

CARTOGRAFIA INFORMATICA

Luigi Mussio
Politecnico di Milano – DICA
Piazza L. da Vinci, 32 – 20133 Milano
Tel. 02-2399-6501, Fax. 02-2399-6602
e-mail luigi.mussio@polimi.it

RIASSUNTO

La cartografia informatica è una branca, almeno parzialmente, ancora in formazione delle discipline del rilevamento che comprende certamente i SIT (sistemi informativi territoriali), i DSM (modelli digitali di superficie) e le mappe digitali con le loro trasformazioni di coordinate. Tutto ciò dà particolare rilevanza al trattamento statistico, numerico ed informatico dei dati geomatici (geodetici e cartografici), dei metadati (sull'accuratezza, precisione ed affidabilità dei dati stessi) e delle osservazioni che li hanno generati (rilevate o telerilevate, oppure d'archivio), costituendo così un interessante esempio di statistica applicata.

I INTRODUZIONE E PRINCIPALI STRUTTURE VETTORIALI E RASTER

La raccolta e l'organizzazione dei dati, come pure il loro aggiornamento e la loro manutenzione, costituiscono una parte fondamentale di un **sistema informativo a referenza spaziale**. Una metodologia di implementazione, facente uso di **strutture dati vettoriali**, percorre quattro livelli di modellazione:

- esterno;
- concettuale;
- logico;
- fisico (informatico).

Il **modello esterno** consiste nella descrizione, in linguaggio naturale, delle entità coinvolte, secondo diversi i punti di vista; conseguentemente si avranno più modelli esterni. Il **modello concettuale** corrisponde alla sintesi di tutti i modelli esterni; saranno allora necessarie opportune procedure per passare da una geometria ad un'altra, oppure si sceglierà un solo modello geometrico nella struttura dati e si trasformeranno i modelli esterni secondo la geometria scelta. Il modello concettuale è un'astrazione della realtà (usualmente descritta secondo l'approccio entità – relazione), ovvero una rappresentazione schematica dei fenomeni e delle relazioni in esame, appropriata per implementazioni logiche diverse. Il **modello logico**, legandosi inevitabilmente alla piattaforma hardware impiegata, organizza i dati secondo un'opportuna struttura:

- tabellare;
- gerarchica;
- reticolare;
- relazionale (o altro).

In questa fase, le proprietà delle basi di dati vengono specificate, procedendo alla creazione di un dizionario, ovvero un insieme di definizioni delle proprietà dei dati quali, ad es., i tipi di dati, i loro nomi, i valori. Infine il **modello fisico** è l'implementazione, a livello informatico, delle basi di dati e delle loro strutture ammissibili.

La **struttura tabellare** è la più semplice struttura dati, in essa le righe rappresentano le entità e le colonne gli attributi alfanumerici associati alle entità. L'insieme delle entità singole costituisce un'entità generale: si osservi come la suddivisione in entità non sia univoca, ma dipenda dalla modellazione dei fenomeni. Questa struttura non è molto efficiente quando si hanno differenti livelli di aggregazione dati, oppure situazioni complesse con molte entità. D'altra parte, quando certi attributi sono associati solo ad alcune entità, si possono separare le entità in più tabelle, identificandone di nuove e più articolate, dotate di attributi propri e messe in relazione tramite particolari attributi.

Pertanto la **struttura relazionale**, tramite specifici attributi delle entità (voci particolari con funzione di identificatore di entità singole e puntatore alle tabelle contenenti le relazioni entità attributi delle stesse), rende possibile il legame tra le entità stesse. Altri tipi di struttura dati consistono nell'organizzare i dati in una struttura ad albero (**struttura gerarchica**), oppure in una struttura a grafo (**struttura reticolare**) eventualmente in forme miste tipo albero e grafo. Il vantaggio principale di una struttura dati gerarchica è la sua semplicità (in essa, le relazioni presenti sono tutte esplicitate), mentre la definizione di sole relazioni esplicite (uno ad uno, uno ad molti) esclude altre possibili relazioni incrociate. Un modo per ovviare alla rigidità imposta dalla struttura gerarchica è l'utilizzo di una struttura a grafo o mista, dove le relazioni tra le entità sono, in generale, di tipo molti a molti.

Da ultimo, si noti come l'organizzazione dei dati a referenza spaziale incrementi notevolmente la complessità delle strutture dati poiché, introducendo la referenza spaziale per le entità, gli attributi relativi alla posizione spaziale delle entità stesse, pur essendo formalmente attributi qualsiasi, hanno la particolarità di essere il legame topologico tra le stesse entità spaziali. A mo' di esempio, si considerino le differenti strutture dati costruite su un'area, rappresenta schematicamente in figura I.1.

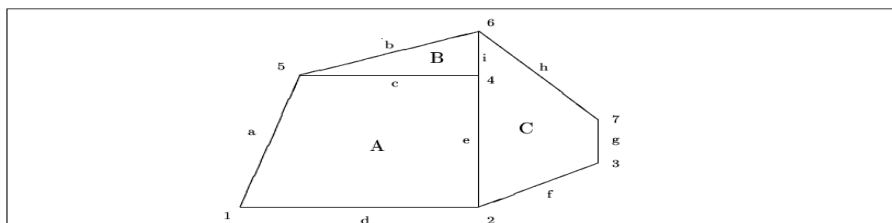


Fig. I.1 – Rappresentazione schematica di un'area con una struttura dati vettoriale

Le entità in esame sono l'area in esame e le primitive geometriche: superficie, linea e punto. L'organizzazione dei dati in un'unica tabella è omessa per motivi brevità, ma presenta evidenti limiti di praticità operativa. Un'organizzazione dati più articolata prevede la divisione in tabelle delle entità: area, superfici, linee e punti (tab. I.1). Queste quattro tabelle contengono i dati di maggior interesse delle singole entità prescelte (area, superfici, linee e punti), tuttavia esse sono incomplete, poiché mancano le relazioni topologiche tra le entità. La struttura dati gerarchica offre la possibilità di esplicitare alcune relazioni topologiche tra entità.

