangenza od in altri eventuali particolari affatto secondari (ad es., false origini andate perdute, contrazioni non documentate, mancanza di informazioni sull'altimetria, ecc.). Allora il passaggio da un sistema all'altro (e viceversa) non può semplicemente consistere nella stima dei parametri delle trasformazioni per minimizzare gli inevitabili errori accidentali, insiti nella misura geodetico – topografica o fotogrammetrica dei punti e nella loro rappresentazione cartografica, essendo pressoché sconosciute almeno una delle due equazioni dirette ed inverse della cartografia. Al contrario, il passaggio da un sistema all'altro (e viceversa) deve dapprima provvedere ad individuare quelle trasformazioni per mezzo delle quali procedere al passaggio stesso e solo successivamente provvedere alla stima dei parametri delle suddette trasformazioni. Come ben evidente, si tratta di adottare modelli neri (anziché modelli grigi, come nel primo caso) che possono essere forniti dalla matematica applicata e/o dalla statistica, mediante metodi deterministici o stocastici, oppure misti.
- ❑ Quanto detto trova la sua prima estensione nel caso di figure e piante, dove quasi sempre si è proprio nel secondo dei due casi trattati, essendo forse stati costruiti seguendo leggi precise dell'agrimensura od altro, ma essendo quasi certamente introvabile la documentazione corrispondente (perché sepolta in archivi inaccessibili od addirittura andata perduta).
- ❑ Quanto detto trova la sua ulteriore estensione anche nel caso di vedute e modelli 3D, dove quasi sempre si è ancora nel secondo dei due casi trattati, essendo forse stati costruiti seguendo leggi precise della prospettiva od altro, ma essendo quasi certamente introvabile la documentazione corrispondente.

Tuttavia l'applicazione di maggiore interesse è certamente nell'ambito della cartografia classica e consiste nel trasformare le mappe catastali in moderna cartografia numerica, georeferenziata come le moderne carte tecniche, comunemente in uso, diventate la base dei sistemi informativi territoriali. Infatti le mappe catastali hanno certamente false origini, per lo più, incognite e sono notoriamente sprovviste di altimetria; di conseguenza, i due fatti impediscono insieme un approccio facente uso di modelli grigi ed impongono un approccio alternativo facente uso di modelli neri.

## PARTE II – PROGETTAZIONE ED OTTIMIZZAZIONE<sup>34</sup>

### 1. Impostazione del problema

Un campo in cui il calcolo fornisce un prezioso ausilio ed induce a studiare modelli di compensazione ed analisi dati, sempre più complessi e più vicini alla realtà fisica di quanto sia stato possibile in passato, è quello della progettazione delle strutture reticolari. La simulazione dei risultati che si otterranno è divenuta un passo non solo fattibile, ma ormai ineliminabile nel processo di realizzazione di una struttura reticolare, se si vuole raggiungere il massimo risultato.

Dagli anni '70, sono state studiate procedure volte alla ottimizzazione di una struttura reticolare, cioè alla individuazione della configurazione migliore in assoluto per il raggiungimento di determinati obiettivi di precisione ed affidabilità. Gli algoritmi proposti sono, in generale, piuttosto sofisticati, ma permettono di dare una risposta al problema della progettazione. Nel prosieguo, sono riportate alcune procedure nel campo della progettazione, fra le più interessanti. I modelli funzionale e stocastico cui si fa riferimento sono quelli classici con equazioni d'osservazione (e/o di pseudo-osservazione sovrappesate e non) e matrice dei pesi:

$$\hat{y} = y^0 + \hat{v} = A\hat{x} + \delta \quad ; \quad P = Q_{yy}^{-1} = \sigma_0^2 C_{yy}^{-1}$$

essendo:

- $y^0$  il vettore delle osservazioni di ordine  $m$  ;
- $\hat{y}$  il vettore delle stime dei valori;
- $\hat{v}$  il vettore degli scarti - residui delle osservazioni;
- $\hat{x}$  il vettore dei parametri di ordine  $n$  ;
- $A$  la matrice di configurazione;
- $\delta$  un vettore di termini noti;
- $\sigma_0^2$  la varianza (a priori) dell'unità di peso;
- $C_{yy}$  la matrice di varianza - covarianza delle osservazioni;
- $Q_{yy}$  la matrice dei cofattori delle osservazioni;
- $P$  la matrice dei pesi delle osservazioni,

Si noti come il modello stocastico sia quello lineare di Gauss – Markov e come, mentre il passaggio ad equazioni d'osservazione e di pseudo-osservazione non – lineari non comporta alcuna modifica nel formalismo e negli algoritmi (dovendosi solo conoscere opportuni valori approssimati dei parametri), l'adozione di modelli stocastici non – lineari (ad es. di Gauss-Helmert) richieda modifiche non elementari. D'altra parte, questi modelli possono essere interpretati come un raffinamento finale del modello stocastico, effettivamente utilizzato in fase di compensazione; pertanto la loro adozione, già in fase di progettazione, in generale è da considerarsi completamente superflua.

<sup>34</sup> Questa parte riprende ed aggiorna quanto esposto in: Barbarella M., Mussio L. (1988): Progettazione e ottimizzazione. In: M. Unguendoli (Ed) *Studi e ricerche*. CUSL, Bologna, p. 97-129.

## 2. Progettazione

Il progetto di una struttura reticolare consiste nella scelta di una configurazione e di uno schema di misura. Occorre decidere il numero di parametri, il tipo delle osservazioni e le metodologie e procedure operative, da applicare per conseguire la precisione voluta. Inoltre al momento della compensazione, va deciso il sistema riferimento nel cui ambito eseguire il calcolo. Questo sistema di riferimento va inteso come l'insieme dei parametri (ed eventualmente delle osservazioni) da tenere invariati; evidentemente tale scelta è strettamente connessa allo scopo per il quale la struttura reticolare è istituita. In ogni caso, si cerca ovviamente di ottenere la migliore struttura reticolare possibile, dal punto di vista dei requisiti di precisione ed affidabilità, nonché dei costi connessi.

Da un punto di vista matematico, la configurazione e lo schema di misura portano alla definizione della matrice di configurazione  $A$ , la precisione delle osservazioni alla matrice dei pesi  $P$  e alla varianza (a priori) dell'unità di peso  $\sigma_0^2$ . Tramite queste, è possibile calcolare la matrice dei cofattori delle incognite  $Q_{\hat{x}\hat{x}}$  e la precisione dei parametri. In letteratura, i problemi che si incontrano, nella progettazione di strutture reticolari, sono suddivisi in ordini. La progettazione di ordine zero, Zero Order Design (ZOD), riguarda la scelta del sistema di riferimento ottimale; quella di primo ordine, First Order Design (FOD), consiste nella scelta ottimale dei parametri, essendo nota la precisione delle osservazioni.

Fissata la configurazione e la precisione da raggiungere nei parametri, la scelta ottimale della precisione di ciascuna osservazione è l'oggetto della progettazione di secondo ordine, Second Order Design (SOD). Infine il miglioramento di una struttura reticolare già esistente, oppure di un progetto già compiuto tramite l'inserimento di nuovi parametri e/o nuove osservazioni, riguarda la progettazione di terzo ordine, Third Order Design (TOD).

I dati di ingresso ed uscita dei vari problemi di ottimizzazione possono essere riassunti nella seguente tabella.

Progettazione di ordine:	Parametri	
	noti:	incogniti:
Zero	$A, P$	$Q_{\hat{x}\hat{x}}$
Primo	$P, Q_{\hat{x}\hat{x}}$	$A$
Secondo	$A, Q_{\hat{x}\hat{x}}$	$P$
Terzo	$Q_{\hat{x}\hat{x}}$	$A, P$ (in parte)

La classificazione non va intesa in modo rigido, in quanto in vari ordini di progettazione sono fortemente interconnessi. L'ottimizzazione dei pesi (SOD) porta modifiche allo schema di misura (FOD), se i pesi calcolati sono così bassi che le osservazioni corrispondenti possono essere evitate del tutto. Il terzo ordine è un miscuglio di primo e secondo.

La scelta del sistema di riferimento è comunque pregiudiziale ad ogni successiva operazione, perché la relazione matematica tra  $A$ ,  $P$  e  $Q_{\hat{x}\hat{x}}$  è diversa a seconda dei casi. In generale, si ha:  $(A^T P A)^{-1} = Q_{\hat{x}\hat{x}}$ ; tuttavia il tipo di inversione dipende dal riferimento:

- l'inversa regolare di Cayley:  $( )^{-1}$ , se sono presenti vertici fissi;
- una pseudo-inversa:  $( )^+$ , in assenza di queste<sup>35</sup>.

Da un punto di vista matematico, ottimizzare significa cercare il massimo (o il minimo) di qualche funzione dei parametri, costituente l'obiettivo da raggiungere che, nel caso specifico, descrive la qualità della struttura reticolare. A sua volta, quest'ultima riveste molteplici aspetti:

- precisione dei parametri o di grandezze da essi derivati;
- controllabilità delle osservazioni contro la presenza di dati anomali;
- per i problemi di controllo, capacità di individuare variazioni;:
- contenimento dei costi connessi.

Purtroppo il requisito di precisione contrasta spesso con quello di controllabilità ed il contenimento dei costi contrasta, quasi sempre, con ogni ipotesi di miglioramento tecnico. Occorre perciò formulare una funzione obiettivo per dosare opportunamente i fattori contribuenti alla qualità della struttura reticolare, quale ad esempio:

$$z = a^T q + b s$$

dove:

---

<sup>35</sup> Si chiama matrice inversa generalizzata di una qualsiasi matrice rettangolare  $A(m,n)$ , una matrice  $A^-(n,m)$  per la quale vale la relazione a) delle seguenti relazioni:

$$A A^- A = A$$

$$A^- A A^- = A^-$$

$$(A^- A)^T = A A^-$$

$$(A A^-)^T = A^- A$$

Se vengono soddisfatte le prime due condizioni, la matrice inversa generalizzata è detta simmetrica e riflessiva.

Se vengono soddisfatte tutte e quattro le suddette condizioni, la matrice si chiama matrice pseudo-inversa, nota anche come inversa di Moore-Penrose, generalmente, indicata mediante il simbolo  $A^+$ . L'inversa di Moore-Penrose è unica e gode, inoltre, delle seguenti proprietà:

$$(A^+)^+ = A$$

$$(A^+)^T = (A^T)^+$$

$$R(A) = R(A^+)$$

$$A^+ = (A^T A)^+ A^T$$

$$A^+ = A^T (A A^T)^+$$

La matrice pseudo-inversa di una matrice  $A$  quadrata regolare ( $\det A \neq 0$ ) coincide con l'inversa regolare di Cayley:  $A^+ = A^{-1}$ .

- $s$  indica i sopraccitati costi connessi;
- $q$  tutti gli altri parametri che descrivono la qualità della struttura reticolare.

Modellare i costi connessi significa valutare tutto quanto è obbligatorio, una volta fissato lo schema di misura della struttura reticolare, nonché le modalità di acquisizione dei dati necessari. I parametri che definiscono la controllabilità di ogni singola osservazione sono la ridondanza locale<sup>36</sup> e l'affidabilità interna<sup>37</sup>. La precisione può essere espressa globalmente tramite gli autovalori della matrice dei cofattori dei parametri  $Q_{\hat{x}\hat{x}}$ ; pertanto si può minimizzare la loro somma:  $Tr(Q_{\hat{x}\hat{x}})$ , oppure il loro prodotto:  $Det(Tr(Q_{\hat{x}\hat{x}}))$ , o anche il loro massimo valore (in questo caso, si tende a trasformare l'iperellissoide d'errore in un'ipersfera). Queste quantità si traducono spesso nella sola omogeneizzazione degli errori tra i parametri che si concentrano topologicamente in un nodo, rispettivamente dell'errore quadratico medio di un parametro per le strutture reticolari "monodimensionali" (ad es., le reti di differenze di potenziale), nell'area dell'ellisse d'errore per le strutture reticolari "bidimensionali" e nel volume dell'ellissoide d'errore per le strutture reticolari "tridimensionali" (ad es., per gli ultimi due casi, le reti di tipo geodetico).

Un approccio diverso, largamente applicato, consiste nel creare una matrice di varianza - covarianza che rappresenti una distribuzione di errore ideale: la matrice di criterio, e nel tentare di approssimarla, elemento per elemento, con la matrice di varianza - covarianza di una struttura reticolare reale.

---

<sup>36</sup> Si chiama ridondanza locale di una generica osservazione il numero adimensionale (positivo e minore di uno) calcolato, nel caso di una matrice dei pesi diagonale, come prodotto del peso di quella osservazione per il cofattore dello scarto-residuo corrispondente:

$$v_i = p_i q_{v_i} \quad \text{essendo:} \quad q_{v_i} = \frac{1}{p_i} - a_i (A^T P A)^{-1} a_i^T$$

<sup>37</sup> Si chiama affidabilità interna di una generica osservazione la quantità che rimane nel corrispondente scarto-residuo, a seguito dell'immissione di un effetto perturbativo nell'osservazione stessa. Questa è misurabile tramite l'espressione:

$$\nabla(\delta_i - y_{0i}) = \frac{\hat{v}_i}{v_i} = \frac{\tau \sigma_{y_{0i}}}{\sqrt{v_i}}$$

essendo:

- $\sigma_{y_{0i}}$  lo sqm dell'osservazione  $y_{0i}$ ;
- $v_i$  la corrispondente ridondanza locale;
- $\tau$  l'ascissa corrispondente al valore della curva di potenza, scelto un livello di significatività  $\alpha$  ed una potenza del test  $\beta$ .

Si chiama invece affidabilità esterna di una generica osservazione la quantità che fluisce in un dato parametro, a seguito dell'immissione di un effetto perturbativo nell'osservazione stessa. Questa è misurabile tramite l'espressione:

$$\nabla \hat{x}_j = - \left( (A^T P A)_j^{-1} \right)^T A^T P e_i \nabla(\delta_i - y_{0i}) \quad \forall j$$

essendo:  $e_i$  il versore unitario diretto secondo la componente  $i$ -esima del vettore delle osservazioni.

Il tipo di matrice di criterio più usata è quella avente struttura di Taylor - Karman. Questa rappresenta una distribuzione di errore omogenea ed isotropa. Nel caso di strutture reticolari "bidimensionali", le ellissi di errore sono rappresentate da cerchi tutti uguali fra loro; nel caso di strutture reticolari "tridimensionali", gli ellissoidi di errore sono rappresentati da sfere sempre tutte uguali fra loro. Questa matrice di criterio può essere costruita a partire da due (o tre) funzioni definite positive della distanza tra due punti; esse descrivono la propagazione dell'errore lungo la congiungente due punti e lungo la/e direzione/i ad essa perpendicolare/i. E' stata tentata anche la costruzione di matrici di criterio utilizzando una funzione di covarianza discreta. I passi di questa corrispondono al minimo cammino fra due nodi sul grafo topologico, rappresentante la struttura reticolare, ovvero al minimo numero di lati da percorrere per andare da un nodo ad un altro.

Altre matrici di criterio possono essere costruite, a partire da matrici di cofattori dei parametri relative a strutture reticolari reali, migliorandole sotto qualche punto di vista opportunamente definito (Improved Design). Nel caso di strutture reticolari per scopi speciali, possono essere create matrici di criterio che fungono da matrici di varianza - covarianza per grandezze derivate dai parametri (ad es., informazioni morfologiche o cinematiche, oppure capaci di descrivere lo stato di deformazione di un corpo).

L'algoritmo da impiegare, per risolvere il problema della ottimizzazione, dipende dalla forma sotto cui è dato l'obiettivo: una funzione obiettivo scalare o una matrice di criterio da approssimare, elemento per elemento. Fino ad oggi, tutti i metodi sviluppati, per risolvere i problemi di ottimizzazione, possono essere suddivisi in due categorie:

- ❑ la simulazione al calcolatore;
- ❑ la progettazione matematica.

Nel primo caso, si ha una procedura iterativa che richiede il continuo intervento dell'operatore; questi deve essere un esperto, per analizzare i risultati ottenuti e migliorare la struttura reticolare. Nel secondo caso, uno specifico algoritmo di ottimizzazione, una volta avviato, fornisce automaticamente la struttura reticolare ottimale, secondo un qualche criterio matematico, senza ulteriori interventi.

### **3. Simulazione**

Una strategia di progettazione consiste nella simulazione. Si definisce un progetto di struttura reticolare e si calcolano i parametri di precisione, controllabilità e costo, assunti come obiettivo. Se i valori trovati non soddisfano le richieste, si ipotizza una diversa configurazione della struttura reticolare e si ripete il calcolo. La procedura va avanti, provando e riprovando, differenti configurazioni, finché non si ottiene una configurazione soddisfacente gli obiettivi proposti. La soluzione trovata non risulterà quella ottimale, da un punto di vista matematico, ma sarà sicuramente realizzabile dal punto di vista pratico.

E' richiesta all'operatore una notevole esperienza per la scelta della configurazione iniziale e delle varianti destinate a migliorare la precisione e la controllabilità delle stime attese, nonché ad abbassare i costi connessi. La praticità del metodo è sempre strettamente collegata alla rapidità ed alla facilità con cui si possono introdurre modifiche ed ottenere risultati da analizzare visualizzandoli. Ogni ritardo, tranne il tempo impiegato per analizzare i risultati, prendere decisioni ed introdurre le modifiche, costituisce una disfunzione del sistema. Pertanto è opportuno che gli algoritmi di calcolo siano orientati alla possibilità di elaborare, in modo sequenziale, i risultati già ottenuti, per l'aggiunta o l'eliminazione di un gruppo di osservazioni e/o di un gruppo di parametri.

Si consideri un modello che tenga conto della presenza di due gruppi di osservazioni:  $y_1^0, y_2^0$ , incorrelati tra loro e riguardanti gli stessi parametri, dove il primo sia in grado, da solo, di definire la stima dei parametri. Ad ogni gruppo, corrisponde una matrice di configurazione:  $A_i$  ( $i=1,2$ ), ed una matrice dei pesi:  $P_i$ , ( $i=1,2$ ), per cui il modello di compensazione risulta:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

e la matrice dei cofattori dei parametri ha espressione:

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = \left( A_1^T P A_1 + A_2^T P_2 A_2 \right)^{-1} = \left( \left( Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)} \right)^{-1} + A_2^T P_2 A_2 \right)^{-1}$$

dove:  $Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)} = \left( A_1^T P A_1 \right)^{-1}$ , indica la matrice dei cofattori dei parametri ottenuta risolvendo la rete con le sole osservazioni  $y_1^0$ . Applicando un noto teorema dell'algebra lineare riguardante la matrice inversa di una espressione matriciale del tipo:  $Q \pm R S T$ , supposta esistente  $S^{-1}$ , si ottiene la seguente espressione:

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)} \mp Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)} A_2^T \left( P_2^{-1} \pm A_2 Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)} A_2^T \right)^{-1} A_2 Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)}$$

L'introduzione (o l'eliminazione, sostituendo nell'espressione sopra riportata il segno: +, al segno: -, e viceversa) di un gruppo di osservazioni non richiede il calcolo e l'inversione della nuova matrice normale. Basta solo togliere (o aggiungere) alla matrice di cofattori dei parametri  $Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)}$ , già ottenuta in precedenza, un termine contenente una funzione della matrice inversa di una matrice di dimensioni molto più piccole, pari al numero delle nuove osservazioni introdotte (o eliminate). Se si introduce (o si elimina) un'osservazione alla volta, addirittura non è necessaria alcuna inversione di matrice.

Si noti come la simulazione, eseguita sulla base degli obiettivi di precisione e controllabilità, può essere seguita da un'analisi dei costi connessi e da un'ottimizzazione logistica, ove necessaria. Pertanto la mancata esecuzione della simulazione del progetto di una struttura reticolare può attualmente essere attribuita solo ad inerzia.

#### 4. Ottimizzazione matematica

Una diversa strategia di progettazione consiste nel ricercare una procedura matematica che, una volta avviata, fornisce automaticamente la struttura reticolare ottimale, secondo un qualche criterio matematico, con l'obiettivo di soddisfare, al meglio, i requisiti di qualità desiderati. In questo campo, significativi progressi sono stati raggiunti quasi esclusivamente per il SOD; tuttavia questo è di notevole aiuto per la soluzione di problemi FOD e TOD, potendo portare al rigetto di osservazioni contemporaneamente a basso peso e non utili ad aumentare la controllabilità di altre osservazioni.