Una possibile struttura dei dati gerarchica, mostrata in tabella I.2, è rappresentata mediante un albero la cui radice è costituita dall'entità area e dove i successivi livelli sono occupati dalle entità superfici, linee e punti. L'ordine gerarchico, di disposizione delle entità all'interno della struttura, determina i possibili utilizzi dei dati.

Ovviamente è possibile costruire più di una struttura dati gerarchica, a partire dalle stesse entità, esplicitando in modi diversi la topologia. La struttura dati gerarchica risulta abbastanza idonea quando le relazioni tra le entità sono del tipo uno a molti.

Al contrario, quando si presentano relazioni del tipo molti a molti, non è possibile implementare tali relazioni in una sola struttura dati gerarchica. In questi casi, la struttura dati reticolare offre maggiori potenzialità. Si noti, a riguardo, che la struttura dati reticolare ammette relazioni uno a molti in entrambe le direzioni; cosicché in presenza di una relazione molti a molti è possibile sostituire tale relazione con due relazioni molti a uno ed uno a molti, introducendo una nuova entità intermedia.

AREA	
ID_AREA	nome
I	

SUPERFICI		
ID_sup.	area	tipo
A		
B		
C		

LINEE	
ID_linea	lunghezza
a	
b	
c	
d	
e	
f	
g	
h	
i	

PUNTI		
ID_punto	X	Y
1	0.	0.
2	4.	0.
3	6.	1.
4	4.	3.
5	1.	3.
6	4.	4.
7	6.	2.

Tab. I.1 – Tabelle delle entità: area, superfici, linee e punti

ID_area	ID_linea	ID_punto iniziale	ID_punto finale
A	a	1	5
A	c	5	4
A	e	4	2
A	d	2	1
B	b	5	6
B	i	6	4
B	c	4	5
C	e	2	4
C	i	4	6
C	h	6	7
C	g	7	3
C	f	3	2

ID_AREA	ID_sup.
I	A
I	B
I	C

Tab. I.2 – Tabelle per una struttura dati gerarchica

La tabella I.3 mostra una struttura dati reticolare, dove è esplicitata la relazione del tipo molti a molti tra linee e punti. La struttura dati reticolare è usualmente rappresentata mediante un grafo, dove ai nodi sono associate le entità e ai lati le relazioni topologiche. Questa struttura dati reticolare (detta diretta) collega facilmente le superfici alle linee, inoltre le linee ai punti e viceversa (tramite puntatori rovesci), ma non esplicita la relazione d'appartenenza delle linee alle superfici. D'altra parte, istituendo una relazione di dualità tra superfici e punti (come illustrato in figura I.2), è possibile costruire uno spazio duale dove:

- ❑ le superfici sono i nodi,
- ❑ i punti sono le regioni,

mentre le linee rimangono i lati.

ID_area	ID_linea
A	a
A	c
A	d
A	e
B	b
B	c
B	i
C	e
C	f
C	g
C	h
C	i

ID_linea	ID_punto iniziale	ID_punto finale
a	1	5
b	5	6
c	4	5
d	1	2
e	2	4
f	2	3
g	3	7
h	6	7
i	4	6

Tab. I.3 – Tabelle per una struttura dati reticolare

Associata a questa rappresentazione duale è possibile introdurre una seconda struttura dati reticolare (tab. I.4), dove è esplicitata la relazione del tipo molti a molti tra linee e superfici, rappresentata mediante un grafo duale. Si noti come questa struttura dati reticolare (detta inversa) collega facilmente punti alle linee, inoltre le linee alle superfici e viceversa (tramite puntatori rovesci), ma non esplicita la relazione d'incidenza delle linee nei punti. L'insieme di parti opportune di entrambe le strutture costituisce un'interessante struttura dati relazionale (tab. I.5), dove tanto la relazione d'appartenenza delle linee alle superfici, quanto la relazione d'incidenza delle linee nei punti sono esplicitate.

Si noti come semplici operazioni di ordinamento e ricerca binaria permettono di collegare i punti alle linee e le superfici alle linee (tramite voci con funzione di identificatore e puntatore), omettendo in entrambi i casi la costruzione dei puntatori rovesci. Si noti altresì come detta omissione sia pagata in termini di tempo per l'esecuzione delle operazioni di ordinamento e ricerca binaria.

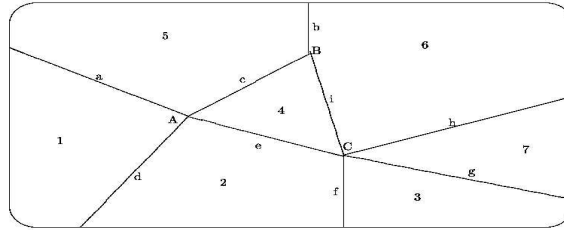


Fig. I.2 – Rappresentazione nello spazio duale di una struttura dati vettoriale

Come evidente la struttura dati relazionale utilizza direttamente i valori degli attributi ID, aventi funzioni di identificatore di entità singole, per puntare tramite queste voci alle tabelle degli attributi di queste entità. La **costruzione del modello concettuale** utilizza strumenti formali, quali l'approccio entità relazioni le cui componenti di base sono:

- le entità e le classi di entità (intese come entità collettive) con i loro attributi;
- le relazioni tra entità o classi di entità e le loro cardinalità (eventuali attributi delle relazioni).

ID_spazio	ID_region e
S	1
S	2
S	3
S	4
S	5
S	6
S	7

ID_region e	ID_lato
1	a
1	d
1	esterno
2	d
2	e
2	f
2	esterno
3	f
3	g
3	esterno
4	c
4	e
4	i

<i>segue</i>	
ID_region e	ID_lato
5	a
5	b
5	c
5	esterno
6	b
6	h
6	i
6	esterno
7	g
7	h
7	esterno

Tab. I.4 – Tabelle relative al grafo duale

Nel caso di oggetti a referenza spaziale, le entità geometriche fondamentali i punti, le linee e le superfici, mentre le relazioni sono di appartenenza, attraversamento, ecc. (spesso con inevitabili ridondanze d'informazione). La successiva **costruzione del modello logico** comporta essenzialmente la preparazione di tabelle entità – relazioni, secondo i dettami delle strutture dati precedentemente illustrate.

ID_linea	ID_punto iniziale	ID_punto finale	ID_area destra	ID_area sinistra
a	1	5	A	esterno
b	5	6	B	esterno
c	4	5	B	A
d	2	1	A	esterno
e	2	4	C	A
f	3	2	C	esterno
g	7	3	C	esterno
h	6	7	C	esterno
i	4	6	C	B

Tab. I.5 – Tabella per una struttura dati relazionale

La **struttura dati cellulare o raster** si differenzia in maniera sostanziale per modalità d'acquisizione e tipo di trattamento. Nella sua forma più semplice, questa struttura dati è composta da una griglia regolare, a maglia quadrata, in cui il dato elementare è costituito da una singola cella della griglia. La struttura dati raster può avere anche maglie triangolari o esagonali. Tre tipi di regole sono adottate per la classificazione delle celle:

- ❑ regole di dominanza, ad una cella viene assegnato l'attributo dell'entità preponderante all'interno della cella stessa;
- ❑ regole di importanza, ad una cella viene assegnato l'attributo dell'entità ritenuta più importante;
- ❑ regole di centro, ad una cella viene assegnato l'attributo dell'entità ubicata al centro della cella.

La risoluzione rispetto allo spazio, piuttosto che alle entità, produce alcuni problemi inerenti la precisione con la quale le entità sono referenziate spazialmente. Inoltre quando si codificano entità puntuali e lineari, alcune relazioni topologiche e geometriche (adiacenza, intersezione, inclusione, ecc.) possono risultare falsate ed alcune entità, con dimensione inferiore alla risoluzione spaziale (dimensione della cella), possono sparire. Per poter identificare con precisione punti e/o linee caratteristiche è richiesta un'altissima risoluzione, fatto che comporta un'enorme quantità di dati, spesso ridondanti rispetto la maggior parte degli attributi. La più semplice modalità di organizzazione dati di una struttura dati raster consiste in una matrice in cui ogni cella, individuata dai corrispondenti valori di riga e colonna, contiene un numero rappresentante il tipo, oppure un valore dell'attributo associato alla cella od un puntatore ad una tabella di attributi (fig. I.3). In ogni caso, ciascuna cella della matrice contiene solo un singolo numero e, se si hanno più attributi, bisogna utilizzare più matrici, associando ad ogni singola matrice un particolare attributo.

Per ridurre al minimo la ridondanza nei dati, si può costruire una struttura dati raster con una tecnica della **piramide di mappe e/o immagini detta quadrees** (fig. I.4). Questa tecnica consiste nel costruire una struttura ad albero i cui livelli esprimono il grado di risoluzione. Ad ogni livello, si suddivide in quattro quadranti il quadrante del livello precedente; se un quadrante presenta un certo grado di omogeneità, allora

il quadrante stesso non viene ulteriormente suddiviso; altrimenti si prosegue suddividendolo in quattro quadranti, dando origine ad un livello successivo. In ogni caso, la procedura termina quando si raggiunge il livello in cui il quadrante è costituito dalla singola cella. L'enorme vantaggio di questa modalità consiste nella possibilità di archiviare l'informazione raccolta con soli tre numeri (riga, colonna e livello), oltre allo stato del nodo (intermedio o terminale con attributo); il suo maggior svantaggio è la non invarianza per traslazione.