Nel prosieguo, si fa esclusivo riferimento ai principali metodi proposti per la soluzione del SOD. Esso consiste nella ricerca dei pesi ottimali delle osservazioni, nota la configurazione della struttura reticolare e lo schema di misura, affinché la precisione dei parametri sia la più prossima possibile a quella ideale rappresentata dalla matrice di criterio prescelta. Si ricordi che tale matrice deve godere delle proprietà di simmetria e definita positività proprie delle matrici di covarianza<sup>38</sup>.

Alcuni metodi realizzano l'approssimazione classica (approssimazione dai due lati); altri metodi utilizzano tecniche proprie della ricerca operativa per individuare una struttura reticolare precisa almeno quanto quella ideale (approssimazione da un lato). La relazione cardine tra le quantità note nel SOD: le matrici  $A$  e  $Q_{\hat{x}\hat{x}} = \Gamma$ , e quelle incognite: la matrice  $P$ , è:

$$(A^T P A)^- = \Gamma$$

Si è indicato il simbolo di inversa generalizzata che, a seconda del rango della matrice normale derivante dalla scelta del sistema di riferimento, si tradurrà nell'inversa regolare di Cayley:  $( )^{-1}$ , o nella pseudo-inversa:  $( )^+$ . Se invece i valori di  $\Gamma$  rappresentano un limite insuperabile (approssimazione da un lato), la stessa relazione va sostituita con disequazioni, quali ad esempio:

$$(A^T P A)^-_{ii} < \gamma_{ii} \quad \forall i \quad ; \quad (A^T P A)^-_{ij} > \gamma_{ij} \quad \forall i, j \neq i$$

esistendo anche metodi con approssimazioni e disequazioni. Inoltre poiché sarebbe praticamente impossibile acquisire dati con determinate covarianze fra le osservazioni che, se presenti, sono indice di errori sistematici per i quali si richiede un'opportuna correzione, la matrice  $P$  è sempre supposta diagonale e le incognite si riducono ai pesi delle osservazioni.

### I. Metodi di soluzione tramite minimi quadrati (approccio indiretto)

Un primo metodo di soluzione si avvia trasformando la suddetta relazione cardine nella seguente relazione:

$$A^T P A = \Gamma^-$$

cosa che richiede l'inversione della matrice di criterio. Le  $m$  incognite presenti nella matrice  $P$  e corrispondenti agli  $m$  elementi diagonali principali possono essere considerate come elementi di un vettore:  $p = \text{vec } P$ . Gli  $N = n(n+1)/2$  elementi significativi della matrice quadrata e simmetrica  $\Gamma^-$  possono essere messi in un altro vettore:  $q = \text{vec } \Gamma^-$ , dove sono riportate una sotto l'altra tutte le colonne di questa

<sup>38</sup> Si chiama matrice definita positiva, una matrice quadrata e simmetrica  $Q$  tale che risulti:

$$\begin{aligned} \underline{u}^T Q \underline{u} &< 0 \quad \forall \underline{u} \\ \underline{u}^T Q \underline{u} &= 0 \quad \rightarrow \underline{u} = 0 \end{aligned}$$

matrice, a partire dagli elementi diagonali principali. La medesima relazione può essere espressa, in una forma del tutto equivalente, tramite un sistema lineare, dove  $p$  è il vettore delle incognite,  $q$  il vettore dei termini noti e la matrice dei coefficienti è ottenuta dalla matrice disegno  $A$  tramite il prodotto Katri-Rao<sup>39</sup>

$$(A^T \odot A^T)p = q$$

Si noti che questa formulazione approssima la matrice inversa della matrice di criterio.

Un secondo metodo di soluzione consiste nel moltiplicare la relazione precedente, a destra ed a sinistra, per la matrice di criterio, ottenendo grazie alle proprietà delle matrici inverse:  $\Gamma (A^T P A) \Gamma = \Gamma \Gamma^T \Gamma = \Gamma$ .

Posto:  $K^T = \Gamma A^T$ , si perviene all'equazione:

$$K^T P K = \Gamma$$

che, espressa in forma equivalente, risulta:

$$\{K^T \odot K^T\}p = q \quad \text{dove:} \quad q = \text{vec } \Gamma$$

In questo caso, si approssima direttamente la matrice di criterio.

Un terzo metodo di soluzione consiste nel calcolare la matrice dei cofattori, a partire dall'espressione della stima della soluzione:  $\hat{x} = (A^T P A)^- A^T P (\delta - y^0)$ , ovvero, per la legge di propagazione della covarianza:  $Q_{\hat{x}\hat{x}} = (A^T P A)^- A^T P P^{-1} P A (A^T P A)^-$ . Posto  $H^T = (A^T P A)^- A^T P$ , si perviene all'equazione:

$$H^T P^- H = \Gamma$$

---

<sup>39</sup> Si chiama prodotto di Kronecker fra due matrici  $A$  e  $B$ , aventi rispettivamente dimensioni  $m, n$  e  $k, l$ , la matrice  $C = A \bullet B$ , avente dimensioni  $km, lm$ , ottenuta moltiplicando (con la regola del prodotto di una matrice per un numero) la matrice  $B$  per tutti gli elementi della matrice  $A$ :

$$C = A \bullet B = [a_{ij} B] \quad \forall i, j$$

Si chiama prodotto di Katri-Rao fra due matrici  $A$  e  $B$ , aventi rispettivamente dimensioni  $m, n$  e  $k, n$  la matrice:  $C = A \odot B$ , avente dimensioni  $km, n$  ottenuta moltiplicando (con la regola del prodotto di un vettore per uno scalare) ogni colonna della matrice  $B$ , per tutti gli elementi della corrispondente colonna della matrice  $A$ :

$$C = A \odot B = [a_j \otimes b_j] = [a_{ij} b_j] \quad \forall i, j$$

che espressa in forma equivalente risulta:

$$\{H^T \odot H^T\} p = q \quad \text{dove:} \quad q = \text{vec } \Gamma$$

Si noti che la matrice  $H$  contiene la matrice  $P$ ; pertanto la soluzione richiede un procedimento iterativo, a partire da una distribuzione plausibile per i pesi o, più semplicemente, dalla matrice identità.

L'aver imposto la forma diagonale alla matrice dei pesi fa sì che i suddetti sistemi siano inconsistenti; pertanto la matrice di criterio può essere solo approssimata. Il grado di approssimazione può essere espresso dalla differenza tra la matrice dei cofattori ottenuta e la matrice di criterio (ideale):

$\Delta = (A^T P A)^{-1} - \Gamma$ , essendo  $P$  la matrice dei pesi ottenuta come soluzione degli stessi sistemi. A causa della inconsistenza di questi sistemi, occorre evidenziare un vettore di scarti-residui  $v$ :

$$(B^T \odot B^T) p = q + v$$

ed il sistema normale ha espressione (avendo indicato con la lettera  $B$ , di volta in volta, le matrici  $A$ ,  $K$  e  $H$ ):

$$(B^T \odot B^T)^T (B^T \odot B^T) p = (B^T \odot B^T)^T q$$

Introducendo il prodotto di Hadamard<sup>40</sup>, poiché vale l'uguaglianza:

$$(B^T \odot B^T)^T (B^T \odot B^T) = (B B^T) * (B B^T), \text{ lo stesso sistema normale può essere scritto nella forma:}$$

$$(B B^T) * (B B^T) p = (B^T \odot B^T)^T q$$

dove il termine noto può essere facilmente calcolato con un'espressione formalmente analoga alla nota legge di propagazione della covarianza:

$$(B^T \odot B^T)^T q = \sum_{i=1}^n b_{ki}^2 q_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ki} b_{kj} q_{ij} \quad \forall k$$

Il grave difetto del primo metodo, approssimare l'inversa della matrice di criterio, anziché la matrice di criterio stessa, può essere superato tramite una trasformazione lineare dei pesi. Inoltre questo metodo ha il grande pregio della semplicità di calcolo, in quanto può essere calcolato direttamente dalle osservazioni, senza

<sup>40</sup> Si chiama prodotto di Hadamard fra due matrici  $A$  e  $B$ , aventi stesse dimensioni  $(m, n)$ , la matrice  $C = A * B$ , avente ancora le stesse dimensioni, ottenuta moltiplicando (con le regole del prodotto dell'aritmetica) ogni elemento della matrice  $B$  per il corrispondente elemento della matrice  $A$ :

$$C = A * B = [a_{ij} b_{ij}] \quad \forall i, j$$

passaggio intermedi, e conserva la sparsità della matrice di configurazione. Un ulteriore miglioramento è offerto dalla possibilità di forzare gruppi di osservazioni ad avere lo stesso peso, cosa spesso molto importante da un punto di vista operativo. Il secondo metodo non presenta particolari pregi, né difetti, mentre il terzo metodo è più oneroso degli altri, in quanto iterativo nel calcolo della soluzione.

Un approccio sequenziale alla ottimizzazione matematica prevede la scelta di un primo gruppo di misure, definenti interamente la struttura reticolare. Dopodiché eseguita una prima volta il SOD, se la soluzione trovata non è considerata soddisfacente, vengono aggiunti altri gruppi di osservazioni. Si esegue nuovamente il SOD, aggiornando la prima soluzione con gli algoritmi tipici della progettazione interattiva.

Anche l'affidabilità può essere considerata nel SOD, tramite l'aggiunta di vincoli sui pesi. Infatti la scelta di valori massimi accettabili per le affidabilità interna ed esterna pone limiti ai valori dei pesi delle osservazioni. Se si accetta di forzare i pesi, superiori ai valori limiti, ad assumere questi valori, si possono imporre equazioni di vincolo (o di pseudo-osservazione sovrappesate). Queste condizioni modificano la soluzione, per l'aggiunta di termini correttivi applicati solo a quei pesi altrimenti eccedenti il valore massimo consentito. Inoltre nel caso in cui le pseudo-osservazioni sui pesi non fossero sovrappesate, queste sono da considerarsi come informazioni (a priori) sulle quantità da stimare.

## II. Metodi di soluzione tramite minimi quadrati ("improved design")

Un approccio, dove non sia richiesta la costruzione di una matrice di criterio, prende l'avvio da una matrice di covarianza, realizzata sulla base della configurazione della struttura reticolare e dello schema di misura, e procede per successivi miglioramenti ("improved design").

Dal progetto iniziale, sulla base di una matrice dei pesi plausibile, si calcola la matrice dei cofattori della incognite  $Q_{\hat{x}\hat{x}}$ . Quest'ultima viene decomposta nella sua forma spettrale<sup>41</sup>:

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = U \Lambda U^T \quad \text{essendo:} \quad \text{rango} (Q_{\hat{x}\hat{x}}) = r \leq n$$

ed avendo disposto gli autovalori di  $Q_{\hat{x}\hat{x}}$  in ordine decrescente.

<sup>41</sup> Si chiama proiettore:  $P(y)$ , in un sottospazio  $y$  di uno spazio vettoriale  $X$ , una matrice quadrata e simmetrica, tale che il vettore  $\underline{y} = P(y) \underline{x}$ , con  $x \in X$ , sia la componente del vettore  $\underline{x}$  in  $Y$ . Una proprietà fondamentale di tutti i proiettori è  $PP = P$ , mentre in generale non esiste  $P^{-1}$ , tranne nel caso in cui il proiettore coincida con l'identità ( $P=I$ ) a meno di eventuali scambi.

Si chiama decomposizione spettrale di una matrice  $C$  quadrata, simmetrica e definita positiva la sommatoria:

$$C = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T = U \Lambda U^T$$

dove  $P_i$  è il proiettore di un qualsiasi vettore sull'iperspazio (insieme  $U$  degli autovettori, corrispondenti ciascuno ad un autovalore, a sua volta appartenente all'insieme  $\Lambda$ ). Si verifica di seguito la sopraccitata proprietà dei proiettori:

$$P_i^2 = (u_i u_i^T)(u_i u_i^T) = u_i (u_i^T u_i) u_i^T = u_i u_i^T = P_i \quad (u_i^T u_i = 1)$$

La radice quadrata degli autovalori è proporzionale alla lunghezza dei semiassi dell'iperellissoide d'errore. Se lo spettro coperto dagli autovalori è ampio, l'iperellissoide risulta molto allungato in alcune direzioni; pertanto nella struttura reticolare sono presenti forti disomogeneità di precisione.

La precisione globale della struttura reticolare può essere migliorata riducendo le dimensioni dei semiassi più lunghi, mediante una contrazione dello spettro degli autovalori (riduzione degli autovalori più alti):

$$d_i = (1 - t) d_i + t d_r \quad \text{con: } 0 < t < 1 \quad \text{dove: } d_r = \min(d_i)$$

Con questi nuovi autovalori, si ricostruisce una nuova matrice di covarianza che diviene l'obiettivo da raggiungere. Per  $t = 0$ , non si ha alcuna contrazione, mentre per  $t = 1$ , si impone una distribuzione d'errore perfettamente omogenea (ipersfera di errore), come quella derivata da una struttura di Taylor - Karman.

Nei problemi di controllo, per una migliore individuazione di eventuali variazioni di parametri, conviene avere incertezza minore proprio nella direzione di prevedibile variazione. La rotazione dell'iperellissoide d'errore dalla configurazione iniziale si può ottenere agendo sugli autovettori, cioè modificando la corrispondente matrice. Questi problemi sono risolti con metodi di approssimazione, mutuati dall'analisi fattoriale, ovvero mediante trasformazioni procrustee.

Un'interessante ipotesi di lavoro suggerisce di provare a coniugare i vantaggi di questo approccio alternativo ("improved design") che non richiede di costruire una matrice dicriterio, con quelli forniti da primo metodo diretto: la possibilità di operare con matrici sparse. In questo caso, dopo aver migliorato direttamente la matrice di covarianza, occorre approssimarla con una funzione di covarianza modello (finita), invertire la matrice ottenuta a mezzo di questa e risolvere il sistema dato dal primo metodo diretto. E' tuttavia doveroso precisare che non si hanno, né si conoscono, esperienze a riguardo.

I pesi, comunque calcolati, risultano spesso difficilmente realizzabili in pratica e sollevano grossi problemi metrologici. Infatti pesi negativi o nulli (e anche pesi troppo piccoli) sono ovviamente inaccettabili e costringono ad eliminare la corrispondente osservazione. Inoltre pesi troppo elevati sono praticamente irrealizzabili, per le inevitabili correlazioni che si determinano in lunghe serie di osservazioni ripetute, cosa che pone un limite insuperabile al guadagno in precisione dell'osservazione da acquisire.

Questo significa che i requisiti di precisione sono espressi tramite una matrice di criterio, non sempre la migliore riguardo l'obiettivo ricercato. Talvolta la struttura reticolare reale non può, senza evidenti forzature nei pesi, approssimare la matrice di criterio. In questo caso, i pesi inaccettabili nascono probabilmente dal conflitto tra la configurazione reale e le esigenze espresse dalla matrice di criterio prescelta.

### III. Metodi di soluzione basati sulla programmazione matematica

I primi due metodi di ottimizzazione approssimano la matrice dei cofattori alla matrice di criterio (o alla sua inversa). In questi casi, non importa quale delle due matrici ha valore maggiore, nei corrispondenti elementi, purché l'approssimazione sia stretta.

Un diverso approccio consiste nel considerare gli elementi della matrice di criterio (o la sua inversa) come un limite insuperabile, rispetto al quale gli elementi della matrice dei cofattori della struttura reticolare in esame

---

dove ogni  $u_i$  è un autovettore corrispondente all'autovalore  $\lambda_i$ .

debbono essere sempre maggiori o uguali, oppure minori o uguali. Di conseguenza, le relazioni precedenti vanno intese come disequazioni:

$$(B^T \odot B^T) p (>, =, <) q$$

dove per ciascuna disequazione occorre scegliere il segno opportuno. Inoltre queste non sono le uniche disequazioni che i pesi debbono soddisfare, in quanto i pesi sono grandezze esclusivamente positive.

La ricerca del minimo di una funzione obiettivo, in presenza di vincoli, è un problema di programmazione matematica. In particolare, il seguente modello:

$$\phi = c^T p \rightarrow \min \quad \text{con:} \quad (B^T \odot B^T) p (>, =, <) q \quad \text{e:} \quad p > 0$$

è un problema di programmazione lineare continua la cui soluzione può essere ottenuta con il metodo del simplesso<sup>42</sup>.

E' necessario un commento, riguardo la scelta del tipo più opportuno di disuguaglianza. Per la matrice di criterio, occorre certamente scegliere il segno > per gli elementi diagonali (Infatti le varianze dei parametri della struttura reticolare non devono essere superiori alle corrispondenti della matrice di criterio.), mentre per i termini fuori-diagonale si preferisce solitamente il segno <.

Quest'ultima scelta discende dalla seguente considerazione: se si è interessati a funzioni di differenze di parametri, conviene massimizzare le covarianze, per diminuire le varianze delle differenze stesse. Per l'inversa della matrice di criterio, la scelta della direzione della disuguaglianza è assai più complessa, se non problematica.

Tra i vantaggi di questo terzo metodo, si ricorda che non possono risultare pesi negativi e che non è necessario imporre disequazioni su tutti elementi della matrice di criterio (o la usa inversa), ma è possibile limitarsi a considerare le sole (poche) di reale interesse.

Inoltre le disequazioni originarie possono essere sostituite o accompagnate da altre disequazioni su quantità derivate dai parametri, sulla affidabilità delle osservazioni e si possono introdurre anche disequazioni sui costi connessi o sulla massima precisione conseguibile.

Il difetto principale consiste nella eccessiva rigidità con la quale la soluzione rispetta le disequazioni e la funzione obiettivo. Spesso un gran numero di osservazioni assume peso zero ed è eliminato dallo schema di misura; di conseguenza, la struttura reticolare ottimale risulta poco ridondante ed inaccettabile sul piano della controllabilità.

Per superare questo limite, si può passare a funzioni obiettivo più sofisticate. Se il problema consiste nell'approssimare una matrice di criterio, si può introdurre il vettore di scarti-residui  $v$ :

$$(B^T \odot B^T) p = q + v$$

---

<sup>42</sup> Si chiama metodo del simplesso un algoritmo capace di ricercare l'estremo (massimo e minimo) di una funzione lineare di più variabili, sottoposte a vincoli di disuguaglianza, anch'essi di tipo lineare. Da un punto di vista geometrico, l'insieme delle soluzioni possibili è un poliedro limitato dagli iperpiani (rette nel caso bidimensionale, piani nel caso tridimensionale), rappresentazione geometrica dei vincoli. Il metodo permette di passare da un vertice ad un altro del poliedro, alla ricerca di quello (o quelli), dove la funzione raggiunge il suo estremo. Pertanto la soluzione corrisponde sempre ad (almeno) uno dei vertici del poliedro.

come misura del grado di approssimazione raggiunto, e minimizzarne la norma quadratica, rispettando insieme tutte le disequazioni esplicite ed implicite. Il modello completo risulta:

$$\phi = \frac{1}{2} v^T v \rightarrow \min \quad \text{con:} \quad (B^T \odot B^T) p \quad (>, =, <) \quad q \quad \text{e:} \quad p > 0$$

Inoltre è sempre possibile aggiungere altre disequazioni, ad esempio, sui costi connessi:  $s^T p < c$ , dove  $c$  indica il costo massimo<sup>43</sup>.

### PARTE III – QUATTRO ESEMPI INTERESSANTI DI GEODESIA FISICO - MATEMATICA, ASTROMETRIA DALLO SPAZIO, METROLOGIA GEO – TOPOGRAFICA E TRATTAMENTO DELLE OSSERVAZIONI

#### 1. Il calcolo del geoide in Italia<sup>44</sup>

Molte grandezze, di tipo fisico e geometrico, permettono di stimare il geoide, sia a livello globale che locale. A livello locale, la miglior combinazione di tutti i dati disponibili, dalle anomalie della gravità alla deviazione della verticale, dai modelli digitali delle altezze (topografiche) ai dislivelli, ecc., ai dati da satelliti, quali radar – altimetria, dati di posizionamento di punti (con GPS ed altre tecniche geospaziali), permette una stima del geoide al livello di precisione dei 10 - 20 *cm*. In Italia, già degli anni '80 del secolo scorso, si sono eseguite le prime stime utilizzando in modo indipendente dati astrogeodetici, gravimetrici, di radar – altimetria, raggiungendo precisioni tra 40 e 80 *cm*; in tutti i casi si sono usate varianti della teoria della collocazione.