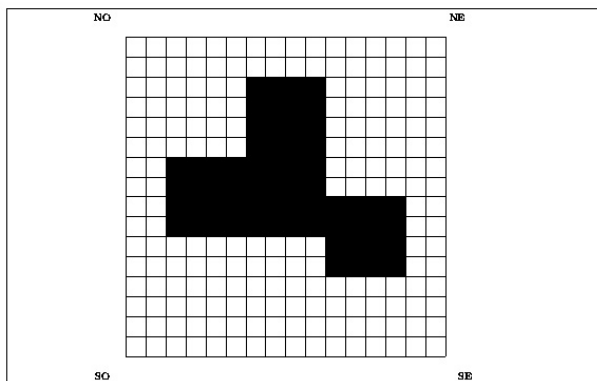


Fig.I.3 – Rappresentazione schematica di un'area con una struttura da raster

Esistono altre **tecniche di compressione** delle strutture dati raster, diversificate per modalità ed obiettivi. Per la memorizzazione dei contorni si può utilizzare il **metodo chain codes** (fig. I.5). Questo metodo consente di ricostruire il contorno di una superficie, a partire da un'origine, mediante una serie di numeri che esprimono la direzione cardinale di un vettore unitario, ad es., verso destra: 0=00, verso l'alto: 1=01, verso sinistra: 2=10, verso il basso: 3=11 (si veda, a riguardo, la figura I.5).

Il **metodo run-length codes** (fig. I.6) memorizza, riga per riga, gli indici di colonna delle prime ed ultime celle di sottorighe omogenee all'interno di una riga, come mostrato nella tabella I.6.

Un'estensione bidimensionale è fornita dal **metodo block codes** (fig. I.7) che memorizzare in modo conveniente le superfici. In questo caso, la superficie è suddivisa in blocchi quadrati / o rettangolari (o a forma di parallelogramma qualsiasi), contenuti all'interno della superficie stessa; per ogni quadrato / o rettangolo (o un parallelogramma) sono specificati un'origine: il centro, oppure e meglio una delle quattro celle ai vertici, e la dimensione del lato / o le dimensioni dei lati (oltre ad un angolo di scorrimento nel caso di un parallelogramma), come mostrato sempre nella tabella I.6.

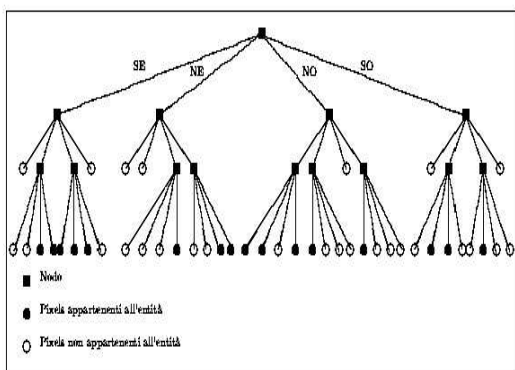


Fig. I.4 – Struttura a quadrees

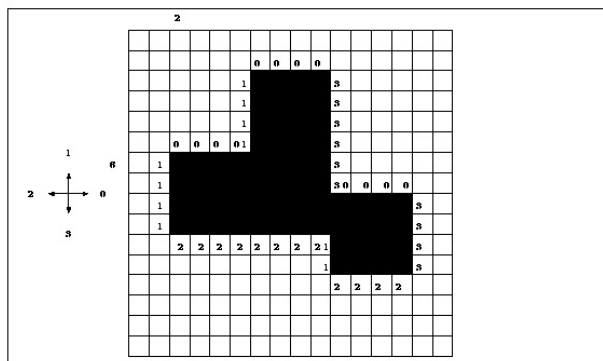


Fig. I.5 – Il metodo chain codes

Forme più complesse sono possibili, ma richiedono maggiore informazione per la loro completa definizione.

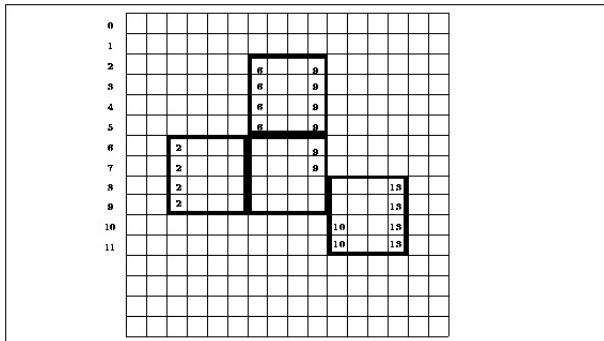


Fig. 1.6 – Il metodo *run-length codes*

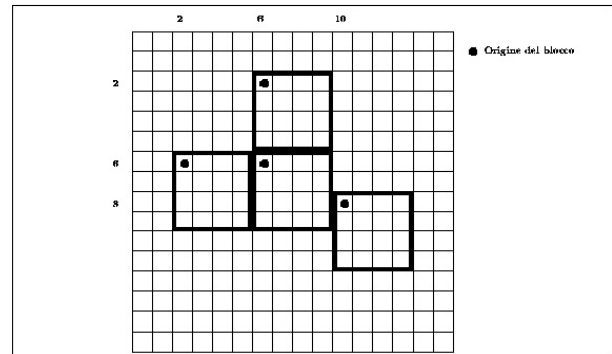


Fig. 1.7 – Il metodo *block codes*

RUN-LENGTH CODES	
Riga	Colonne
2	6, 9
3	6, 9
4	6, 9
5	6, 9
6	2, 9
7	2, 9
8	2, 13
9	2, 13
10	10, 13
11	10, 13

BLOCK CODES	
Origine	Lato
6,2	4
2,6	4
6,6	4
8,10	4

Tab. 1.6 – Tabella di una struttura dati raster secondo il metodo *run-length codes* e tabella della struttura dati raster secondo il metodo *block codes*

La struttura dati vettoriale nello spazio 3D, pur con un maggior grado di complessità, conformemente a quanto avviene nello spazio 2D, adotta un'approssimazione lineare che fa uso esclusivo di *poliedri*, *poligoni*, *segmenti* e *punti*. Di conseguenza i corpi sono poliedri o vengono scomposti in poliedri; le figure sono poligoni o vengono scomposti in poligoni; le linee sono segmenti o vengono scomposte in segmenti. Pertanto le relazioni topologiche fra gli elementi costitutivi dello spazio 3D evidenziano:

- ❑ un *punto* con una relazione *uno a molti* con i segmenti, i poligoni ed i poliedri;
- ❑ un *segmento* con una relazione *uno a due* con i punti, *uno a molti* con i poligoni e i poliedri;
- ❑ un *poligono* con una relazione *uno a molti* con i punti ed i segmenti, *uno a due* con i poliedri;
- ❑ un *poliedro* con una relazione *uno a molti* con i punti, i segmenti ed i poligoni.

Infatti un poliedro è racchiuso da una superficie composta da poligoni, delimitati da segmenti aventi ciascuno inizio e termine in un punto. Un poligono è delimitato da segmenti aventi ciascuno inizio e termine in un punto, ma trova solo un poliedro alla sua destra e solo un poliedro alla sua sinistra. Un segmento può essere comune a tanti poligoni ed a tanti poliedri, ma ha inizio solo da un punto ed ha termine solo in un punto. Un punto può appartenere alla superficie di diversi poliedri, essere luogo di incontro di diversi poligoni e di diversi segmenti.

Utilizzando la teoria dei grafi, le nozioni di nodi e di archi possono essere vantaggiosamente usate e direttamente collegate ai punti e ai segmenti. Inoltre facendo uso del concetto di dualità (che nel piano permette di scambiare punti, segmenti e poligoni con regioni, archi e nodi) è possibile collegare i poliedri a nodi (duali) e i poligoni ad archi (duali). A differenza di quanto avviene nello spazio 2D la presenza di due famiglie di archi ed archi duali, non semanticamente identici, ma riferiti a due entità distinte (i segmenti ed i poligoni) richiede la definizione di una connessione incrociata (*cross - connessione*) fra le due famiglie.

Una *tabella di incidenza* presenta l'insieme dei segmenti incidenti in un punto. La *tabella di incidenza trasposta*, di più semplice realizzazione e pertanto primaria, riporta per ogni segmento i due punti iniziale e finale. Inoltre una *tabella di adiacenza* riporta per ogni poligono i due poliedri a sinistra e a destra. Questa tabella è di semplice realizzazione e pertanto primaria, mentre la sua trasposta presenta l'insieme dei poligoni che racchiudono un poliedro.

La tabella di *cross - connessione* mette in relazione segmenti e poligoni. Essa contiene una duplice informazione: l'insieme dei segmenti che delimitano un poligono e l'insieme dei poligoni che incidono in un segmento (si veda, a riguardo, la figura I.8). Con maggiore rigore geometrico questi poligoni costituiscono, a due a due, le facce di angoli diedri che hanno tutti per costola il segmento comune. L'operazione di trasposizione permette di passare da un aspetto all'altro dell'informazione contenuta. A rigore nessuna può essere considerata di facile realizzazione ed entrambe sono primarie.

D'altra parte l'operazione di trasposizione evita inutili ridondanze e, tenuto conto che i segmenti sono sempre in numero maggiore dei poligoni, si preferisce una elencazione segmenti - poligoni incidenti rispetto ad una poligoni - segmenti perimetrali. Infine si segnala la possibilità di memorizzare la tabella di *cross - connessione* in forma vettoriale, eliminando gli zero contenuti ovvero le non connessioni fra segmenti e poligoni. Ovviamente non si ha alcuna perdita di informazione, mentre il guadagno è spesso notevole essendo poche le connessioni fra segmenti e poligoni quando si voglia studiare un oggetto esteso e complesso.

Data la vettorizzazione, il numero di connessioni per ogni segmento dovrà essere contato. Le somme parziali progressive di detti contatori costituiscono i puntatori al primo termine di ogni parte del vettore relativa ad un diverso segmento. Poiché il primo elemento della prima parte è posto all'inizio (posizione numero 1) del suddetto vettore, l'inesistente elemento che lo precede a posizione numero zero viene posto quale inizio dei puntatori completando la struttura degli stessi.

La **struttura dati cellulare o raster** è composta, nella sua forma più semplice, da una griglia spaziale regolare, a maglia cubica, in cui il dato elementare è costituito da una singola cella della griglia. La struttura dati raster può avere anche maglie tetraedriche. Per ridurre al minimo la ridondanza nei dati, si può costruire una struttura dati raster con una tecnica della **piramide di mappe e/o immagini generalizzata** detta **octries** (ad ogni livello di una struttura ad albero, se necessario, si suddivide in otto ottanti l'ottante del livello precedente). Esistono altre **tecniche di compressione** delle strutture dati raster, diversificate per modalità

ed obiettivi. Il **metodo run-length codes generalizzato** memorizza, in ogni piano in cui si è suddiviso il corpo, riga per riga, gli indici di colonna delle prime ed ultime celle di sottorighe omogenee all'interno di una riga. Un'estensione tridimensionale è fornita dal **metodo block codes generalizzato** che memorizza in modo conveniente e molto vantaggioso i corpi. In questo caso, un corpo è suddiviso in blocchi cubici od a parallelepipedo, contenuti all'interno del corpo stesso; per ogni cubo o parallelepipedo sono specificati un'origine: il centro, oppure e meglio una delle otto celle ai vertici, e la dimensione del lato o le dimensioni dei lati.