#### Definizione ed uso del geoide

Il calcolo dei geoide è storicamente considerato come uno dei compiti fondamentali della geodesia e certamente il più importante della geodesia fisica. Questo compito che ha sempre mantenuto la sua importanza, raggiungendo i traguardi più avanzati di precisione nella stima, si è delineato e definito in una formulazione assai ampia ed è tuttora oggetto di studio per una serie di aspetti non marginali, riguardanti soprattutto il trattamento delle osservazioni, costituite da insiemi assai densi di dati con l'inclusione di informazioni sulle altezze topografiche (modelli digitali delle altezze). Date queste premesse, il calcolo del geoide consiste nel calcolo di una funzione definita nello spazio che stimi il potenziale anomalo del campo gravitazionale terrestre (nel prosieguo, potenziale anomalo) nel suo dominio di armonicità. Tutti i metodi di stima, usati numericamente, presentano due caratteristiche:

- lo stimatore è armonico, cioè soddisfa l'equazione di Laplace, contrariamente ad altri metodi di soluzione approssimata di equazioni differenziali (come, ad es. il metodo degli elementi finiti e le funzioni spline);
- lo stimatore ha un dominio di armonicità più esteso, tipicamente il complemento di una sfera di Bjerhammar (cioè una sfera totalmente interna alla superficie terrestre); questa estensione del dominio è resa possibile da opportuni teoremi di approssimazione ed è essenziale per riportare i vari metodi di stima ad un livello di pratica applicabilità.

<sup>43</sup> Questo problema è un problema di programmazione quadratica continua, in quanto la funzione obiettivo è funzione quadratica delle incognite. Esso può essere risolto tramite un algoritmo di complementarità lineare. I risultati di questo metodo sono confrontabili con quelli ottenuti da soluzioni classiche a minimi quadrati, con il non trascurabile vantaggio di non generare pesi inaccettabili.

E' bene sottolineare che, con le definizioni date, si rinuncia, da un punto di vista geodetico, al calcolo dell'ondulazione del geoide, tramite la relazione di Bruns:  $N = T/\gamma$  (essendo:  $N$  l'ondulazione del geoide,  $T$  il potenziale anomalo e  $\gamma$  la gravità normale, ovvero non la gravità osservata  $g$ , ma quella di un ellissoide di rotazione omogeneo ed in rotazione su se stesso), direttamente al livello del mare e, per quanto riguarda i continenti, all'interno delle masse. Infatti anche supponendo di conoscere la distribuzione esterna delle masse (cosa che non è affatto possibile), il calcolo del potenziale anomalo, all'interno della superficie su cui si possono eseguire le misure, costituisce un problema mal – posto la cui soluzione può dipendere, in maniera determinante, dal procedimento di regolarizzazione prescelto.

Rinunciando ad una stima del suddetto valore a livello del mare, i metodi di prolungamento del campo all'interno delle masse non pongono alcun problema, purché diano luogo a calcoli semplici da eseguire (ed a tutto ciò è connessa la stabilità della stima per insiemi molto densi di dati), e garantiscano una qualche convergenza al di fuori delle masse stesse. Si osservi inoltre che, per quanto riguarda la presentazione grafica dei risultati, ciò che usualmente si riproduce, sotto forma di curve di livello, è il cosiddetto quasi – geoide, ovvero una mappa delle anomalie d'altezza ( $\zeta$ ), calcolate a livello del terreno e riportate (senza alcuna correzione) sull'ellissoide. Peraltro la differenza tra quasi – geoide e geoide si aggira attorno a valori massimi di circa 10 cm per terreni con elevazione media non superiore ai 1000 m, così che solo in caso di una topo- grafia assai tormentata sia necessario tenerne conto.

Infine è molto importante notare che, avendo definito il calcolo del geoide come stima del potenziale anomalo, si unificano, da un punto di vista geodetico, tutti i problemi concernenti la stima di quantità dipendenti dal campo anomalo (ovvero i suoi vari funzionali): così un'unica stima permette, al tempo stesso, di stimare le anomalie della gravita in aria libera ( $\Delta g$ ), le deviazioni della verticale ( $\xi$  ed  $\eta$ ), i gradienti gravimetrici ( $[T_{kl}]$ ), ecc., limitandosi all'uso del potenziale anomalo e ad alcune trasformate delle sue derivate prime e seconde, in approssimazione sferica <sup>45</sup> (essendo:  $\vartheta = \pi/2 - \varphi$ , la co – latitudine):

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} \quad \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{R} \quad \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix} = -\frac{1}{R} \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ 1 \frac{\partial T}{\partial \lambda} \end{vmatrix} \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\begin{bmatrix} T_{nn} & T_{ne} & T_{nr} \\ & T_{ee} & T_{er} \\ \text{simm.} & & T_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_r}{r} + \frac{T_{\vartheta\vartheta}}{r^2} & -\frac{T_{\vartheta\lambda}}{r^2 \sin \vartheta} + \frac{T_{\lambda} \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} & \frac{T_{\vartheta}}{r^2} - \frac{T_{r\vartheta}}{r} \\ \frac{T_r}{r} + \frac{T_{\vartheta}}{r^2 \tan \vartheta} + \frac{T_{\lambda\lambda}}{r^2 \sin^2 \vartheta} & \frac{T_{r\lambda}}{r \sin \vartheta} - \frac{T_{\lambda}}{r^2 \sin \vartheta} & T_{rr} \end{bmatrix}$$

<sup>44</sup> Un particolare ringraziamento deve essere rivolto all'amico e collega, Prof. Riccardo Barzaghi, che ha rivisto la parte relativa a questo esempio geodetico, dando preziosi consigli, affinché la stessa risultasse insieme chiara e sufficientemente completa.

<sup>45</sup> A riguardo, essendo utile per il calcolo dei gradienti gravimetrici, si noti come le derivate seconde abbiano espressione:

$$T_{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \quad T_{\lambda\lambda} = \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2} \quad T_{rr} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad T_{\vartheta\lambda} = -\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial \lambda} \quad T_{\vartheta r} = -\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial r} \quad T_{\lambda r} = \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda \partial r}$$

Un'altra considerazione rileva che, nella determinazione del potenziale anomalo, sono ormai emerse due problematiche completamente diverse, una di tipo globale ed una di tipo locale, intendendo con il secondo aggettivo la determinazione sulla base di osservazioni eseguite su un'area specifica del globo, ad es., l'Europa o solamente l'Italia. La determinazione globale stima i coefficienti  $T_{nm}$  di un modello espresso da una combinazione finita di armoniche sferiche:

$$T = \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=-n}^n T_{nm} \left( \frac{r}{R_B} \right)^{n+1} Y_{nm}(\varphi, \lambda)$$

essendo:

$R_B$

il raggio della sfera di Bjerhammar;

$$Y_{nm}(\varphi, \lambda) = \begin{cases} P_{nm} \cos \varphi \cos m\lambda & m \geq 0 \\ P_{n|m|} \cos \varphi \sin |m|\lambda & m < 0 \end{cases}$$

armoniche sferiche completamente normalizzate;

$$P_{nm}(\vartheta, \lambda) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^{\frac{n}{2}}$$

funzioni associate di Legendre;

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^{\frac{n}{2}}$$

polinomi di Legendre.

altrimenti ricavabili dalle sopraccitate funzioni associate omonime, ponendo:  $m = 0$ .

Questi modelli sono derivati da osservazioni da satellite, poiché le orbite di questi sono maggiormente influenzate dalle armoniche a basse frequenze, nonché per lo stesso motivo da osservazioni adeguatamente mediate e sparse su tutto il globo (ad es., l'insieme delle anomalie della gravità mediate sulle aree di  $1^\circ \times 1^\circ$ ). Negli anni '80 del secolo scorso, i modelli più elevati, quanto al grado massimo, erano GEM 10C e' RAPP  $180 \times 180$  (esteso successivamente a OSU91A  $360 \times 360$ ) che, completi fino ad ordine e grado 180, vanno tuttavia considerati globalmente e non in base ai loro singoli coefficienti poiché questi sono singolarmente determinati con precisione assai bassa non appena  $n$  supera il grado 20÷30. In ogni caso, l'uso di questi modelli globali permette di porre la stima regionale su basi più certe, perché osservazioni su aree poco estese, rispetto alla superficie del globo, non possono dare informazioni sulle basse frequenze che, di conseguenza, possono solo essere introdotte a priori, tramite i suddetti modelli. E' proprio a questo modo di procedere nella stima di tipo regionale del potenziale anomalo che si fa riferimento nel prosieguo.

### Elementi di metodo

Storicamente tre sono i principali approcci alla stima del geode:

- l'approccio elementare della livellazione astrogeodetica, per stimare, in modo puramente geometrico, le variazioni dell'ondulazione del geode, a partire dalla sua inclinazione stimata della deviazione della verticale;

- l'approccio integrale, fornito dalla teoria dei problemi al contorno della geodesia fisica, con tutte le approssimazioni del caso, per ridursi, in ultima analisi, ad integrazioni sulla sfera (ad es., l'integrali di Stokes per le anomalie della gravità);
- l'approccio statistico, per applicare alla stima del potenziale anomalo la teoria del filtraggio e della predizione ottimale di Wiener – Kolmogorov, trattando il potenziale anomalo ed i campi da questo derivati, come un processo stocastico sulla sfera, invariante sotto il gruppo delle rotazioni e continuato, in modo armonico, nello spazio esterno.

Si noti innanzitutto che, tra i dati in ingresso, è sempre possibile considerare un modello globale; inoltre esistono varianti ed ibridazioni fra i vari metodi.

- La livellazione astrogeodetica è il metodo più semplice, anche se il meno preciso. Le difficoltà sorgono nell'interpolazione di:  $\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$  (essendo:  $\xi$  e  $\eta$  le componenti meridiana e trasversale della deviazione della verticale ed  $\alpha$  l'azimut della sezione normale fra due punti prescelti) lungo una sezione, nonché nella relativa arbitrarietà nel definire le sezioni stesse. In effetti, la decomposizione del geoidi in poligoni chiusi, aventi come vertici i punti di misura, è arbitraria, sebbene si ottengano risultati paragonabili ad altri metodi, scegliendo opportunamente i lati. Infatti lati più brevi possibili ed in numero paragonabile alle osservazioni disponibili possono essere realizzati con una triangolazione composta da triangoli equilateri, aventi vertici nei punti di osservazione. Il vero problema di questo metodo sta nell'interpolazione dell'inclinazione del geoidi sull'ellissoide al di fuori dei punti di misura, poiché l'informazione contenuta nelle deviazioni della verticale, come noto, risente massimamente delle masse topografiche, poste nelle vicinanze del punto di osservazione, cosicché un'interpolazione lineare:

$$N(P_j) - N(P_i) = - \int_{P_i}^{P_j} \varepsilon ds \cong - \frac{\varepsilon_j + \varepsilon_i}{2} s_{ij}$$

può essere largamente inadeguata (addirittura in aree montuose, anche una distanza media inferiore ai 10 Km, può essere insufficiente). Oltre a ciò occorre notare che una compensazione di equazioni di dislivello (astrogeodetico) non può essere eseguita rigorosamente, perché le discrepanze tra osservazioni e modello funzionale non possono essere considerate semplici errori di misura incorrelati tra loro e, di conseguenza, soprattutto le stime di errore possono essere fortemente deviate. Pertanto oggi il metodo astrogeodetico puro non è più accettabile. Si noti invece che, anche in un caso di variazioni di gravimetriche nell'area, i termini di riduzione e correzione delle osservazioni sono trascurabili. Infatti mentre la variazione del modulo della gravità, data dalla relazione:

$$\begin{aligned} \bar{g} &= g + 0.0424 h - \int_{P_1}^{P_2} \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} dn + \frac{\bar{g}_j - \gamma_0}{\gamma_0} H_j - \frac{\bar{g}_i - \gamma_0}{\gamma_0} H_i = \\ &= g + 0.0424 h - \sum_{k=P_1}^{P_2} \frac{g_{P_k} - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta n_{P_k, P_{k+1}} + \frac{\bar{g}_j - \gamma_0}{\gamma_0} H_j - \frac{\bar{g}_i - \gamma_0}{\gamma_0} H_i \end{aligned}$$

è sempre piuttosto consistente, la variazione di direzione della linea di forza della gravità, per brevi tratti verticali, è esigua.

Infine si osservi come il metodo astrogeodetico, del resto, come tutti gli altri metodi, dia luogo ad un'indeterminazione connessa con la definizione del datum geodetico per eliminare la quale storicamente sono stati introdotti ellissoidi locali di riferimento (ad es. il sistema di riferimento italiano Roma '40 o il sistema di riferimento europeo ED50, oppure quello geocentrico mondiale WGS84).

- Il metodo integrale applica la formula di Stokes ed eventualmente un termine correttivo, derivato dal 1° ordine dello sviluppo asintotico, presentato nella teoria di Molodensky <sup>46</sup>. In questo approccio, si usano come dati in ingresso le anomalie della gravità in aria libera, valutate nel punto di osservazione e non ridotte con le vecchie regole del metodo gravimetrico. Il grande vantaggio di questo metodo sta nel calcolare l'anomalia d'altezza, senza effettuare alcuna inversione di matrice. lo svantaggio maggiore si ha perché, in linea di principio, l'integrazione dovrebbe essere estesa a tutto il globo. A questo proposito, si può tuttavia notare che l'introduzione di modelli globali fino ad un alto grado, ha introdotto un notevole miglioramento. Infatti spezzando il potenziale anomalo e le anomalie della gravità in una parte modello, fino ad un dato ordine e grado, ed una parte residua:

$$T = T_m + T_r \qquad \Delta g = \Delta g_m + \Delta g_r$$

ed applicando la formula di Stokes solo alla parte residua, cosa possibile, perché l'operatore di Stokes è diagonale in armoniche sferiche, si ha:

$$T(P) = T_m(P) + \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta g_r S(\psi) d\sigma$$

essendo l'elemento finito d'area, espresso in coordinate geodetiche:  $d\sigma = d\vartheta \times d\lambda \sin\vartheta$ , e la funzione di Stokes:

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) = 1 - 5\cos\psi - 6\sin\frac{\psi}{2} + \frac{1}{\sin\psi/2} - 3\cos\psi \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

Separando ulteriormente, in questo integrale, la parte interna ad una calotta  $C(\psi_0)$ , centrata attorno a  $P$  e con raggio (sulla sfera)  $\psi_0$ , si può scrivere

$$T(P) = T_m(P) + \frac{R}{4\pi} \int_{C(\psi_0)} \Delta g_r S(\psi) d\sigma + \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma - C(\psi_0)} \Delta g_r S(\psi) d\sigma$$

e, trascurando l'ultimo addendo di questa espressione, si commette un errore quadratico medio nell'ondulazione del geoidi pari a:

<sup>46</sup> La teoria di Molodensky è piuttosto complessa e spesso, di fatto, omessa nello sviluppo pratico dei calcoli per la stima del geoidi.

$$\eta_{\zeta}^2 = \frac{R^2}{4G^2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} Q_n^2(\psi_0) C_n$$

dove  $G$  è un valore medio della gravità,  $Q_n(\psi_0)$  sono i cosiddetti coefficienti di troncamento di Molodensky:

$$Q_n(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi = \sum_{i=\psi_0}^{\pi} S(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \Delta\psi_i$$

mentre le costanti  $C_n$  sono le cosiddette *degree variances* delle anomalie della gravità, date da:

$$C_n = \frac{(n-1)^2}{R^2} \sum_{m=-n}^n T_{nm}^2$$

Qualora si utilizzino modelli fino al grado 180, il raggio della calotta deve essere compreso tra 3° e 5° per mantenere contenuto il suddetto errore quadratico medio nell'ondulazione del geoido. È interessante notare che la conclusione, largamente confermata da esperimenti numerici, è valida per uno spettro di potenza delle *degree variances*, in cui la distribuzione fisica delle masse non crei una potenza per frequenza  $n$  superiore a quella prevista dalla regola di Kaula ( $C_n \cong 160 \times 10^{-12} n^{-3} \text{ mgal}^2$ ). L'integrazione sulla calotta è poi effettuata discretizzando un grigliato di coordinate geografiche (ad es., con blocchi quadrati di 5' di lato), oppure sui blocchi di un *template*, dove il maggior uso di tempo va nel calcolo di  $T_n(P)$  e  $\Delta g_m(P)$  su un grigliato molto fitto:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{T}{\gamma} \cong \sum_{k=1}^{N_{\text{Blocchi}}} \Delta \bar{g}_k \left( \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\text{Blocchi}} S(\psi) d\sigma \right) = \sum_{k=1}^{N_{\text{Blocchi}}} \Delta \bar{g}_k \left( \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^{N_{\text{Blocchi}}} S(\psi) \Delta\sigma_i \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Blocchi}}} \Delta \bar{g}_k \left( \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^{N_{\text{Blocchi}}} \Delta\sigma_i \left( \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \right) \right) \end{aligned}$$

essendo l'elemento finito d'area, espresso in coordinate geodetiche:  $\Delta\sigma = \Delta\vartheta \times \Delta\lambda \sin \vartheta$  (ovvero:  $\Delta\sigma = \Delta\psi \times \Delta\alpha \sin \psi$ , dove:  $(\psi, \alpha)$  sono coordinate geodetiche polari), e ricordando l'espressione della funzione di Stokes, scritta a seguito della presentazione dell'espressione integrale di  $T(P)$ .

Da quest'ultima espressione, è possibile ricavare le componenti della deviazione della verticale con le equazioni di Vening Meinez:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \sin \psi d\psi d\alpha = \frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{k=1}^{N_{\text{Blocchi}}} \Delta \bar{g}_k \frac{\Delta S(\psi)}{\Delta \psi} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \sin \psi \Delta\psi_k \Delta\alpha_k$$

essendo:  $\partial\psi/\partial\varphi = -\cos\alpha$  e  $\partial\psi/\partial\lambda = -\cos\varphi \sin\alpha$ .

Uno svantaggio nell'applicazione di questa formula risiede nel fatto che durante l'integrazione numerica i dati puntuali  $\Delta g$  sono mediati per blocchi e, poiché tali dati non sono in genere distribuiti con uniformità, ogni blocco ha uno sqm diverso rendendo assai difficile, se non impossibile, la valutazione di uno sqm realistico per le anomalie d'altezza ricavate. Un giudizio complessivo rileva comunque la rinnovata attualità di questo metodo, in particolare, con l'applicazione di modelli globali, essendo assai comodo almeno per il trattamento preliminare di grandi quantità di dati.

Anche la correzione di Molodensky si esprime con espressioni integrali, successivamente discretizzate:

$$\begin{aligned} \delta\zeta &= \frac{R}{4\pi\lambda} \int_{\sigma} G_1 S(\psi_{PQ}) d\sigma = \frac{R}{4\pi\lambda} \int_{\sigma} \left( \frac{1}{16\pi R} \int_{\sigma} \frac{H_Q - H_P}{\sin^3(\psi_{PQ}/2)} \Delta g_Q d\sigma_Q \right) S(\psi_{PQ}) d\sigma = \\ &= \frac{R}{4\pi\lambda} \sum_{k=1}^{N_{\text{Blocchi}}} \left( \frac{1}{16\pi R} \sum_{i=1}^{N_{\text{Blocchi}}} \frac{H_Q - H_P}{\sin^3(\psi_{PQ}/2)} \Delta \bar{g}_i \Delta \sigma_i \right) S(\psi_{PQ}) \Delta \sigma_k \end{aligned}$$

tuttavia, data la singolarità del nucleo integrale, richiede calcoli elaborati con un grigliato molto fine.

Inoltre vale la pena di ricordare che un metodo, analogo a quello basato sull'integrale di Stokes, è in uso per la gravimetria su mare, supposto che la superficie topografica del mare sia determinata mediante radar – altimetria. In questo caso, la funzione di Stokes è sostituita da quella di Hotine. Infine sempre al metodo integrale può essere attribuito l'approccio recente al trattamento di dati misti, quali ad es., gravimetria su terra ed altimetria su mare.

- La collocazione è un metodo relativamente recente (sviluppato a partire dal lavoro capostipite di Kaula alla metà del secolo scorso) e sempre di grande interesse, perché:
  - la sua flessibilità determina la capacità di trattare, insieme contemporaneamente, tutti i tipi di osservazioni geodetiche, prese in esame;
  - la sua consistenza unifica tutti i risultati, sotto un unico principio di ottimizzazione di Wiener – Kolmogorov, minimizzando l'errore quadratico medio di stima;
  - la sua attendibilità permette al metodo di fornire stime corrette, accompagnate informazioni puntuali sulla precisione delle stesse, costituite dai loro sqm.

Prima di entrare maggiormente nel merito della discussione è bene ricordare che, in geodesia fisica, si distinguono due tipi di collocazione:

- collocazione ai minimi quadrati, se la funzione di covarianza è stimata empiricamente, sulla base di dati locali, in una zona di limitata di superficie (ad es., una porzione di sfera locale od una porzione di piano tangente);
- collocazione di minima norma, se la funzione di covarianza è stimata globalmente, con un'analisi armonica su tutta la sfera, secondo il modello analitico di *degree variances*.

Il vantaggio del secondo approccio, rispetto al primo, sta nella propagazione, da una grandezza all'altra, dell'analisi di covarianza fatta su un unico campo (ad es., dalle *degree variances* dell'anomalia di gravità a quelle del potenziale anomalo e di tutti i campi derivati da questo) e nella, pressoché automatica, continuazione armonica di una funzione di covarianza globale. Diversi tipi di modelli globali sono presentati e discussi in letteratura.

Il punto di maggiore difficoltà nell'estensione del metodo è l'inclusione sistematica del trattamento delle osservazioni sulla topografia del terreno, problema comunque presente anche nell'approccio integrale. Un altro punto di maggiore difficoltà è poi la soluzione del sistema normale che tende a diventare instabile, quando la densità dei dati diventa notevole, rispetto alla lunghezza di correlazione (ovvero la distanza dove la correlazione si dimezza), oltretutto nell'inversione di una matrice piena di dimensioni pari al numero delle osservazioni.

Per quanto riguarda il primo problema, tre soluzioni sono state proposte:

- la prima consiste nell'applicare correzioni topografiche a tutte le quantità osservate ed applicare la collocazione alle quantità residue ( $T_R$  e  $Q_R$ ):

$$T = T_T + T_R$$

$$Q = Q_T + Q_R$$

essendo:

$$Q_T = LT_T$$

dove:  $L$  è un qualsiasi funzionale lineare:

ad es., un operatore integrale o differenziale;

$$T_T = \sum_{i=1}^{N \text{ volumi occupati dalle masse topografiche}} K \bar{\rho}_i \iiint_{\sigma} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sum_{i=1}^{N \text{ volumi occupati dalle masse topografiche}} K \bar{\rho}_i \bullet$$

$$\bullet xy \ln(z+r) + yz \ln(x+r) + zx \ln(y+r) - \frac{x^2}{2} \arctan \frac{yz}{xr} - \frac{y^2}{2} \arctan \frac{zx}{yr} - \frac{z^2}{2} \arctan \frac{xy}{zr}$$

$$E^2(P) = C(P, P) - \sum_i \sum_k C(P, P_i) (C(P_i, P_k) + \sigma_0^2 \delta_{ik}) C(P_k, P) \quad \text{l'eqm di stima del segnale.}$$

- la seconda generalizza la prima includendo le densità della crosta come incognite;
- la terza sfrutta la nota correlazione lineare quasi perfetta tra anomalie di gravità ed altezza.

Per quanto riguarda invece i problemi di calcolo, la strategia classica proposta consiste nell'applicazione della collocazione a passi, trattando medie a blocchi di osservazioni ed applicando poi, di nuovo, la collocazione ai residui, su aree più piccole, operando con un minor numero di dati.

## Per un Geoide italiano

Fino alla prima metà degli anni ottanta del secolo scorso, solo pochissimi lavori si erano occupati del calcolo del geoide in Italia. Il primo lavoro consisteva nella stima del geoide italiano con soli dati astrogeodetici e nel suo confronto con un geoide altimetrico, ricavato lungo le coste. Un secondo lavoro prendeva invece in esame dati gravimetrici, sempre confrontando la stima del geoide italiano ottenuto con un geoide altimetrico, ancora ricavato lungo le coste. Successivi lavori sono poi stati effettuati, arrivando ad ottenere un geoide italiano con precisione centimetrica, verso la fine degli anni novanta del secolo scorso.

- Il geoide astrogeodetico è stato calcolato, tagliando le zone di maggior variabilità topografica e gravimetrica; e pertanto considerando solo i punti situati, all'incirca, tra le latitudini di Milano e Bari, si sono usati 101 punti con 202 osservazioni delle componenti della deviazione della verticale.
  - Su questi dati, dapprima è stata calcolata una compensazione ai minimi quadrati delle equazioni di livellazione astrogeodetica, scritte per ogni lato di una triangolazione che ha ricoperto la zona interessata, con maglie triangolari non sovrapposte fra loro ed il più possibile equilatero. Successivamente si è provveduto al filtraggio delle stime puntuali di ondulazione del geoide ed alla predizione di altri valori di ondulazione su un grigliato regolare, mediante il metodo della collocazione ai minimi quadrati, avendo preventivamente stimato la funzione empirica di covarianza dell'ondulazione nel piano di una rappresentazione cartografica della zona in oggetto.
  - Una strada alternativa e più rigorosa ha invece fatto uso della struttura di Taylor – Karman per collegare direttamente le funzioni di autocovarianza e crosscovarianza delle componenti della deviazione della verticale alla funzione di covarianza dell'ondulazione del geoide. Infatti come già detto in precedenza, le prime sono funzionalmente legate, in forma differenziale del primo ordine, al potenziale anomalo ed alla stessa ondulazione del geoide. Pertanto la linearità degli operatori differenziali (ed integrali), e la linearità dell'operatore  $E$  (ovvero del valore atteso per la stima di momenti, quali le covarianze) permette la loro commutazione. Di conseguenza, le funzioni di covarianza delle componenti della deviazione della verticale possono essere espresse come funzioni, non proprio elementari, delle derivate seconde della funzione di covarianza dell'ondulazione del geoide. Dopodiché il filtraggio delle due componenti della deviazione della verticale ha permesso di procedere direttamente anche alla predizione dell'ondulazione del geoide.
- Il geoide gravimetrico è stato calcolato, mediante il metodo della collocazione di minima norma, a partire da una base di dati di 6500 valori di anomalia di gravità, distribuiti su tutta Italia e forniti dal Bureau Gravimétrique International. La base di dati è stato ridotta a circa 3000, escludendo i dati in mare e portando le varie zone d'Italia a densità medie paragonabili tra loro (dove la distanza tra i dati è di circa 32 km). Dopodiché si è scelto procedere nel modo seguente:
  - togliere i valori calcolati sulla base del modello RAPP  $180 \times 180$  ai valori di anomalia di gravità osservati, cosicché i residui non solo abbiano un minore valore quadratico medio, ma anche una ben minore lunghezza di correlazione;

- suddividere l'Italia in 13 zone rettangolari con lati  $2^\circ \div 3^\circ$ , parzialmente sovrapposte, stimando il geode, zona per zona, usando contemporaneamente solo i dati di ogni zona;
- analizzare le aree di sovrapposizione delle diverse zone, per controllare la consistenza dei risultati (infatti benché la diminuita lunghezza di correlazione dia sufficienti garanzie, contro un'eccessiva perdita di informazione, la validazione dei dati e dei modelli è condizione indispensabile e fondamentale per ottenere altrettante garanzie nei risultati).

Cruciale nei sopraccitati passaggi è la stima della funzione di covarianza dei residui delle anomalie di gravità. Questa è ottenuta, adattando due parametri di una famiglia generale di modelli di covarianza, usati in geodesia fisica:

- il primo parametro è un fattore di scala, legato al valore quadratico medio globale del processo stocastico costituito, zona per zona, dai suddetti residui;
- il secondo parametro fissa il primo zero della funzione di covarianza, è regolato dal numero di *degree variances* di bassa frequenza, tolte dal modello globale di covarianza adottato e coincide con il grado delle componenti del campo modello RAPP  $180 \times 180$ , lasciate fisse nella stima zona per zona.

Di conseguenza, la funzione di covarianza, stimata zona per zona, prende in considerazione le informazioni contenute in quella stessa zona e non permette una stima più precisa per le componenti a bassa frequenza del campo, rispetto al campo modello tolto. Infine è bene notare come, nelle zone di sovrapposizione, gli scarti siano al 70% inferiori a 20 cm. Questo metadato non costituisce una misura vera e propria della precisione del geode gravimetrico, ma indica una sua sostanziale consistenza interna.

Un Confronto tra geode gravimetrico, predetto lungo le coste, e geode altimetrico, derivato dai dati Seasat, in ipotesi di assenza di marea, ha portato a suddividere le aree marine, adiacenti alla costa, in 12 zone. Il valori quadratici medi globali delle differenze tra i due geoidi si aggirano tra 20 cm e 80 cm, ma le medie delle differenze per zona indicano un notevole andamento sistematico, a decrescere da nord verso sud. In particolare, nel mar Ionio si hanno differenze comprese tra -3.08 e -3.82 m, in accordo con valori analoghi trovati sulla costa greca.

Un confronto tra geode gravimetrico e geode astrogeodetico è stato effettuato sulla base delle differenze delle rispettive ondulazioni del geode, predette su un grigliato di  $10' \times 10'$  (ovvero circa 1200 punti su terra ferma), e ha fornito un valore quadratico medio globale molto alto, cioè pari a  $\pm 2.4$  m. Tuttavia alcune zone periferiche, dove i collegamenti per il geode astrogeodetico risultano assai deboli (cioè molto distanziati tra loro), mostrano un andamento fortemente sistematico e la differenza tra i due geoidi si aggira attorno ai 4 m in Sardegna, ai 3 m in Sicilia e Calabria e va dai 5 m ai 7 m nella penisola salentina. Se si tolgono queste evidenti discrepanze (circa il 25% dei valori predetti) il valore quadratico medio globale portato scende a  $\pm 1.2$  m. Restano un centinaio di residui significativi nella zona di Ivrea, da attribuirsi probabilmente alla

distorsione del campo creata dal Corpo d'Ivrea, e lungo la linea delle Alpi Giudicarie, fino alla latitudine del Po. Sui circa 800 valori restanti il valore quadratico medio globale potato risulta pari a  $\pm 0.8 m$ .

### **I Progetti Itolgeo '90 e '95**

Quanto fatto fino alla metà degli anni '80 del secolo scorso, dimostra il maturare di competenze e capacità di effettuare una stima di alta precisione del geoide in Italia, sebbene i risultati fino ad allora ottenuti siano da considerarsi ancora largamente insufficienti, soprattutto in relazione a tre fattori principali:

- ❑ l'uso di una base di dati ancora troppo ristretta;
- ❑ la mancata combinazione di dati di diverso tipo;
- ❑ il non uso di dati sulle altezze topografiche.

Per quanto riguarda il primo punto, la disponibilità circa 200.000 valori di gravità, su tutto il territorio italiano, e la costruzione di un DEM di altezze medie, su blocchi all'incirca di dimensioni:  $\Delta\varphi \times \Delta\lambda = 7.5'' \times 10''$ , fa diventare un problema prioritario, in geodesia fisica, a parte zone particolari, non più l'acquisizione di dati sufficienti, bensì un trattamento adeguato di tutti i dati esistenti per determinazioni di alta precisione, fissata in non più di  $\pm 5 cm$ , come precisione media, e non più di  $\pm 15 cm$ , come errore di stima, su tutta la penisola e sui mari circostanti. Pertanto a livello di metodo, si tratta di scegliere una strategia ottimale di stima, probabilmente complessa e basata su una combinazione di metodi già in parte esistenti, mentre a livello di trattamento globale dei dati, si tratta di giungere all'effettivo utilizzo di tutti i dati a disposizione.

- ❑ L'approccio integrale deve saper tenere conto della disponibilità di modelli globali, di alto grado, verificando la capacità di fornire una piena utilizzazione di dati molto numerosi, con una determinazione di frequenze medie. I principali problemi da risolvere sono:
  - ❑ la statistica dei termini correttivi di Molodensky, per verificare gli errori di tracciamento;
  - ❑ la propagazione degli errori, in funzione della densità dei dati;
  - ❑ l'individuazione di soluzioni integrali semplici, cioè numericamente ben maneggiabili, per problemi al contorno di tipo diverso, con particolare riferimento ai problemi misti;
  - ❑ la soluzione di problemi al contorno sovradeterminati, dove sulla stessa area e con notevole densità si danno più dati di quelli strettamente necessari alla determinazione del potenziale anomalo.
- ❑ La collocazione invece deve affrontare e risolvere due tipi di problemi:
  - ❑ il trattamento integrato e sistematico delle altezze dei DEM e di eventuali dati geofisici;
  - ❑ una adeguata strategia a passi per il trattamento di dati molto numerosi e densi, inclusa una procedura per il raccordo ottimale di dati locali.
- ❑ Gli approcci misti devono altresì valutare, se risulti ottimale una procedura che combini i vari metodi, ad es., un pretrattamento di tipo integrale, eventualmente con nuclei integrali stabilizzati, seguito da collocazione su un piano prettamente locale, potrebbe essere particolarmente vantaggioso.

Infine per quanto riguarda il trattamento numerico dei dati si considerano minimali le seguenti acquisizioni:

- implementare le soluzioni di Stokes e di Hotine, a partire da un modello di grado 180, nonché le soluzioni dei vari problemi di altimetria – gravimetria, per produrre un geoida gravimetrico, con la formula di Stokes, stimando l'errore di troncamento della serie di Molodensky, area per area, in funzione delle caratteristiche topografiche;
- aumentare il numero di osservazioni trattabili contemporaneamente, introdurre le correzioni topografiche e calcolare un geoida a passi, partendo da quello dell'approccio integrale, ottimizzando le dimensioni della zona di stima e valutando il contributo dato alla stima finale dai vari tipi di osservazione.

La realizzazione di un così vasto programma ha certamente richiesto molti anni di lavoro; tuttavia proprio un lavoro sistematico di sperimentazione e comparazione di tutte le principali soluzioni ha condotto a precisioni ed accuratezze centimetriche ed ha valore non solo per il calcolo del geoida italiano, ma anche per il contributo significativo nel panorama internazionale. Le figure 4.1, 4.2 e 4.3 mostrano il geoida italiano, illustrato a curve di livello, a sfumo e come superficie 3D.

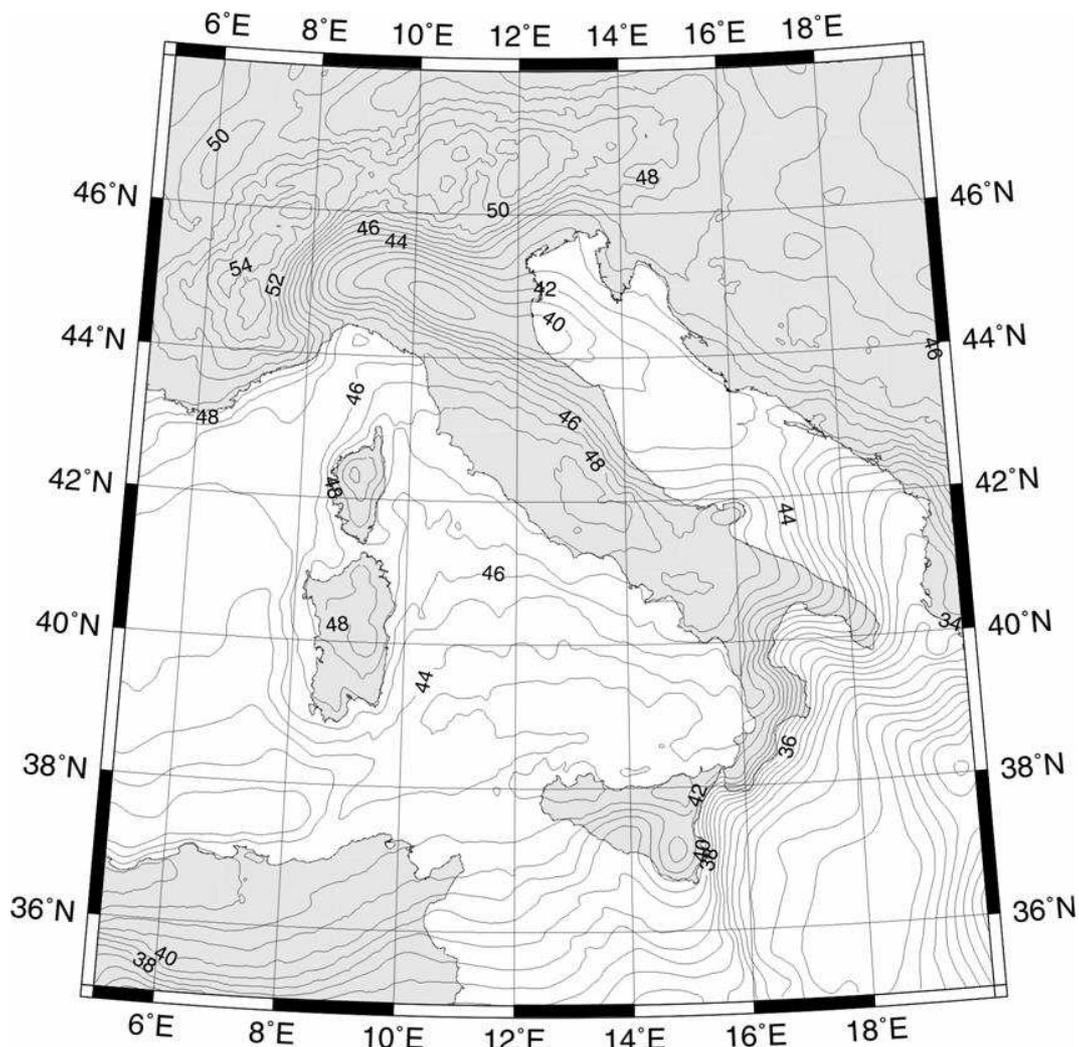


Fig. 4.1 – Il geoida italiano: carta a curve di livello

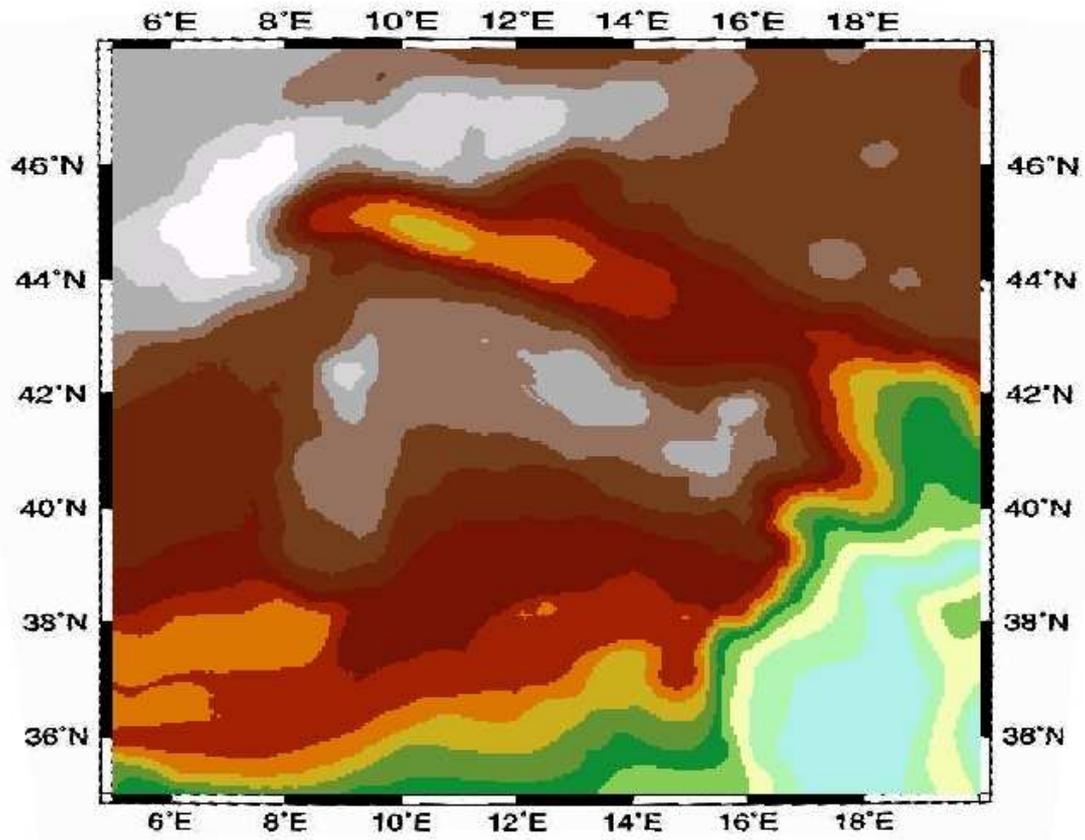


Fig. 4.2 – Il geoide italiano: carta a sfumo (macchie di colore)