Anche in questo caso, forme più complesse sono possibili, ma richiedono ovviamente maggiore informazione per la loro completa definizione.

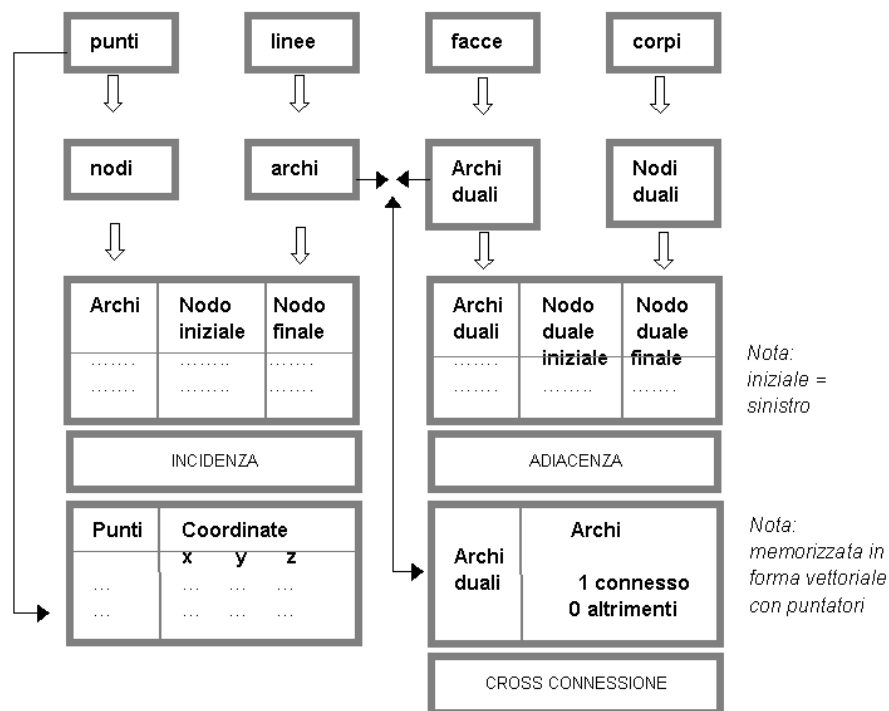


Fig. I.8 - Relazioni topologiche fra gli elementi costitutivi dell'approssimazione lineare nello spazio 3D.

Il sistemi dinamici o tempo-varianti possono essere classificati in:

- ❑ costanti, quando i processi non subiscono apprezzabili variazioni (ad eccezione della casuale volatilità);
- ❑ periodici o quasi-periodici, se si identificano ciclicità di comportamento nelle leggi che li regolano;
- ❑ a-periodici, se i processi si manifestano senza una precisa cadenza temporale (stagionalità);
- ❑ misti, quando processi a-periodici presentano, all'interno dell'intervallo d'osservazione, certe periodicità;
- ❑ di rottura, per processi generalmente legati all'accadere di eventi rari.

Le quattro categorie di tempo adottate sono legate rispettivamente:

- ❑ alla modifica subita da un'entità (tempo logico), ovvero alla data in cui la modifica si è verificata nel mondo reale;

- all'accertamento mediante operazioni di misura (tempo reale), ovvero alla data in cui si è accertata la modifica di una entità;
- ad un'operazione di simulazione (tempo virtuale), ovvero alla data generata da detta operazione di simulazione;
- alla registrazione di una modifica subita nella base di dati (tempo fisico), ovvero alla data di registrazione della modifica stessa.

Gli oggetti tempo-varianti devono cambiare la loro rappresentazione attraverso operazioni di aggiornamento che consistono nell'aggiungere un dato a quello precedentemente acquisito, tenendo conto della frequenza d'osservazione, delle modalità di campionamento e delle eventuali grandezze derivate. Un oggetto può subire una variazione della sua geometria e/dei suoi tematismi, e si possono verificare anche cambi nella topologia. Nella struttura dati formale, queste variazioni sono realizzate con la disattivazione di lati e nodi, e tabelle che rappresentano la vecchia situazione e l'inserimento ciò che rappresenta la nuova situazione. Si noti come l'identificatore (ovvero un codice senza alcun contenuto topologico, geometrico o tematico) dell'oggetto rimanga sempre invariato.

L'aspetto dinamico influenza le usuali operazioni nella base di dati. Per definizione, in una struttura dati dinamica non è possibile cancellare nessun dato; infatti tale struttura deve conservare memoria delle variazioni subite dalle entità. La soluzione più semplice è la completa replica delle basi di dati. Un'altra soluzione, altrettanto semplice, ma più vantaggiosa, è aggiungere due attributi alle tabelle: la data ed un indicatore di abilitazione. In tal modo, una riga di una tabella ha associato due attributi che specificano la data di validità e l'abilitazione dei dati contenuti. Evidentemente questa soluzione ha il grosso limite di rappresentare solo stati discreti, mentre un'alternativa, notevolmente più complessa, fa uso di modelli continui di evoluzione del comportamento dei fenomeni oggetto di studio.