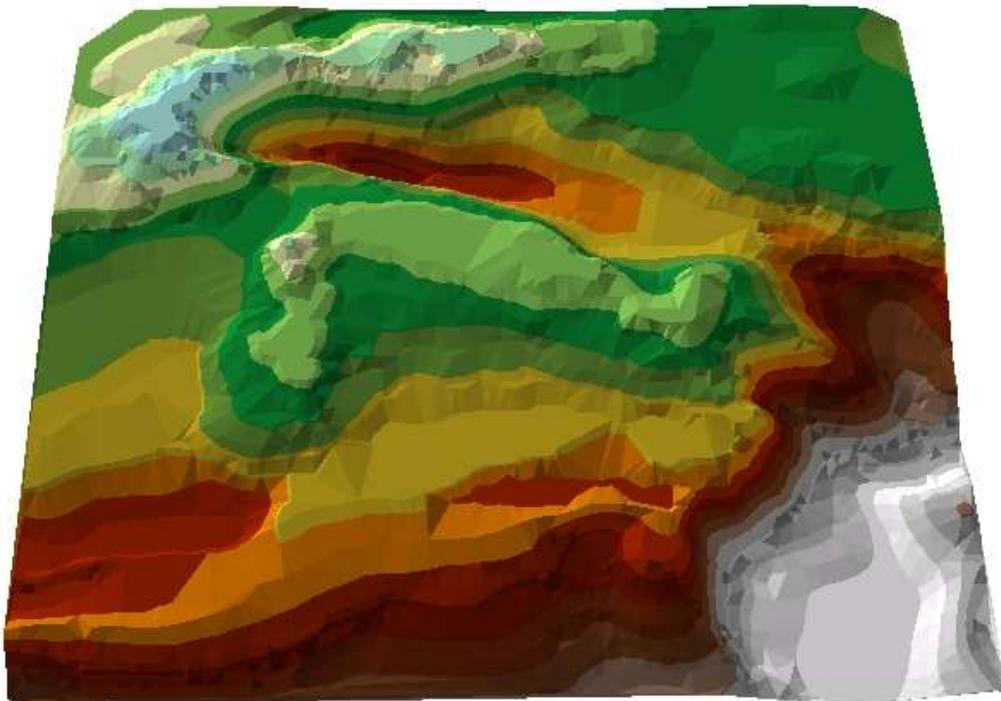


Fig. 4.1 – Il geoide italiano: rappresentazione 3D (TIN)

## 2. La missione Gaia per lo studio della Via Lattea

L'Agenzia Spaziale Europea (ESA), a partire dai risultati estremamente lusinghieri della missione Hipparcos, intraprende il progetto di una missione fondamentale di carattere astrometrico al microarcosecondo, denominata GAIA (Fig. 4.4), con lo scopo di raggiungere un'accuratezza astrometrica di  $10 \mu\text{as}$  (microarcosecondi), alla magnitudine  $V=15$ . Il sistema di acquisizione è basato su una parte ottica, che realizza due direzioni di vista e un sistema di rivelatori (un mosaico di CCD) posizionato nel piano focale. L'ottimizzazione del processo di rivelazione dei fotoni è di grande rilievo: a tale scopo vengono proposti, in alternativa a soluzioni già collaudate, algoritmi matriciali di tipo particolare. Il risultato immediato di GAIA sarà una rete di distanze, di moti propri e posizioni di circa un miliardo di stelle, che mappano una parte significativa della Via Lattea, che dovrebbe produrre importanti risultati scientifici in settori essenziali dell'Astronomia e dall'Astrofisica. Questo comporta l'uso di matrici particolarmente estese, e il bisogno di algoritmi raffinati. Pertanto, in entrambi i casi, è necessario un approccio interdisciplinare, in particolare con la comunità dei geodeti che già usano algoritmi del genere. A sua volta la comunità dei geodeti potrebbe avere una ricaduta dei risultati: missioni spaziali con l'impiego di sensori di svariati tipi sono infatti ormai comuni in campo geomatico.

### Astrometria globale dallo spazio

La recente approvazione della missione GAIA da parte dell'Agenzia Spaziale Europea rappresenta una grande sfida per l'Astrometria globale dallo spazio: misurare posizioni, moti propri e parallassi di un miliardo di stelle con accuratezze da 100 a 1000 volte più spinte di quanto si sia fatto finora. Ci si aspetta che i risultati di questa missione abbiano importantissime ricadute in svariati campi dell'Astrofisica, della Fisica fondamentale e della Geodesia spaziale. Data la natura delle misure del satellite GAIA, la modellizzazione e le tecniche di riduzione dei dati sono naturalmente simili a quelle della Geodesia Spaziale. In questo lavoro vengono descritti brevemente il satellite, i suoi principi di misura e funzionamento; in secondo luogo, vengono proposti due metodi numerici che si intende applicare in modo specifico al modello GAIA, per studiarne le effettive potenzialità di applicazione al caso reale.

L'Astrometria, disciplina classica dell'Astronomia le cui origini risalgono all'antichità, si occupa tradizionalmente di misure di posizioni e moti sulla sfera celeste, nonché di distanze assolute, di astri visti come sorgenti puntiformi di radiazione elettromagnetica. Il successo della prima missione spaziale dedicata all'Astrometria e realizzata per mezzo del satellite HIPPARCOS, progettato dall'Agenzia Spaziale Europea (ESA) e lanciato nel 1989, ha dato inizio ad una nuova era dell'Astrometria, le cui mete sempre più ambiziose sono testimoniate dagli obiettivi della futura missione GAIA approvata dall'ESA nell'Ottobre 2000, ed il cui lancio è previsto intorno al 2010.

La definizione di Astrometria globale sta ad indicare che lo strumento a bordo del satellite è in grado di osservare tutto il cielo misurando, in pratica, archi tra due stelle. Tali misure contribuiscono alla generazione di una rete globale sulla sfera celeste, del tutto simile alle reti geodetiche terrestri ottenute da satelliti di rilevamento.

Inoltre, per l'acquisizione dei dati a bordo, GAIA utilizzerà rivelatori CCD a grande campo che produrranno decine di migliaia di immagini da inviare a terra. Tali immagini dovranno essere processate anche in tempo reale per il riconoscimento degli oggetti da 'inseguire' durante l'attraversamento del campo di vista, in modo da raccogliere un numero sufficiente di fotoni per ogni target.

Date queste premesse, si deduce una sostanziale affinità tra le procedure di riduzione dati della Astrometria globale dallo spazio e della Geodesia, ritenendo perciò che affrontare le problematiche concernenti la modellizzazione e la riduzione dei dati di questa missione sia estremamente interessante per la comunità dei geodeti, sia per il tipo di rivelatori impiegati, sia perché le accuratezze e la mole di dati in gioco, che verranno puntualizzate nei paragrafi successivi, tali da rappresentare una sfida alle tecniche più raffinate utilizzate a tutt'oggi in campo geodetico.

## Principio di misura

### Descrizione dello strumento

L'obbiettivo principale del satellite GAIA è quello di osservare contemporaneamente coppie di stelle a grande distanza angolare fra loro, e dare origine ad una rete in cui ciascuna stella sia connessa ad un grande numero di altre stelle in ogni direzione.

Per avere osservazioni simultanee a grande distanza sono necessarie due direzioni di vista, che possono essere realizzate da un singolo telescopio accoppiato ad un combinatore di fascio, come nel caso di HIPPARCOS, o da due telescopi distinti, come per GAIA. Le dimensioni degli specchi principali dei due telescopi sono di  $1.7 \times 0.7 \text{ m}^2$ , e l'angolo tra le linee di vista dei due strumenti, detto angolo di base, è di  $106 \text{ gradi}$ .

Ciascun campo di vista è diviso in un campo propriamente astrometrico dedicato alle misure di posizione, e uno 'sky mapper' (Fig. 4.5). Lo sky mapper ha la funzione di rilevare il segnale e selezionare gli oggetti nel campo da seguire in tempo reale. L'assemblaggio del piano focale utilizza tecnologia CCD, con circa 250 CCDs operanti in modo TDI (time-delayed integration), ed aventi un pixel di 9 micrometri di lato nella direzione di scansione del satellite, e di 27 micrometri in direzione trasversale. I 9 micrometri permettono un buon campionamento (circa 6 pixels) dell'immagine di diffrazione degli oggetti stellari in luce visibile (dell'ordine di  $0.05 \text{ arcosecondi}$ ) nella direzione di scansione, che è quella in cui la misura del satellite è più accurata. Il campo astrometrico di ciascuno dei due telescopi è di  $0.5 \times 0.66 \text{ gradi}$ . A differenza dell'orbita del satellite, che nel caso di HIPPARCOS era prevista essere geostazionaria (nota: a causa del malfunzionamento del motore di apogeo il satellite ha in realtà operato da un'orbita fortemente ellittica), mentre GAIA sarà posto attorno al punto di librazione L2 del sistema Sole-Terra, la legge di scansione di GAIA è molto simile a quella di HIPPARCOS. Il satellite, che osserverà il cielo continuamente per circa cinque anni, avrà una velocità di scansione di  $120 \text{ arcosecondi/secondo}$ , ed un moto di precessione dell'asse di spin, ad un angolo fisso di  $56 \text{ gradi}$  dal Sole, di periodo 76 giorni. Secondo questa legge di scansione, entrambi i telescopi, le cui linee di vista sono perpendicolari all'asse di spin, scansionano successivamente la stessa area di cielo, che può essere visualizzata come una banda della stessa altezza di quella del campo di vista (Fig. 4.6). Il movimento di precessione genera uno spostamento della linea di vista in direzione perpendicolare alla scansione di circa  $0.51 \text{ gradi}$  durante un periodo di rivoluzione, mentre l'altezza del campo di vista è di  $0.6 \text{ gradi}$ . Questo fa sì che due bande consecutive siano parzialmente sovrapposte, permettendo così di calibrare alcuni parametri strumentali cruciali, come l'angolo di base, utilizzando le stesse stelle ri-osservate in scansioni consecutive.

### Accuratezza astrometrica

La stima dell'accuratezza astrometrica deve tenere conto di molteplici fattori, quali il principio di formazione dell'immagine, il tipo di segnale del rivelatore, la precisione dello stimatore di posizione, nonché la stabilità strumentale e gli errori di calibrazione. Infine, ciascuna misura riferita ad una singola epoca di osservazione dovrà essere inserita in un modello che determini le posizioni, i moti propri, e le parallassi ad un tempo di riferimento comune. L'accuratezza finale astrometrica che ci si aspetta per una stella può essere espressa sinteticamente dalla formula:

$$\sigma_a = g_a \left[ \frac{\tau_1}{N_i \times \tau \times p_{det}(G)} \times (\sigma_\xi^2 + \sigma_{cal}^2) \right]^{1/2}$$

dove  $N_i = 2$  è il numero di telescopi,  $\tau$  il tempo totale (medio) disponibile per oggetto e per ciascuno strumento,  $\tau_1$  il tempo di integrazione per CCD(s),  $\sigma_\xi^2$  la precisione angolare nella direzione di scan per un passaggio nel campo di vista,  $\sigma_{cal}^2$  l'accuratezza delle calibrazioni astrometriche, e  $p_{det}(G)$  la probabilità di rivelare una stella una funzione della sua magnitudine. Il fattore  $g_a$  tiene conto di come la determinazione dei parametri astrometrici dipende dalla geometria di scansione. Potenzialmente, e questo costituisce l'obbiettivo scientifico di GAIA, i parametri astrometrici di stelle di magnitudine  $V = 15$  sono determinati con una accuratezza  $\sigma_a$  di 10 *microarcosecondi*. Per stelle più deboli,  $\sigma_a$  è stimata dell'ordine di 20-40 *microarcosecondi* a  $V = 17-18$  magnitudini, e 100-200 *microarcosecondi* a  $V = 20$ , semplicemente a causa della statistica dei fotoni. Per stelle di magnitudine  $V < 15$  la precisione di misura è maggiore, ma l'accuratezza è limitata da effetti sistematici a circa 3-4 *microarcosecondi* per  $V < 10-11$  *magnitudini*.

### Controllo di assetto a bordo

Per poter raggiungere i livelli di accuratezza sopra citati, è necessario che il satellite mantenga una stabilità di puntamento durante l'osservazione al meglio di 0.002 *arcosecondi/secondo* per la durata di un secondo, in modo da seguire adeguatamente la legge di scansione predefinita e mantenere nitida l'immagine stellare sul piano focale dello strumento. Questo è possibile grazie a un set di micropropulsori (FEEP) controllati in modo continuo, e all'uso combinato di un sensore stellare a grande campo e dello 'sky mapper' per il controllo di assetto e di velocità.

### **Trattamento delle osservazioni**

Globalmente, i dati scientifici (compressi) generati durante i cinque anni di missione saranno circa  $2 \times 10^{13}$  *bytes* (20TB), corrispondenti a circa  $10^9$  oggetti. L'implementazione di un'analisi dei dati completa ed efficiente, che tenga conto degli svariati aspetti del modello funzionale che lega osservazioni e parametri da stimare, richiede competenze non solamente astronomiche e fisiche, ma anche matematiche ed informatiche, concorrenti alla realizzazione della catena di riduzione dati. Come considerazione importante, si vuole sottolineare che, al livello dei 3-4 *microarcosecondi*, gli effetti relativistici che modificano la direzione del fascio di luce attraversante il sistema solare non possono essere considerati come piccole

correzioni al modello Newtoniano come fu nel caso del satellite HIPPARCOS; al contrario, la formulazione del modello astrometrico deve essere sviluppata in un contesto di relatività generale.

Il processamento dell'enorme quantità di dati prodotta da GAIA richiede l'utilizzo di metodi numerici altamente efficienti. In questo contesto abbiamo preso in considerazione due aspetti che riguardano rispettivamente le fasi iniziali e finali della riduzione dati: il primo concerne la rilevazione degli oggetti stellari in tempo reale a bordo del satellite, basata su un filtraggio ottimale del segnale dal rumore di fondo; il secondo tratta la ricostruzione della sfera, e cioè la determinazione di posizioni, moti propri e parallassi in un sistema di riferimento celeste, in cui le osservazioni sono costituite dalle posizioni delle stelle relativamente all'assetto del satellite al tempo di osservazione, analogamente al caso di HIPPARCOS.



Fig. 4.4 – Interpretazione artistica del futuro satellite Gaia dell'ESA

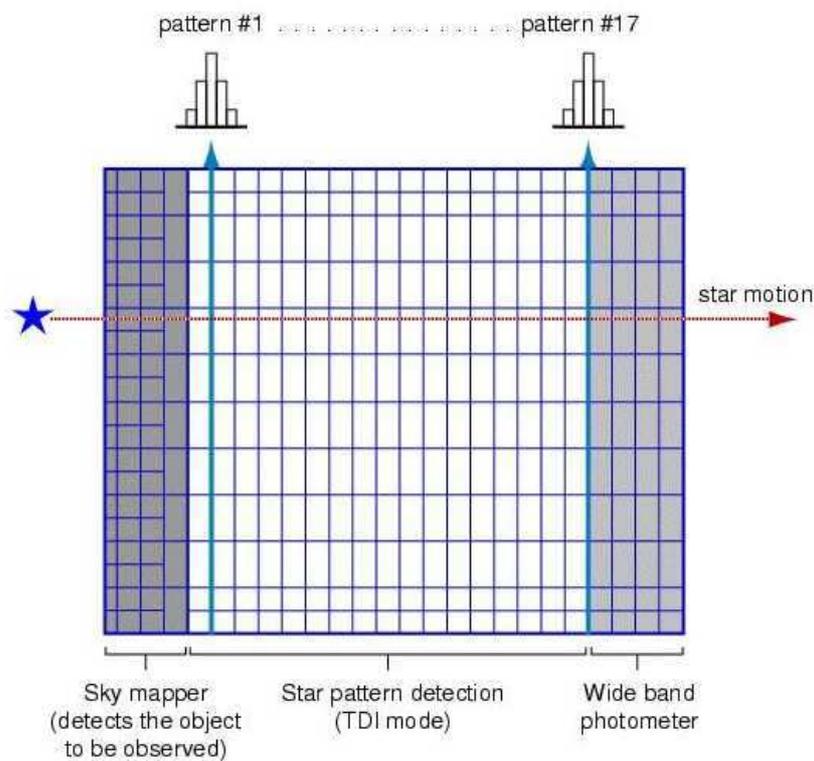


Fig. 4.5 – Il piano focale è costituito da un mosaico di circa 250 CCDs. Le stelle che sono rivelate dallo 'sky mapper' vengono 'inseguite' durante il loro attraversamento del campo di vista astrometrico

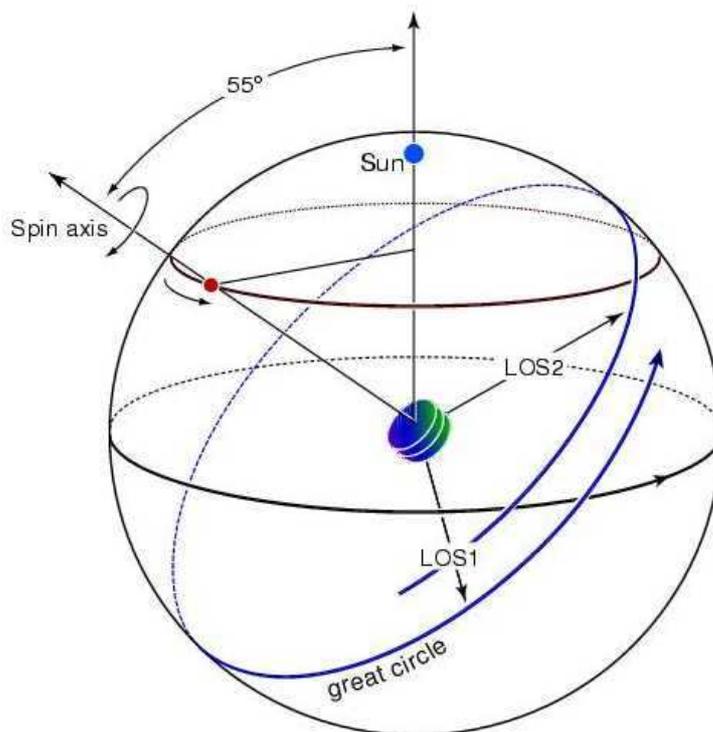


Fig. 4.6 – I due campi di vista del satellite (LOS1 e LOS2) scansionano la volta celeste lungo grandi cerchi, mentre l'asse di spin ruota e precede attorno al sole

Le tecniche proposte sono:

- filtraggio del segnale nel campo del CCD per il riconoscimento a bordo degli oggetti utilizzando le matrici di Toeplitz che sfruttano la regolarità della matrice CCD (caso bidimensionale);
- soluzione del modello della sfera per un nucleo di stelle 'primarie' (~1 milione), con stima contemporanea dei parametri astrometrici e di assetto e delle loro covarianze, dove la matrice disegno è a blocchi per le stelle, ha una banda sparsa per i parametri di assetto ed una banda piena per parametri di calibrazione strumentale.

Il problema della ricostruzione della sfera richiede la soluzione di un sistema esteso costituito da parametri astrometrici relativi alle stelle (solitamente 5 per stella: posizioni, parallasse e moti propri) e da parametri attitudinali relativi all'assetto del satellite (circa 20 per insieme omogeneo – 6 ore – di grandi cerchi), dell'ordine del miliardo di incognite ed oltre. Detto sistema può essere ricondotto ad un sistema ridotto costituito da 14.400 parametri attitudinali e di calibrazione, riferiti a 6 mesi per una scansione completa della sfera celeste. Pertanto una simulazione di tale sistema ha fornito i seguenti risultati sui tempi di calcolo:

<b>dimensioni:</b>	<b>5.000</b>	<b>8.000</b>	<b>10.000</b>	<b>11.000</b>	<b>12.000</b>
<b>tempi:</b>	<b>1<sup>h</sup>:33<sup>m</sup></b>	<b>6<sup>h</sup>:57<sup>m</sup></b>	<b>13<sup>h</sup>:22<sup>m</sup></b>	<b>18<sup>h</sup>:19<sup>m</sup></b>	<b>24<sup>h</sup>:32<sup>m</sup></b>

Una relativamente facile estrapolazione fa supporre poco più di due giorni il tempo necessario per risolvere il sopraccitato sistema ridotto, cosa del tutto accettabile, tenuto conto che dopo qualche prima compensazione, aggiornamenti e modiche potranno più celermente essere fatti in modo sequenziale.

### 3 Effetto di correlazioni nella compensazione di osservazioni

La capacità di acquisire grosse moli di dati, durante un processo di misura, da un lato, permette una descrizione più puntuale del fenomeno, dall'altro, richiede maggior attenzione nella scelta del modello stocastico. Questo aspetto, a volte trascurato, può portare seri problemi sull'attendibilità delle stime, quando si ignorano eventuali correlazioni presenti tra le misure. Infatti in una compensazione a minimi quadrati, l'ipotesi d'indipendenza tra le misure porta, dal punto di vista del calcolo, ad una matrice dei pesi delle osservazioni di forma diagonale e l'ulteriore ipotesi di misure di uguale precisione è spesso abbastanza plausibile, in quanto si suppone che i mezzi utilizzati, durante il loro impiego, non subiscano notevoli variazioni nella loro accuratezza.

Tuttavia in alcuni insiemi di dati, è possibile evidenziare e successivamente quantificare la correlazione, presente nelle osservazioni, mediante un approccio di tipo stocastico. La quantificazione della correlazione tra le misure avviene ipotizzando che i residui delle equazioni alle osservazioni siano una realizzazione di un processo stocastico lineare, continuo, normale e stazionario di ordine due, rispetto ad un parametro ordinatore che si ritiene gruppo di invarianza per la definizione del processo stocastico stesso. Il metodo della collocazione è applicato sui residui, poiché tale metodo richiede in ingresso dati privi da un qualunque sistematismo generale che è rimosso proprio dal modello funzionale, utilizzato nel procedimento a minimi quadrati. A questo nuovo insieme, parametro ordinatore e residui, è applicato l'algoritmo della collocazione. L'obiettivo principale è evidenziare discrepanze tra i risultati nel caso in cui l'effetto della correlazione sia ignorato oppure no.

L'insieme dei dati, relativo alla Base di Bergamo, offre un esempio di osservazioni correlate tra loro; il parametro ordinatore, scelto per l'approccio stocastico, è il tempo in cui si è effettuata la misura. La Base di Bergamo è stata istituita per offrire un banco di prova alle strumentazioni di tipo elettronico, atte alla misura precisa di distanze, ed un altro scopo è stata la determinazione, con una sperimentazione accurata e prolungata nel tempo, delle condizioni di impiego degli strumenti, ossia della loro stabilità sotto l'influenza di fattori ambientali, ad es., come temperatura, umidità, ecc. La campagna di misure ha abbracciato un arco di tempo di circa due anni mezzo, impegnando molte risorse sotto il profilo dell'organizzazione (ubicazione della base, segnalizzazione dei punti, campagne di misura) e dello studio (metodi di trattamento delle osservazioni ed analisi dei dati).

Gli strumenti impiegati nelle campagne di misura per la Base di Bergamo appartengono rispettivamente alla Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano, all'ENEL di Milano, all'ENEL di Torino ed all'Agenzia del Territorio di Roma (già Servizi Tecnici Erariali - CATASTO). Tutti e quattro gli strumenti sono Mekometers, prodotti dalla Ditta KERN e tarati dalla ditta fornitrice sulla Base di Aarau (CH), prima della messa in opera per le misure sulla base. L'insieme delle misure, dal punto di vista temporale, risulta diviso in sette cicli. Durante i periodi di misura difficoltà di carattere organizzativo e malfunzionamenti di alcuni strumenti non hanno mai permesso di impiegare tutti e quattro gli strumenti contemporaneamente.

La Base di Bergamo è formata da otto punti quasi allineati in piano e rettilineo con una lunghezza di circa due Km, le distanze medie tra i punti si possono suddividere in due categorie:

- distanze tra i punti estremi della base (1-2 e 7-8) di circa mezzo Km, costituenti il tratto identificato come Base esterna;
- distanze tra i punti intermedi della base (2-3-4-5-6-7) oscillanti tra un centinaio e duecentocinquanta metri, a loro volta, costituenti il tratto identificato come Base interna.

## **Modello funzionale**

Le misure effettuate sulle base non sono immediatamente utilizzabili per la compensazione a minimi quadrati. Infatti per scrivere l'equazione alle misure è indispensabile eseguire per ogni misura una riduzione su un piano orizzontale e proiettare, la misura ridotta, su una direzione prefissata. La quota del piano orizzontale è stata posta uguale alla quota del secondo punto, mentre la direzione è quella della retta che collega il secondo ed il settimo punto. Dopo la riduzione delle misure si deve scrivere l'equazione che lega le misure (distanze, temperature, ecc.) ad alcuni parametri incogniti ritenuti significativi, per esprimere al meglio una relazione geometrica e fisica.

Infatti la relazione più semplice è puramente geometrica, ma introducendo le osservazioni riguardanti la temperatura alla quale è effettuata la misura ed alcuni parametri incogniti aggiuntivi, ad es., quali una costante d'origine, o additiva, ed un fattore di scala, ovvero una costante moltiplicativa della distanza, l'equazione ottenuta diviene di tipo fisico: è non-lineare e deve essere linearizzata. Come in tutti i problemi di tipo rete, per una compensazione a minimi quadrati, è indispensabile introdurre vincoli, ovvero cancellare incognite, per sanare difetti di rango nella matrice normale. Pertanto nella compensazione si è scelto di vincolare il primo punto, come origine della base, e di porre scala unitaria al primo ciclo di misure eseguita nel giugno 1976 con il Mekometer DUOMO.

## **Vecchio e nuovo modello stocastico**

In presenza di misure indipendenti, la matrice dei pesi delle osservazioni è diagonale; pertanto sotto questa ipotesi il problema è quantificare numericamente il peso da assegnare a ciascuna misura. Allora l'insieme delle osservazioni è suddiviso in quattro serie, corrispondenti ai quattro strumenti impiegati per le misure, ed i pesi assegnati a ciascuna serie sono i reciproci del quadrato dei sigma zero ricavati compensando, separatamente, le quattro serie di osservazioni, avendo assunto come matrice dei pesi l'identità ovvero nell'ipotesi di misure indipendenti e di uguale precisione. Lo scopo di questa operazione preliminare è di pesare le quattro serie di misure, eseguite con i diversi strumenti, per rendere più rigorosa la successiva compensazione globale.

Nel trattamento dati, relativo alla compensazione congiunta, si è notata (stimata empiricamente e modellata con opportune funzioni definite positive) una piccola, ma significativa correlazione tra i residui delle equazioni alle osservazioni. Le operazioni per la stima empirica della funzione di covarianza e la ricerca di una funzione finita di covarianza modello sono:

- ricerca del passo ottimale per la stima di covarianza (cioè ricerca del massimo assoluto di correlazione al primo passo del processo);
- stima empirica della funzione di covarianza (calcolata mediante prodotti di medie, prese in intorni multipli del passo ottimale);
- ricerca e calcolo dei parametri di un'opportuna funzione modello di covarianza;
- prodotto della funzione modello di covarianza trovata per una data funzione finita di covarianza.

Assunto come parametro ordinatore e come componente del processo stocastico rispettivamente il tempo a cui è effettuata la misura ed il residuo dell'equazione all'osservazione, dopo la compensazione globale, sempre relativo alla stessa misura; per ciascuna delle quattro serie di dati si procede alla stima di covarianza. La funzione finita di covarianza modello, così ottenuta, rappresenta quantitativamente le

correlazioni presenti nei residui delle equazioni alle osservazioni. Dopodiché è necessario costruire quattro matrici di covarianza, calcolate in base alla forma e ai valori delle funzioni finite di covarianza modello, che esprimono numericamente le correlazioni presenti tra le varie osservazioni. Infine le matrici di covarianza del segnale stocastico e le varianze del rumore aleatorio, opportunamente addizionate ed invertite, sono inserite nella compensazione globale, come nuovo modello stocastico, al posto del vecchio, costituito dalla sola matrice dei pesi.

## **Risultati**

L'ordine di grandezza della correlazione massima oscilla tra il dieci ed il trenta per cento della varianza generale e la durata della correlazione continua per ben trenta minuti di utilizzo dello strumento. Il valore massimo di correlazione fra le quattro serie di dati è associato allo strumento, Mekometers ENEL-MILANO che ha fornito le prestazioni migliori, viceversa il valore minimo è associato allo strumento, Mekometers CATASTO, con prestazioni al di sotto delle aspettative.

La compensazione che tiene conto delle correlazioni ha un valore di sigma zero minore rispetto alla compensazione fatta sotto l'ipotesi di indipendenza tra le misure. Tuttavia risultano aumentate le varianze dei parametri incogniti e questo è senz'altro l'aspetto più interessante. Infatti l'introduzione di informazioni aggiuntive, cioè correlazioni fra le osservazioni, anziché aumentare la precisione della compensazione (come quando si aggiungono nuove osservazioni all'insieme dei dati), hanno in qualche modo influito negativamente nel processo di compensazione (come quando si introducono parametri ausiliari nel modello funzionale).

Evidentemente un solo esempio non è per nulla sufficiente per confermare teoricamente e nemmeno praticamente le osservazioni sopra esposte, poiché questo è solo uno dei primi tentativi di considerare le correlazioni fra le misure, introducendole nella compensazione. Tuttavia si può almeno dire che, se queste sono ignorate, possono portare a risultati poco attendibili e tutto ciò assume particolare importanza, quando diviene relativamente facile l'acquisizione di innumerevoli dati variatamente correlati nel tempo e/o nello spazio, come accade nel caso di osservazioni geospaziali, di fotogrammetria digitale (dallo spazio, aerea o terrestre). Infatti mentre le misure geodetiche classiche in una rete geodetica o topografica sono, in generale, da qualche centinaio ad alcune migliaia ed anche le osservazioni fotogrammetriche, da sensori analogici, in un blocco fotogrammetrico sono, al più, una o due decine di migliaia, le osservazioni geospaziali superano spesso le centinaia di migliaia e quelle di fotogrammetria digitale arrivano al milione ed oltre.

Allora il trattamento corretto e sufficiente delle osservazioni deve prevedere il compattamento di queste in poche pseudo-osservazioni, opportunamente pesate o, in alternativa, in valori predetti delle osservazioni stesse, a distanza tale da essere fra loro incorrelate, ovvero indipendenti, se normali. Infine poiché, ripetendo molte volte una stessa misura con un qualsiasi strumento, anche di scarsa precisione, la varianza dell'osservazione diminuisce, una conclusione metrologica falsa conduce ad un'irrealistica varianza d'osservazione nulla, mentre una conclusione metrologica corretta stima un valore finito di questa, legato allo strumento impiegato ed alle correlazioni inevitabilmente presenti nel processo di misura impiegato.

## **Presenza di correlazioni e degrado della precisione**

Analiticamente è possibile evidenziare gli effetti subiti dalle stime delle varianze dei parametri incogniti nell'atto di aggiungere o togliere un'equazione d'osservazione od un parametro incognito. Infatti aggiungere

(togliere) un'equazione d'osservazione diminuisce (aumenta) le stime delle varianze dei parametri incogniti. Infatti le varianze dei parametri incogniti si trovano sulla diagonale della matrice di varianza – covarianza ed essendo quest'ultima direttamente proporzionale alla matrice normale inversa, aggiungendo (togliendo) un'equazione d'osservazione  $a$ , la matrice normale inversa  $C^{-1}$  è modificata togliendo (aggiungendo) una quantità positiva:

$$D^{-1} = C^{-1} \mp C^{-1} a^T (p^{-1} \pm a C^{-1} a^T)^{-1} a C^{-1}$$

Al contrario, aggiungere (togliere) un parametro incognito aumenta (diminuisce) le stime di varianza dei parametri incogniti. Infatti tutti gli addendi di matrici quadrate, simmetriche e definite positive sono ottenuti da prodotti scalari  $b^T, b$  (aventi nucleo l'identità od un'altra matrice definita positiva  $c, A^{-1}$ ) e, di conseguenza, hanno elementi positivi in diagonale principale, cosicché la diagonale principale della nuova matrice normale inversa aumenta, per addizione di termini positivi. Le stesse espressioni (scambiando tra loro due addendi) sono utilizzate quando si toglie un parametro incognito, cosicché la diagonale principale della nuova matrice normale inversa  $A^{-1}$  diminuisce, per sottrazione, di termini positivi rispetto a quella precedente  $D^{-1}$ :

$$D^{-1} = A^{-1} + A^{-1} b (c - b^T A^{-1} b)^{-1} b^T A^{-1} = A^{-1} + A^{-1} b \gamma b^T A^{-1}$$

$$A^{-1} = D^{-1} - A^{-1} b (c - b^T A^{-1} b)^{-1} b^T A^{-1} = \alpha - A^{-1} b \gamma b^T A^{-1}$$

Quando si introducono le correlazioni tra le osservazioni, fornire indicazioni sulle stime di varianza dei parametri incogniti diventa più complesso e deve essere studiato ed analizzato con maggiore cura.

- Infatti la matrice di varianza – covarianza delle osservazioni può essere suddivisa nella somma delle matrici di varianza – covarianza del segnale e del rumore, e questa espressione può essere riscritta e generalizzata, introducendo la matrice dei pesi e la matrice di correlazione del segnale. Allora data la nuova matrice normale, quando si introducono le correlazioni, la matrice di varianza – covarianza dei parametri incogniti, a meno di sigma zero quadro, si ottiene applicando due volte un noto teorema di algebra lineare, detto lemma per l'inversione di una matrice. Come evidente, le due matrici di varianza – covarianza ottenute sono entrambe definite positive ed hanno in diagonale principale varianze, ovvero elementi positivi. La somma di questi ultimi è ovviamente maggiore di entrambi gli addendi; pertanto ne consegue che le varianze dei parametri incogniti aumentano con l'introduzione delle correlazioni.
- Inoltre nel caso le correlazioni interessino informazioni, a priori, sui parametri, ugualmente la diagonale principale della matrice di varianza – covarianza degli stessi è maggiore della diagonale principale della matrice di varianza – covarianza degli stessi, nel caso in cui le informazioni a priori siano incorrelate (anche in questo caso, si noti come, nonostante l'adozione necessaria di un formalismo più pesante, il modo di operare sia sostanzialmente identico a quello impiegato per le correlazioni tra le osservazioni).

Pertanto dato un problema a minimi quadrati, la matrice normale, ottenuta da un modello funzionale lineare e da un modello stocastico classico, dove tutte le osservazioni sono incorrelate, ha forma:

$$C = A^T P A$$

essendo  $A$  la matrice disegno e  $P$  la matrice dei pesi. Al contrario, se le osservazioni sono correlate tra loro, la matrice normale diventa:

$$D = A^T (P^{-1/2} (R - I) P^{-1/2} + P^{-1})^{-1} A$$

dove i coefficienti  $r$  della matrice  $R$  evidenziano la correlazione fra le osservazioni. Di conseguenza, la matrice inversa della seconda matrice normale  $D^{-1}$  è differente, rispetto alla matrice inversa della prima matrice normale  $C^{-1}$ :

$$\begin{aligned} D^{-1} &= (A^T (P^{-1/2} (R - I) P^{-1/2} + P^{-1}) A)^{-1} = \\ &= (A^T P A - A^T P (P^{1/2} (R - I)^{-1} P^{1/2} + P)^{-1} P A)^{-1} = \\ &= C^{-1} + C^{-1} A^T (P^{-1/2} (R - I)^{-1} P^{-1/2} + (P^{-1} - A C^{-1} A^T))^{-1} A C^{-1} = \\ &= C^{-1} + C^{-1} A^T (P^{-1/2} (R^{-1} - (R - R^2)^{-1} P^{-1/2} + (P^{-1} - A C^{-1} A^T))^{-1} A C^{-1} \end{aligned}$$

ed i suoi elementi diagonali principali sono spesso più grandi dei corrispondenti elementi del primo modello presentato, essendo:  $diag D^{-1} > diag C^{-1}$ .

Analogamente dato un problema a minimi quadrati, la matrice normale, ottenuta da un modello funzionale lineare, contenente anche le informazioni, a priori, incorrelate sui parametri e da un modello stocastico classico, ha forma:

$$C = A^T P A + (I * Q)^{-1}$$

dove la  $Q$  è la matrice dei pesi delle pseudo-osservazioni sui parametri. Al contrario, se le informazioni, a priori, sui parametri sono correlate tra loro, la matrice normale diventa:

$$D = A^T P A + (I * Q + (I * Q)^{1/2} (R - I) (I * Q)^{1/2})^{-1}$$

dove i coefficienti  $r$  della matrice  $R$  evidenziano la correlazione fra i parametri. Di conseguenza, la matrice inversa della seconda matrice normale  $D^{-1}$  è differente, rispetto alla matrice inversa della prima matrice normale  $C^{-1}$ :

$$\begin{aligned} D^{-1} &= (A^T P A + (I * Q + (I * Q)^{1/2} (R - I) \bullet (I * Q)^{1/2})^{-1})^{-1} = \\ &= (A^T P A + (I * Q)^{-1} - (I * Q)^{-1/2} ((R - I)^{-1} + I)^{-1} \bullet (I * Q)^{-1/2})^{-1} = \\ &= C^{-1} + C^{-1} (I * Q)^{-1/2} ((R - I)^{-1} + I - (I * Q)^{-1/2} C^{-1} (I * Q)^{-1/2})^{-1} (I * Q)^{-1/2} C^{-1})^{-1} = \\ &= C^{-1} + C^{-1} (I * Q)^{-1/2} (R^{-1} - (R - R^2) + I - (I * Q)^{-1/2} C^{-1} (I * Q)^{-1/2})^{-1} (I * Q)^{-1/2} C^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

ed i suoi elementi diagonali principali sono spesso più grandi dei corrispondenti elementi del primo modello presentato, essendo:  $diag D^{-1} > diag C^{-1}$ . Si noti comunque che gli elementi diagonali principali di entrambe le matrici inverse sono quasi sempre più piccoli dei corrispondenti elementi di una matrice inversa senza alcuna informazione, a priori, sui parametri:  $diag (A^T P A)^{-1} > diag D^{-1} > diag C^{-1}$ .

Per correttezza e completezza, occorre tuttavia osservare come queste considerazioni hanno valore di prova solo quando si hanno alte correlazioni positive ed un modello matematico additivo (o moltiplicativo, essendo la moltiplicazione, in ambito lineare, una combinazione lineare a coefficienti positivi). Infatti l'espressione  $R - I$  non è un'espressione definita positiva, essendo nulla la sua traccia. Pertanto è necessario considerare casi diversi, per giudicare l'effetto matematico delle correlazioni, aggiungendo poi considerazioni di ordine metrologico, a supporto di quanto affermato in precedenza. Infatti:

- ❑ un modello matematico additivo, come una media, una qualsiasi combinazione lineare e (con riferimento a quanto sopra affermato) un prodotto (come per calcolare un'area od un volume), con correlazioni positive moderate, vede crescere di poco le varianze delle stime, mentre le varianze delle stime decrescono di poco, con moderate correlazioni alternate (moderate correlazioni negative danno decrementi maggiori, ma sembrano più irrealistiche);
- ❑ lo stesso modello, con alte correlazioni positive, fa crescere la varianza delle stime; di conseguenza, è gravissimo trascurare alte correlazioni positive, benché nascoste, poiché queste possono degradare, addirittura d'ordini di grandezza, la precisione delle stime, ed allora usare, tanto per far numero, dati prossimi, secondo un qualche parametro d'ordine (temporale, spaziale od altro, cioè dati pressoché uguali e, di conseguenza, fortemente correlati), significa millantare precisioni inesistenti, come è possibile mettere in luce crossvalidando i dati stessi con altre osservazioni indipendenti.

Alte correlazioni negative non permettano di costruire una matrice di covarianza, essendo non definita positiva la matrice ottenuta. Per quanto riguarda invece le considerazioni metrologiche, data l'estrema difficoltà di avere informazioni (corrette e consistenti) sulle correlazioni fra i dati presenti, ma per lo più nascoste, occorre considerare fisiologiche correlazioni moderate e sapere che le stime possono risultare, in loro virtù, un po' più od un po' meno precise di quelle ottenute in condizioni di perfetta indipendenza.