II RELAZIONI TOPOLOGICHE E GEOMETRICHE TRA OGGETTI (APPROCCIO BASATO SULLA TEORIA DEI GRUPPI DI SIMMETRIE)

La modellazione ad oggetti (eventualmente dinamica) è uno strumento innovativo e tecnologicamente avanzato, per lo studio di fenomeni e delle loro dinamiche evolutive. L'avvento dell'elettronica e dell'informatica hanno reso disponibili nuove potenzialità, quali ad esempio, sistemi per la realizzazione e gestione di basi di dati e capaci di supportare decisioni, anche con specifico riferimento alla realizzazione e gestione di modellazioni ad oggetti (a referenza spaziale), dinamiche e non.

La modellazione ad oggetti permette, fra l'altro, le più ampie modalità di rappresentazione di corpi e figure, per loro studi ed analisi. Le relazioni fra elementi caratteristici (punti, linee, superfici e corpi 3D) determinano gli ambiti di validità della suddetta modellazione ed i loro insiemi hanno corrispondenze con i gruppi di simmetrie negli spazi monodimensionali, bidimensionali e tridimensionali propri dell'algebra formale.

1. Modellazione ad oggetti

Una metodologia per la modellazione ad oggetti percorre quattro livelli esterno, concettuale, logico e fisico. Queste quattro fasi rispecchiano un approccio dall'alto verso il basso, procedendo nella modellazione ad oggetti per raffinamenti successivi. Di fondamentale importanza è comunque l'aggiornamento della struttura dati (inserimento o cancellazione di tabelle e/o attributi relativi alle entità, ai loro attributi e/o relazioni).

- ❑ Il livello esterno consiste nel descrivere, in linguaggio naturale, le entità coinvolte. Poiché si hanno diversi punti di vista e si utilizzano talvolta diverse geometrie, si avranno più modelli esterni che, d'altra parte, corrispondono a differenti scopi e necessità.
- ❑ Il livello concettuale corrisponde alla sintesi di tutti i modelli esterni. Purtroppo è difficile conglobare i modelli esterni in un unico modello concettuale e, in particolare, per quanto riguarda l'aspetto geometrico. Pertanto saranno necessarie opportune procedure per passare da una geometria ad un'altra, oppure si sceglierà un solo modello geometrico e si trasformeranno i modelli esterni secondo la geometria scelta. Sebbene il modello concettuale possa essere descritto tramite frasi in linguaggio naturale, usualmente si preferisce utilizzare gli strumenti formali dell'approccio entità - relazione, per passare, in modo semplice, al livello successivo.
- ❑ Il modello logico corrisponde alle diverse implementazioni del modello concettuale, ovvero organizza i dati secondo le strutture dati gerarchica, reticolare, relazionale od altro (ad esempio, orientate ad oggetti). In questa fase, le basi di dati sono costruite mediante l'uso di stringhe e tabelle, mentre le loro proprietà sono specificate procedendo alla creazione di un dizionario delle entità coinvolte con gli attributi, le relazioni ed eventualmente gli attributi delle relazioni.
- ❑ Il modello fisico è l'implementazione delle basi di dati e delle loro strutture. Nel modello fisico sono esplicitati i puntatori e le informazioni necessarie per accedere e gestire concretamente i dati.

Il paradigma ad oggetti fornisce un alto livello di astrazione dalla struttura fisica dei dati; esso è capace di modellare il sistema in base alle definizioni dei dati (oggetti), piuttosto che operare su concetti di attributi e relazioni, in quanto entrambi sono memorizzati come parte integrante dell'oggetto stesso.

La rappresentazione mediante oggetti consente la creazione di oggetti complessi, come poligoni, poliedri, ecc., dove questi ultimi vengono concepiti e manipolati come singoli oggetti (pur essendo oggetti di oggetti). Questa caratteristica generale del paradigma ad oggetti elimina la necessità di esplicitare tutte le caratteristiche geografiche e semantiche dell'oggetto.

Importanti caratteristiche dell'approccio ad oggetti sono la facilità di descrivere nuovi tipi di dati, la possibilità di definire operazioni su nuovi oggetti e la possibilità di strutturare gli oggetti in modo gerarchico. In questo ambito, particolare interesse assumono organizzazioni particolari (dette estensioni) capaci di esportare dati ed importare risultati, dove nella fase esterna si possono eseguire operazioni, di alta specificazione e qualificazione, che per dimensione e complessità difficilmente possono trovarsi all'interno del sistema.

Le ricerche sulla modellazione ad oggetti si sono indirizzate secondo due approcci differenti: aggiungere, ad una banca di dati relazionale, tutte le funzioni tipiche del paradigma ad oggetti, oppure costruire un nuovo sistema indipendente. Il primo approccio risulta più robusto, poiché le banche dati sono un prodotto maturo, mentre il secondo approccio è ancora oggetto della ricerca scientifica e tecnologica. In entrambi i casi, l'obiettivo principale consiste nel rendere disponibili procedure di semplice utilizzo, per trattare dati a referenza spaziale e/o non spazialmente distribuiti, tenendo conto anche del loro eventuale comportamento dinamico se i dati sono variabili nel tempo.