Un secondo modello canonico è dato dalla differenza, tra due osservazioni (o dal loro quoziente, essendo la divisione, in ambito lineare, una combinazione lineare di due termini con un coefficiente negativo), dove il limite di due termini è dato dalla non associatività delle operazioni di sottrazione e divisione. Allora il segno meno del modello funzionale inverte i segni delle considerazioni precedenti. Pertanto un'alta correlazione positiva gioca a favore della riduzione della varianza della stima, mentre una correlazione moderata positiva o alternata altera di poco in giù od in su il valore della stessa.

Ancora considerazioni metrologiche permettono di considerare fisiologica una correlazione moderata, accettando la piccola variazione di precisione conseguente, mentre non si ha ragione di gioire per la forte riduzione della varianza della stima, nei problemi di controllo, a seguito di un'alta correlazione positiva. Infatti nei problemi di controllo, un'indispensabile precauzione nel calcolo di una differenza (cioè di una variazione) o di un quoziente (cioè di un rapporto) è l'indipendenza temporale, spaziale od altro, delle due osservazioni messe a confronto. Osservazioni fortemente correlate hanno pressoché lo stesso valore e la loro differenza è all'incirca nulla (essendo il loro quoziente circa unitario), cosa del tutto priva d'informazione, perché è del tutto ovvio che un dato sia uguale a se stesso, al più, solo lievemente modificato.

Differente è il caso dell'eliminazione, per differenza tra due osservazioni, di un errore sistematico. Infatti in questo caso specifico, quello che si vuole eliminare è proprio un errore incognito, ma quasi identico nelle due osservazioni, così da ottenere una differenza residua pressoché nulla. Allora l'alta correlazione positiva gioca davvero a favore della riduzione della varianza, addirittura garantendo quello zero con una precisione

inifinita (cioè una varianza nulla), se il coefficiente di correlazione è proprio pari ad uno, come ben risaputo dai preziosi consigli di vecchi metrologi (a partire dallo scambio dei piatti di una bilancia). Pertanto mentre è fondamentale guardarsi da alte correlazioni positive con modelli additivi o moltiplicativi (gli unici con proprietà gruppali ed associativi), perché fortemente dannose, per quanto riguarda il calcolo di una differenza o di un quoziente, sempre con alte correlazioni positive, occorre distinguere i problemi di controllo dall'eliminazione di errori sistematici (dove in pratica solo la differenza è utilizzata).

L'importanza di queste considerazioni matematiche e statistiche è evidente. Infatti le informazioni contengono spesso i dati correlati da trattare con cura particolare, mentre trascurare le loro correlazioni porta a considerare molto più informazione di quella effettivamente disponibile e tutto ciò fa valutare precisioni, una o più volte migliori, di quelle correttamente previste. Lo sviluppo completo dei modelli matematici e statistici rende certa questa asserzione ed allora solo innovazioni di rango pieno (cioè informazioni incorrelate tra loro) danno i contributi validi, per migliorare la precisione delle stime attese. Esperimenti pratici elementari (come ad es. in Fig. 4.7) mostrano che solo l'elaborazione di dati sicuri, per mezzo di algoritmi e/o procedure stabili, assicura valutazioni esatte e certe.

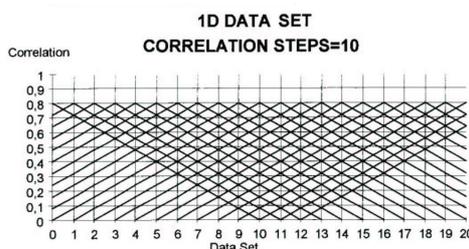


Fig. 4.7 – Autocorrelazioni su 20 dati per 10 passi

Le seguenti cinque tabelle si riferiscono al calcolo di una media (di dati di una serie temporale) ed un retta di regressione, inoltre al calcolo di una media (di dati a supporto territoriale piano), un piano interpolante, una trasformazione affine (formalmente identica al caso precedente, in quanto lo ripete due volte) ed una trasformazione S (o di similitudine), per pochi dati incorrelati e per molti dati incorrelati e correlati.

$\bar{x} = E(x)$	$\sigma$
100 dati incorrelati	0.10
10.000 dati incorrelati	$0.10 \times 10^{-1}$
10.000 dati correlati per 10 passi	$0.30 \times 10^{-1}$
10.000 dati correlati per 100 passi	$0.90 \times 10^{-1}$

$y = a + bx$	$\sigma_a$	$\sigma_b$
100 dati incorrelati	0.20	$0.35 \times 10^{-2}$
10.000 dati incorrelati	$0.20 \times 10^{-1}$	$0.34 \times 10^{-5}$
10.000 dati correlati per 10 passi	$0.57 \times 10^{-1}$	$1.00 \times 10^{-5}$
10.000 dati correlati per 100 passi	0.18	$0.30 \times 10^{-4}$

$\bar{x} = E(x)$	$\sigma$
100 dati incorrelati	0.10
10.000 dati incorrelati	$0.10 \times 10^{-1}$
10.000 dati correlati per 10 passi	$0.77 \times 10^{-1}$
10.000 dati correlati per 100 passi	0.43

$z = a + bx + cy$ $\begin{cases} u = a + bx + cy \\ v = d + ex + fy \end{cases}$	$\sigma_a [\sigma_d]$	$\sigma_b [\sigma_e]$	$\sigma_c [\sigma_f]$
100 dati incorrelati	0.29	$0.35 \times 10^{-1}$	$0.35 \times 10^{-1}$
10.000 dati incorrelati	$0.27 \times 10^{-1}$	$0.35 \times 10^{-3}$	$0.35 \times 10^{-3}$
10.000 dati correlati per 10 passi	0.19	$0.25 \times 10^{-2}$	$0.25 \times 10^{-2}$
10.000 dati correlati per 100 passi	0.75	$0.86 \times 10^{-2}$	$0.86 \times 10^{-2}$

$\begin{cases} u = a + cx + dy \\ v = b - dx + cy \end{cases}$	$\sigma_a$	$\sigma_b$	$\sigma_c$	$\sigma_d$
100 dati incorrelati	0.22	0.22	$0.25 \times 10^{-1}$	$0.25 \times 10^{-1}$
10.000 dati incorrelati	$0.20 \times 10^{-1}$	$0.20 \times 10^{-1}$	$0.24 \times 10^{-3}$	$0.24 \times 10^{-3}$
10.000 dati correlati per 10 passi	0.15	0.15	$0.18 \times 10^{-2}$	$0.18 \times 10^{-2}$
10.000 dati correlati per 100 passi	0.61	0.61	$0.61 \times 10^{-2}$	$0.61 \times 10^{-2}$

### Epistemologia delle misure e del loro trattamento

Un commento eloquente, sulla perdita di precisione (pur formulato in una differente occasione), deriva da una lezione rilevante tenuta dal Prof. Giuseppe Inghilleri (già assistente al Politecnico di Milano e poi professore ordinario al Politecnico di Torino) e mette in luce come non sia tanto importante ridurre al minimo la dispersione residua, quanto piuttosto capire come e perché essa si sia generata. A commento ed approvazione, il Prof. Mariano Cunietti mostra come sia sempre possibile far scomparire errori residui, sovra – parametrizzando il modello in esame, e come tale pratica discutibile sia solo un trucco per abbellire i risultati, nascondendo la complessità della realtà analizzata (che inevitabilmente sfugge, quasi sempre, alle varie modellazioni proposte, pur essendo doveroso cercarle).

Allora la strada maestra, dopo qualsiasi trattamento (e maggiormente, se esso è parecchio complesso e sofisticato) è procedere con cautela ad un'analisi successiva per la validazione dei risultati ottenuti che, con un'elegante espressione post – moderna, può essere chiamata post – analysis di dati e modelli. Del resto, è addirittura possibile tracciare un parallelismo logico tra la sovra – parametrizzazione e la cancellazione delle correlazioni, perché entrambe le operazioni hanno l'effetto di ridurre la varianza residua: la prima introducendo parametri per correggere errori, la seconda ipotizzando d'avere molta più informazione di quella effettiva, riducendo così, pur per strade diverse, proprio la varianza residua e dando l'illusione di una maggiore precisione, in realtà, inesistente.

#### 4. Una ricostruzione di superficie con una linea di discontinuità'

Nell'ambito della matematica applicata e dell'informatica grafica, la ricostruzione di superficie è una procedura ormai standard, così come l'interpolazione di linee (anche chiuse, anche gobbe, a loro volta, anche chiuse), e può essere condotta con varie metodologie statistiche. Più complesso è invece il caso di una ricostruzione di superficie interessata da linee discontinuità (ad es., linee di rottura, oppure direttrici, ecc.), dove la discontinuità può essere di prima specie (ovvero un salto finito), oppure di prima specie nelle derivate prime della stessa superficie (ovvero, un cambio repentino di pendenza)<sup>47</sup>.

##### Un esempio preliminare

Dati due insiemi di punti:  $\{P_i(x_i, y_i), \forall i = 1, m\}$  e  $\{Q_j(x_j, y_j), \forall j = 1, n\}$ , campionati su due porzioni finite di rette, appartenenti ad un unico piano, dove un punto è comune ad entrambi gli insiemi ( $P_k \equiv Q_l$ ), per vari motivi geometrici e/o fisici, sono modellati con due modelli funzionali differenti:

$$y = E(ax + b) \quad \forall P_i \qquad \qquad \qquad e \qquad \qquad \qquad x = E(cy + d) \quad \forall Q_j$$

essendo, invece solitamente, il modello funzionale assunto ipotizzando osservazioni indipendenti e di uguale precisione e, di conseguenza, espresso da una semplicissima matrice identità (in ogni caso comunque, modelli stocastici più sofisticati non richiedono modifiche nella trattazione a seguire).

E' evidente che la forma più semplice per imporre la suddetta coincidenza (cioè  $P_k \equiv Q_l$ ) è espressa dalla uguaglianza delle due coordinate:  $x_k \equiv x_l$  e  $y_k \equiv y_l$ , che si traduce in due equazioni di vincolo o, più semplicemente, in due equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate. Eppure proprio queste due semplicissime equazioni, impongono di considerare osservabili, in entrambe le equazioni d'osservazione del sopraccitato modello funzionale, tanto le coordinate  $x$ , quanto le coordinate  $y$ . D'altra parte, se come detto i punti appartengono ad un piano (geometrico o topografico, ecc.), forse è proprio corretto considerare osservabili entrambe le coordinate che molto probabilmente sono state rilevate con identiche tecniche di rilevamento. Un discorso diverso potrebbe invece essere fatto per una serie temporale, dove il tempo è misurato con precisioni solitamente ben superiori, rispetto ad altre entità rilevate (ad es., fisiche, ambientali, antropiche, demografiche, urbanistiche, economiche, sociali), ad esso collegate.

Pertanto la linearizzazione dei due modelli funzionali proposti, scritta con le convenzioni dell'analisi matematica, cioè prescindendo dalla formulazione corretta degli stessi modelli funzionali, nonché dalla evidenziazione in essi di quantità osservate, parametri incogniti e numeri, diventa:

$$\tilde{y} + \delta y = (\tilde{a}\tilde{x} + \tilde{b}) + \tilde{a}\delta x + \tilde{x}\delta a + \delta b \qquad \qquad \qquad e \qquad \qquad \qquad \tilde{x} + \delta x = (\tilde{c}\tilde{y} + \tilde{d}) + \tilde{c}\delta y + \tilde{y}\delta c + \delta d$$

Allora essendo le nuove incognite le correzioni  $\delta \bullet$ , è necessario procurarsi, per una via qualsiasi, i valori approssimati delle incognite  $\tilde{\bullet}$ , scrivere anche le due uguaglianze di coordinate ( $x_k = x_l$  e  $y_k = y_l$ ) per il punto comune, nelle stesse incognite:

<sup>47</sup> Una discontinuità nella derivate seconde, sempre della stessa superficie (ovvero un cambio repentino di curvatura), è altrettanto possibile, perché costituisce una brusca variazione tra superfici gradualmente variate (cioè continue, con due derivate continue), ma forse un po' meno rilevante (essendo invece rilevante a livello d'interpolazione di linee, per gli eventuali aspetti dinamici connessi).

$$\tilde{x}_k + \delta x_k = \tilde{x}_l + \delta x_l \quad \text{e} \quad \tilde{y}_k + \delta y_k = \tilde{y}_l + \delta y_l$$

e, nelle stesse incognite, scrivere anche quattro equazioni d'osservazione dirette, per le quattro coordinate osservate dei punti:  $\{P_i, \forall i = 1, m\}$  e  $\{Q_j, \forall j = 1, n\}$ ; oltretutto le uniche equazioni d'osservazione, perché le equazioni delle due rette sono diventate equazioni di vincolo, essendo prive di quantità osservate:

$$\begin{array}{l} \tilde{x}_k + \delta x_k = x_k^0 \\ \tilde{x}_l + \delta x_l = x_l^0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} \tilde{y}_k + \delta y_k = y_k^0 \\ \tilde{y}_l + \delta y_l = y_l^0 \end{array}$$

Dopodichè corre il dovere di segnalare innanzitutto due importanti precisazioni, rispettivamente linguistiche e di notazione. Infatti come già detto in precedenza, le equazioni di vincolo sono spesso sostituite, essenzialmente per motivi di praticità, con equazioni di pseudo-osservazioni sovrappesate, capaci anche di esprimere pseudo-osservazioni di peso qualsiasi (inutili in questo caso specifico, ma più generali e particolarmente indicate per modellare parametri di servizio, osservabili secondarie e condizioni geometriche di regolarizzazione). Inoltre una certa libertà espressiva, ha voluto mettere in evidenza, con il simbolo  $\bullet^0$ , dove compaiono le quantità osservate, prescindendo dal mettere in evidenza che, in generale, le stesse non soddisfano le equazioni d'osservazione ed allora è necessario introdurre le variabili, cosiddette scarti – residui ( $\nu$ ), per correggere le suddette quantità osservate e renderle compatibili con le equazioni d'osservazione ( $\bullet = \bullet^0 + \nu$ ).

Infine e soprattutto è necessario segnalare che, nelle equazioni d'osservazione diretta, è necessario porre particolare attenzione nella scelta dei valori approssimati delle incognite  $\tilde{\bullet}$ . Infatti una scelta consueta, quasi spontanea, è scegliere questi valori proprio uguali alle corrispondenti quantità osservate:  $\tilde{\bullet} = \bullet^0$ . Gli aggettivi: consueto e spontaneo, appena smorzato dall'avverbio: quasi, ricordano quanto è comune in molte applicazioni geomatiche (ad es., in fotogrammetria analitica nella compensazione della triangolazione aerea a modelli indipendenti con il metodo anblock). Eppure questa scelta porta ad avere tutti i termini noti nulli identicamente e, di conseguenza, a correzioni delle incognite nulle, ovvero a parametri incogniti perfettamente coincidenti con i loro valori approssimati. Tutto ciò può essere vero, in qualche rarissima situazione (ad es., se i punti campionati fossero ottenuti da una digitalizzazione esatta di porzioni di rette, ma allora a cosa servirebbe ricostruirle, bastando farle passare per due soli punti!).

Un'alternativa vantaggiosa prevede che i valori approssimati delle incognite possano essere facilmente calcolati seguendo varie vie, differenti tra loro, ma tali da non produrre tutti i termini noti identicamente nulli, quali ad esempio:

- far passare le rette per due loro punti qualsiasi ed interpolare gli altri a posteriori: allora due termini noti sono nulli, ma non tutti gli altri, in generale;
- calcolare separatamente le rette a minimi quadrati, cosicché tutti i termini noti siano piccoli (se non sono presenti dati anomali negli insiemi di punti), ma nessuno nullo, in generale;
- calcolare separatamente le rette mediante opportune procedure robuste (se si sospetta la presenza di dati anomali): allora al più due termini noti sono nulli, ma non tutti gli altri, in generale;
- scegliere valori approssimati qualsiasi, purché prossimi, cosicché tutti i termini noti siano non – nulli, anche se la convergenza ai valori attesi potrebbe essere più lenta.

Da ultimo, si osservi come l'intera procedura sia non – lineare e, in ogni caso, richieda di procedere a successive iterazioni, al fine di giungere alla convergenza ai valori attesi, controllata spesso con una norma dell'estremo superiore od altrimenti fermata per mancata convergenza.

### La ricostruzione di un DSM con una linea di rottura

Completata la presentazione di un esempio preliminare, è possibile procedere ad illustrare, in parallelo, la ricostruzione di una superficie con linee di discontinuità, senza precisare la forma analitica del modello funzionale adottato (per motivi di generalità della trattazione) e la ricostruzione di un DSM (cioè un modello digitale di superficie), con una funzione cubica cilindrica in una direzione e quadratica nell'altra ortogonale, percorsa da una linea di rottura piana (ma sarebbe ugualmente possibile studiarla gobba, se l'esempio illustrato, nel seguito, l'avesse permesso), studiata attraverso una spezzata di linee rette.

La scelta di affiancare, da subito, nella sua forma analitica, l'esempio proposto serve a chiarire ulteriormente quanto potrebbe apparire troppo ermetico, nella modellazione fatta prescindendo dalla forma analitica del modello funzionale adottato. D'altra parte, la generalità della trattazione intende chiarire, come quanto trattato non trovi limitazioni di sorta con metodi deterministici o stocastici, oppure misti. Pertanto la ricostruzione di una generica superficie e del sopraccitato DSM presentano i due seguenti modelli funzionali, facilmente linearizzati (avendo indicato con la lettera  $h$  il generico parametro di un generico modello):

$$z = g(x, y) \quad \tilde{z} + \delta z = \tilde{g} + \sum_i g_{h_i} \delta h_i + g_x \delta x + g_y \delta y$$

$$z = a + (bx + cx^2 + dx^3) + (ey + fy^2)$$

$$\tilde{z} + \delta z = ((\tilde{b}\tilde{x} + \tilde{c}\tilde{x}^2 + \tilde{d}\tilde{x}^3) + (\tilde{e}\tilde{y} + \tilde{f}\tilde{y}^2)) + a + \tilde{x} \delta b + \tilde{x}^2 \delta c + \tilde{x}^3 \delta d + \tilde{y} \delta e + \tilde{y}^2 \delta f +$$

$$+ (\tilde{b} + 2\tilde{c}\tilde{x} + 3\tilde{d}\tilde{x}^2) \delta x + (\tilde{e} + 2\tilde{f}\tilde{y}) \delta y$$

Analogamente l'interpolazione di generiche linee di discontinuità e quella della sopraccitata linea di rottura presentano i due seguenti modelli funzionali, ancora facilmente linearizzati (avendo indicato con la lettera  $s$  l'ascissa curvilinea della linea in esame):

$$\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x} + \delta x = \tilde{f} + \sum_i f_{f_i} \delta f_i + f_s \delta s & \tilde{y} + \delta y = \tilde{g} + \sum_i g_{g_i} \delta g_i + g_s \delta s \\ \tilde{z} + \delta z = \tilde{h} + \sum_i h_{h_i} \delta h_i + h_s \delta s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = p_j + q_j y \quad \forall j \\ z = f.data \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x} + \delta x = \tilde{q}_j \tilde{y} + p_j + \tilde{y} \delta q_j + \tilde{q}_j \delta y \quad \forall j \\ \tilde{z} + \delta z = f.data \end{cases}$$

Dopodiché per completare entrambi i modelli funzionali, occorre introdurre le equazioni d'osservazione dirette per le coordinate dei due insiemi di dati, campionati rispettivamente per una ricostruzione di superficie e l'interpolazione di linee di discontinuità (dove il simbolo  $\bullet^0$  serve ancora ad indicare quantità osservate):

$$\begin{cases} x = x^0 \\ y = y^0 \\ z = z^0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x} + \delta x = x^0 \\ \tilde{y} + \delta y = y^0 \\ \tilde{z} + \delta z = z^0 \end{cases}$$

Inoltre per riunire in un unico sistema la ricostruzione di superficie e l'interpolazione di linee di discontinuità, è necessario scrivere anche le equazioni di vincolo (ovvero e meglio le equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate), relativamente alle coordinate comuni nei due insiemi:

$$\begin{cases} x_k \equiv x_l \\ y_k \equiv y_l \\ z_k \equiv z_l \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} P_k \in \{P_i\} \\ Q_l \in \{Q_j\} \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x}_k + \delta x_k \equiv \tilde{x}_l + \delta x_l \\ \tilde{y}_k + \delta y_k \equiv \tilde{y}_l + \delta y_l \\ \tilde{z}_k + \delta z_k \equiv \tilde{z}_l + \delta z_l \end{cases}$$

Infine è proprio indispensabile e fondamentale ripetere quanto già sottolineato a proposito della ricerca dei valori approssimati delle coordinate approssimate. Infatti essendo solo le equazioni d'osservazioni dirette le uniche equazioni contenenti quantità osservate, è necessario fare attenzione a non costruire tutti i termini noti identicamente nulli, così come accadrebbe, se si scegliessero, quali valori approssimati delle coordinate approssimate, proprio le stesse quantità osservate delle coordinate dei punti. Invece se i valori approssimati delle coordinate approssimate sono ottenute, ad esempio, eseguendo separatamente la ricostruzione di superficie e l'interpolazione delle linee di discontinuità, con il metodo dei minimi quadrati, allora tutti i termini noti sono piccoli (se non sono presenti dati anomali negli insiemi di punti), ma nessuno nullo, in generale. Ovviamente altre procedure sono ammissibili, come già detto in precedenza, bastando solo non ottenere tutti i termini noti identicamente nulli.

### Un esempio numerico

Un discorso preliminare riprende un'osservazione già formulata, almeno in parte, se i punti appartengono ad uno spazio 3D (geometrico o topografico, ecc.), allora è più corretto considerare osservabili le tre coordinate che molto probabilmente sono state rilevate con identiche tecniche di rilevamento. Infatti mentre le più antiche tecniche topografiche separavano planimetria ed altimetria, dove accuratezza e precisione della seconda erano ben inferiori a quelle della prima, tutto ciò non è più vero con le più moderne tecniche geodetiche. In questo caso, il GPS ed altre tecniche geospaziali sono essenzialmente 3D ed accuratezza e precisione di planimetria ed altimetria sono pressoché comparabili (e comunque non tali da considerare la planimetria come quasi certa, rispetto ad un'altimetria da modellare statisticamente). Inoltre lo strettissimo legame tra geodesia e topografia, dato soprattutto dall'impiego del GPS, estende il discorso anche alle scale grandissime ed agli oggetti fuori dagli ambiti geodetici.

Lo stesso discorso può essere fatto per il rilevamento fotogrammetrico. Infatti mentre la fotogrammetria terrestre antica (fatta con camere lucide e fototeodoliti) separava planimetria ed altimetria, differenziandole per quanto riguarda precisione ed accuratezza, la fotogrammetria aerea e terrestre moderna supera questa separazione. Essa è superata, in fotogrammetria aerea, già con immagini analogiche, purché lo schema di ripresa realizzi angoli retti tra raggi omologhi, e la stessa separazione si mantiene con immagini digitali, sotto le stesse condizioni di presa. La stessa separazione è superata, in fotogrammetria terrestre, in particolare con immagini digitali. Inoltre se le condizioni di presa realizzano angoli retti tra raggi omologhi, allora accuratezza e precisione sono comparabili anche per la coordinata terrestre che esprime la profondità di campo. Infine data la sempre maggiore vicinanza tra fotogrammetria digitale e telerilevamento (compreso il cosiddetto proximal sensing), il discorso fatto è naturalmente esteso. Un secondo discorso riguarda la distinzione tra errori d'osservazione ed errori di modello (cui appellarsi per fare una separazione). Tuttavia anche questo discorso, pur certamente non trascurabile, viene meno in molti casi, come di seguito riportato:

- modelli digitali di superficie (DSM) oggetti non geodetici;
- modelli digitali di superficie (DSM) per manufatti, rappresentati a grandissima scala;
- modelli digitali delle altezze (DEM) con:
  - linee dirette e/o di rottura;
  - descrittori di forma;
  - trasformazioni tra diversi sistemi di riferimento;
  - mapping figure, mappe e/o modelli 3D;
  - matching di immagini;
  - approcci integrati;
- modelli digitali di parametri morfologici (DTM);
- modelli digitali, diversi da serie temporali (per le quali si è già detto), di altre grandezze.

Infine resta da precisare la sopraccitata distinzione, tra errori di misura ed errori di modello, in quanto i primi sono dovuti tecnologie di rilevamento, mentre i secondi a problemi di modellazione, ovvero alla scelta di metodologie e procedure della statistica (deterministiche o stocastiche, oppure miste).

### OSSERVAZIONI SUPERFICIE DEFORMATA

Punto	X	Y	$\Delta Z$	
1	0.000	0.000	8.000	
2	0.000	7500.000	11.000	
3	295.000	3675.000	6.000	
4	775.000	3675.000	4.000	
5	1255.000	3675.000	3.000	
6	2220.000	3675.000	2.000	
7	3190.000	3675.000	3.000	
8	3660.000	3675.000	4.000	N. DATI 1 <sup>a</sup> SERIE 8
9	4640.000	3675.000	2.000	
10	5610.000	3675.000	2.000	
11	6575.000	3675.000	5.000	
12	7065.000	3675.000	7.000	
13	7500.000	0.000	7.000	
14	7500.000	7500.000	9.000	N. DATI 2 <sup>a</sup> SERIE 7

### OSSERVAZIONI LINEA DI ROTTURA

Punto	X	Y	$\Delta Z$	
1	3257.000	0.000	4.300	
2	3247.000	280.000	4.100	
3	3174.000	760.000	4.000	
4	3096.000	1240.000	3.900	N. DATI 1 <sup>o</sup> GRUPPO 4
5	3105.000	1720.000	3.900	
6	3214.000	210.000	3.900	
7	3323.000	2695.000	4.000	

8	3497.000	3175.000	4.000	
9	3542.000	3230.000	4.000	
10	3660.000	3675.000	4.000	N. DATI 2° GRUPPO 7
11	3649.000	4130.000	4.000	
12	3571.000	4610.000	4.000	
13	3542.000	4775.000	4.000	
14	3498.000	5095.000	4.000	
15	3434.000	5575.000	3.900	N. DATI 3° GRUPPO 6
16	3446.000	6060.000	3.900	
17	3490.000	6540.000	3.900	
18	3575.000	7020.000	4.000	N. DATI 4° GRUPPO 4
19	3550.000	7295.000	4.100	
20	3549.000	7500.000	4.200	N. DATI 5° GRUPPO 3

**INT. SUP. DEFORMATA**

SIGMA ZERO	0.165
N.CONDIZIONE	1.2E+24
N. OSSERVAZIONI	16
N. PARAMETRI	12
RIDONDANZA	4

**INT. LINEA DI ROTTURA**

SIGMA ZERO	40.724
N.CONDIZIONE	5.0D+11
N. OSSERVAZIONI	28
N. PARAMETRI	10
RIDONDANZA	18

**INTERPOLAZIONE CONGIUNTA**

SIGMA ZERO	24.224
N.CONDIZIONE	2.3D+26
N. OSSERVAZIONI	188
N. PARAMETRI	139
RIDONDANZA	49

**PARAMETRI E SQM (PRIMA E SECONDA SERIE)**

Parametro	1 <sup>a</sup> serie	sqm	2 <sup>a</sup> serie	sqm
00	-1.45E-08	2.42E+01	-1.13E-04	2.57E-02
01	7.41E-04	1.00E-01	1.51E-08	3.37E-06
02	-5.92E-07	5.88E-05	-1.94E+01	1.23E+03
03	1.24E-10	9.66E-09	8.17E-03	7.13E-01
10	-1.13E-04	2.57E-02	-9.55E-07	1.36E-04
20	1.51E-08	3.37E-06	2.84E-11	8.40E-09

**PARAMETRI E SQM (PRIMO, SECONDO, TERZO, QUARTO E QUINTO GRUPPO)**

Parametro	1° gruppo	sqm	2° gruppo	sqm	3° gruppo	
0	3.28E+03	3.16E-03	2.74E+03	3.37E-03	4.04E+03	1.15E-02
1	3.36E+00	1.47E+01	-4.50E+00	6.76E+01	4.84E+00	4.10E+02

Parametro	4° gruppo	sqm	5° gruppo	sqm
0	2.98E+03	5.71E-02	3.73E+03	2.42E+01
1	8.30E-02	2.42E+01	-2.43E-02	2.42E+01

### OSSERVAZIONI DIRETTE E SQM (SUPERFICIE DEFORMATA)

Punto	Deformata	X	sqm	Y	sqm	ΔZ	sqm
1	0.000	0.000	24.224	0.000	24.224	8.000	24.224
2	0.000	0.000	24.224	7500.000	24.224	11.000	24.224
3	295.000	295.000	24.224	3675.000	24.224	5.958	23.179
4	775.000	775.001	24.224	3675.000	24.224	4.064	15.864
5	1255.000	1255.000	24.224	3675.000	24.224	3.030	18.110
6	2220.000	2220.000	24.224	3675.000	24.224	1.870	18.668
7	3190.000	3190.000	24.224	3675.000	24.224	3.148	17.627
8	3660.000	3660.081	3.339	3684.254	10.665	4.645	11.929
8	3660.000	3660.081	3.339	3684.254	10.665	4.645	11.929
9	4640.000	4640.000	24.224	3675.000	24.224	4.327	21.485
10	5610.000	5609.999	24.224	3675.000	24.224	4.932	17.493
11	6575.000	6575.001	24.224	3675.000	24.224	7.643	18.323
12	7065.000	7065.002	24.224	3675.000	24.224	9.205	18.502
13	7500.000	7499.999	24.224	0.000	24.224	7.173	23.578
14	7500.000	7500.000	24.224	7500.000	24.224	11.043	24.189

Ridondanze locali: (1) 0.000 (2) 0.000 (3) 0.084 (4) 0.571 (5) 0.441  
(6) 0.406 (7) 0.470 (8) 0.758  
(8) 0.758 (9) 0.213 (10) 0.479 (11) 0.428 (12) 0.417 (13) 0.053 (14) 0.053

### OSSERVAZIONI DIRETTE E SQM (LINEA DI ROTTURA)

Punto	Fessura	X	sqm	Y	sqm	ΔZ	sqm
1	3257.000	3259.065	11.860	5.532	23.884	4.884	24.224
2	3247.000	3250.379	11.095	277.431	23.870	4.687	24.224
3	3174.000	3177.654	9.808	753.861	23.850	4.884	24.224
4	3096.000	3095.882	7.514	1251.431	14.433	5.013	17.129
4	3096.000	3095.882	7.514	1251.431	14.433	5.013	17.129
5	3105.000	3099.043	9.077	1707.012	23.591	5.126	24.224
6	3214.000	3207.557	8.087	2194.425	23.569	4.994	24.224
7	3323.000	3316.138	7.264	2677.121	23.553	4.975	24.224
8	3497.000	3493.468	6.663	3170.123	23.542	4.527	24.224
9	3542.000	3540.269	6.610	3232.406	23.541	4.411	24.224
10	3660.000	3660.081	3.339	3684.254	10.665	4.645	11.929
10	3660.000	3660.081	3.339	3684.254	10.665	4.645	11.929
11	3649.000	3650.381	4.485	4124.267	24.089	3.814	24.224
12	3571.000	3571.760	4.666	4607.046	24.090	3.723	24.224
13	3542.000	3542.522	4.850	4773.233	24.090	3.679	24.224
14	3498.000	3498.198	5.352	5094.237	24.091	3.540	24.224
15	3434.000	3433.421	6.075	5578.475	16.982	3.066	17.129
15	3434.000	3433.421	6.075	5578.475	16.982	3.066	17.129
16	3446.000	3445.245	6.646	6057.288	24.147	2.652	24.224
17	3490.000	3489.605	10.128	6537.605	24.155	2.104	24.224
18	3575.000	3575.240	14.806	7021.242	17.115	-1.283	17.129
18	3575.000	3575.240	14.806	7021.242	17.115	-1.283	17.129
19	3550.000	3550.085	12.959	7295.062	24.219	-4.138	24.224
20	3549.000	3548.951	21.197	7499.965	24.222	-4.142	24.224

### Ridondanze locali:

(1) 0.028	(2) 0.029	(3) 0.031	(4) 0.645				
(4) 0.645	(5) 0.052	(6) 0.053	(7) 0.055	(8) 0.055	(9) 0.056	(10) 0.806	
(10) 0.806	(11) 0.011	(11) 0.011	(13) 0.011	(14) 0.011	(15) 0.509		
(15) 0.509	(16) 0.006	(17) 0.006	(18) 0.501				

Un discorso conclusivo formula un giudizio sul rilevamento dei punti, ben lungi dall'essere ottimale. Infatti questo dato di fatto si riflette sulle ridondanze e quelle locali, come pure su sigma zero e gli sqm delle stime ottenute, nonché sul numero di condizione. Tutto ciò significa:

- quasi impossibilità di identificare eventuali errori grossolani (per l'inaffidabilità dello schema di misura);
- bassa precisione delle stime (dovuta alla propagazione di covarianza, oltreché a sigma zero);
- scarsa stabilità della soluzione ottenuta (a causa del cattivo condizionamento).

D'altra parte, tutte queste validissime considerazioni non inficiano minimamente le ragioni per l'applicazione della metodologia presentata che potrà essere impiegata con esempi migliori, ma che non dovrà essere modificata, da un esempio ad un altro, essendo unica l'intera procedura.

### **BIBLIOGRAFIA MINIMA** <sup>48</sup>

1. Bordoni A. (1859): Geodesia elementare. Tipografia degli Eredi Bazzoni, Pavia.

---

<sup>48</sup> Il presente lavoro è debitore nei confronti di una lunga serie di articoli, dell'autore e di alcuni suoi amici e colleghi, di cui si dà elenco e ragione, nel prosieguo:

- Barbarella M., Mussio L. (1988): Progettazione e ottimizzazione. In: M. Unguendoli (Ed) *Studi e ricerche*. CUSL, Bologna, p. 97-129;
- Barzagli R., Forlani G., Mussio L. (1989): Compensazione cinematica ed analisi spaziale delle reti di livellazione geometrica eseguite dal Catasto in Milano negli anni 1950/72/86. *Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali - Nuova Serie*, anno XLIV, n. 1-2, 1989;
- Barzagli R., Sansò F. (1983): Sulla stima empirica della funzione di covarianza. In: Boll. di Geodesia e Scienze Affini, n. 4/83;
- Barzagli R., Sansò F. (1984): La collocazione in geodesia fisica. In: Boll. di Geodesia e Scienze Affini, n. 2/84;
- Bellone T., Bucciarelli B., Lattanzi M., Mussio L., Vecchiato A. (2002): GAIA: astronomia globale al microarcosecondo per lo studio della via lattea. Atti della Conferenza *Geomatica per l'ambiente, il territorio e il patrimonio culturale - 6° Conferenza Nazionale dell'ASITA*, vol. 1. Perugia, p. 379-384;
- Bellone T., De Haan A. (1997): La fotogrammetria digitale fra le scienze dell'informazione. *Rivista del Dipartimento del Territorio*, anno V n. 1, p. 125-162;
- Benciolini B., Colombo L., Mussio L., Sansò F. (1984): Il calcolo del geode in Italia. Situazione attuale e prospettive. Atti del 2° Convegno del NGTGS. CNR, Roma, p. 255-279;
- Crippa B. (1990): Esempi in ambito geodetico e geodinamico. In: L. Mussio (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 6. CLUP, Milano, p. 138-183;
- Crippa B. (1996): Effetto delle correlazioni nella compensazione delle misure eseguite sulla Base di Bergamo per distanziometri elettro-ottici. In: Boll. di Geodesia e Scienze Affini, n. 3/96;
- Crippa B., Mussio L. (1990a): Approccio non-deterministico alla costruzione di un modello digitale delle altezze - parte I. In: L. Mussio (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 6. CLUP, Milano, p. 6-48;
- Crippa B., Mussio L. (1990b): Approccio non-deterministico alla costruzione di un modello digitale delle altezze - parte II. In: L. Mussio (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 6. CLUP, Milano, p. 49-91;
- Giussani A., Mussio L. (1981a): Trattamento preliminare delle misure eseguite per la taratura della base di Bergamo per distanziometri elettronici. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 2. CLUP, Milano, p. 74-90;
- Giussani A., Mussio L. (1981b): Analisi dei risultati della compensazione delle misure eseguite per la taratura della base di Bergamo per distanziometri elettronici. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 2. CLUP, Milano, p. 109-134;
- Monti C., Mussio L. (1983): Esempio di compensazione plano-altimetrica per la costruzione di carte a grandissima scala. *Boll. della SIFET*, n. 1, 1983;
- Mussio L. (1981): Il programma di calcolo della taratura della base di Bergamo per distanziometri elettronici e la compensazione delle misure eseguite. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 2. CLUP, Milano, p. 92-108;
- Mussio L. (1984): Il metodo della collocazione minimi quadrati e le sue applicazioni per l'analisi statistica dei risultati delle compensazioni. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia Topografia e Fotogrammetria*, vol 4, CLUP, Milano, p. 305-338;

Inoltre riprendendo un'osservazione precedente, occorre rilevare come tutta la trattazione svolta sia stata poco geodetica, da un punto di vista classico. Tutto ciò è certamente vero ed il presente lavoro non vuole certamente costituire un testo base per lo studio della geodesia, ma mettere chiaramente in evidenza come la geodesia (insieme alla cartografia ed accanto all'astronomia) abbia contribuito, da sempre, a formare parti rilevanti della matematica applicata e della statistica e come queste stesse parti abbiano poi vissuto di vita propria, dando importanti sostegni alla formazione, allo sviluppo ed al consolidamento di altre scienze e/o altre tecniche, vicine e più lontane. Allora la bibliografia riportata è a piena testimonianza di una nobilissima e molto antica tradizione anche italiana.

2. Schiavoni F. (1880): Principi di Geodesia. Stabilimento tipografico dell'Unione, Napoli.
3. Pucci E. (1883): Fondamenti di Geodesia. Vol. I e II. Ulrico Hoepli, Milano.
4. Jadanza N. (1895): Elementi di Geodesia. Tip. lit. CV. Giorgis, Torino.
5. Reina V. (1901): Corso di Geodesia. A cura di C. De Caroli e D. Benedetti. Università degli Studi di Roma – La Sapienza, Roma.
6. Ciconetti G. (1927): Geodesia e Topografia. Stabilimento tipo – litografico del Genio Civile, Roma.
7. Pizzetti P. (1928): Trattato di Geodesia teoretica. Nicola Zanichelli, Bologna.
8. Cassinis G. (1938): Lezioni di Topografia con elementi di Geodesia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
9. Boaga G. (1943): Elementi di Geodesia e Topografia. CEDAM – Casa Editrice Dott. Antonio Milani, Padova.
10. Cassinis G. (1955): Complementi di Topografia e Geodesia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
11. Solaini L. (1956): Topografia. Libreria Editrice Politecnica – Cesare Tamburini, Milano.
12. Marussi A. (1957): Corso di Geodesia. Università degli Studi di Trieste, Trieste.
13. Dore P. (1960): Geodesia e Topografia. Casa Editrice del Prof. Riccardo Pàdron, Bologna.
14. Aquilina C.F. (1963): Lezioni di topografia. CEDAM – Casa Editrice Dott. Antonio Milani, Padova.
15. Mazzon C (1970): Lezioni di Geodesia. Istituto Idrografico della Marina, Genova.
16. Inghilleri G. (1974): Topografia Generale, UTET, Torino.
17. Cunietti M. (1977): Le misure e il loro trattamento. CLUP, Milano.
18. Birardi G. (1978): Corso di Topografia. Pitagora Editrice, Bologna.
19. Folloni G. (1982): Principi di Topografia. Ed. Patron, Bologna.
20. Tomelleri V., et al. (1991): Algoritmi Topografici Unificati. Edizioni Metria, Padova.

#### NOTA AGGIUNTIVA

L'alta dignità di un titolo, riferito alla nobile scienza della Geodesia, invita a riflettere come la Terra sia una sola e pertanto ad essa sia legata l'avventura umana. Allora è un compito dell'umanità intera preservare e custodire la Terra, salvaguardando e sostenendo insieme i diritti attivi e passivi delle genti e delle persone.

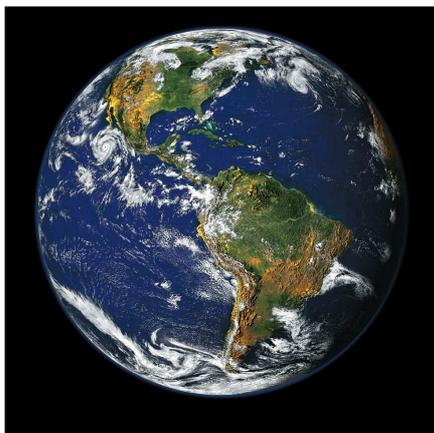


Fig. N.1 – La Terra vista dallo spazio