Le procedure per il trattamento dei dati tendono a risolvere i principali problemi di gestione dei dati: memorizzazione dei dati (archiviazione) e reperimento delle informazioni (interrogazione). In particolare, per la gestione dei dati a referenza spaziale, è necessario creare nuove entità (poligoni, poliedri, ecc.) e definire metodi di manipolazione sulle entità precedentemente definite (distanza, incidenza, adiacenza, ecc.). Proprio

in questo contesto, si svolgono le operazioni di georeferenziazione (trasformazione, proiezione, centratura, ecc.), rappresentazione (interpolazione, ricostruzione, descrizione, ecc.) e selezione (classificazione, aggregazione, generalizzazione, ecc.), tipiche della manipolazione dell'informazione spaziale o spazio – temporale necessaria. Tuttavia poiché alcuni problemi di difficile soluzione, posti dai modelli relazionali, non sono ancora completamente risolti dai modelli orientati ad oggetti, attualmente un sistema ibrido sembra fornire la migliore risposta per ottenere una struttura dati fisica robusta (relazionale) e una struttura descrittiva logica flessibile (orientata ad oggetti).

Un oggetto può essere descritto come un'entità concettuale (a sua volta, definibile mediante il contesto in cui è immerso) che possiede uno stato rappresentato dai valori di variabili locali e da un insieme di operazioni o metodi operanti sull'oggetto. Ogni singolo oggetto appartiene ad una classe che definisce il tipo di oggetto. Le classi possono avere variabili proprie che descrivono le caratteristiche della classe come un insieme unico. Se una o più classi hanno in comune variabili e metodi, allora è possibile definire una super – classe che raggruppa le variabili ed i metodi comuni alle classi. Per convenzione, la super – classe oggetto universale (radice del sistema) costituisce il primo livello di una struttura a livelli gerarchica radicata che descrive il sistema. Un'interessante struttura dati orientata ad oggetti può essere ottenuta, introducendo un legame fra oggetti a referenza spaziale e loro caratteristiche morfologiche, come le aree con un ben definito confine, gli elementi lineari od i punti isolati. Gli oggetti spaziali sono allora identificati e descritti mediante le loro caratteristiche geometriche e tematiche. Questa osservazione porta ad una prima richiesta per costruire la struttura formale dei dati:

- ad ogni oggetto deve essere associato un identificatore (nome o numero);
- ciascun identificatore deve possedere un collegamento agli attributi dell'oggetto.

Gli oggetti possono essere classificati e raggruppati in classi (insieme di oggetti), costituiti attraverso aspetti geometrici o tematici comuni ed identificati tramite un nome; la lista degli attributi di una classe fornisce i nomi degli attributi i cui valori sono assunti dagli oggetti. Questo significa che ogni oggetto, appartenente ad una classe, ha una lista contenente un valore per ogni attributo della lista degli attributi della classe stessa. Attributi comuni a più classi danno vita ad una super classe (classe di classi), provvista di una sua lista degli attributi i cui valori sono assunti dalle classi. Come già detto in precedenza, la costruzione di una super classe introduce una gerarchia nella struttura a livelli delle classi.

Al livello più alto, si trova la super classe con la sua lista degli attributi. Ai livelli inferiori, le liste degli attributi con i relativi valori sono divise, poiché alcuni attributi sono valutati a livello intermedio di classe, altri al successivo livello di oggetto. A livello intermedio, si trova la classe la cui lista degli attributi è divisa in due parti: la prima comprende i valori degli attributi associati alla super classe, la seconda la lista degli attributi della classe. All'ultimo livello, si trova l'oggetto i cui valori degli attributi sono valutati tramite le liste degli attributi della super classe o della classe di appartenenza. La valutazione di un attributo, a livello di classe, implica che tutti gli oggetti appartenenti a quella classe abbiano lo stesso valore per quel determinato attributo. Inoltre è possibile introdurre altri livelli gerarchici; ogni livello eredita la lista degli attributi del livello superiore e propaga parte della sua lista degli attributi al livello inferiore.

All'ultimo livello della gerarchia, tutti gli attributi devono essere valutati. Classi di oggetti ed oggetti sono definiti in modo che ogni oggetto appartenga ad una ed una sola classe; questa richiesta è equivalente alla

convenzione in base alla quale le classi devono essere mutuamente esclusive. Gli oggetti possono essere classificati in base alle caratteristiche geometriche o tematiche. Per esplicitare le relazioni tra i due tipi di classificazione si stabilisce la convenzione secondo la quale una classe contiene oggetti di un solo tipo.

Talvolta questa convenzione sembra essere troppo restrittiva; tuttavia essa consente la costruzione di una struttura dati semplice e trasparente. Per i casi in cui tale convenzione è veramente troppo restrittiva, si può trovare una soluzione costruendo oggetti complessi. La convenzione in base alla quale una classe contiene oggetti di un solo tipo implica una relazione molti a uno tra oggetti e classi.

La geometria di una struttura dati descrive gli oggetti complessi, mediante le loro caratteristiche geometriche:

- una struttura puntuale, mediante un oggetto appartenente alla classe dei punti;
- una struttura lineare, mediante un oggetto appartenente alla classe delle linee;
- una struttura bidimensionale, mediante un oggetto appartenente alla classe delle superfici;
- una struttura tridimensionale, mediante un oggetto appartenente alla classe dei corpi 3D.

Per costruire una struttura dati formale è necessario identificare i dati geometrici e le loro relazioni con gli oggetti caratteristici. Esistono molte possibilità per descrivere una struttura dati formale; una soluzione possibile fa uso della teoria dei grafi, consentendo di porre in relazione, uno ad uno, gli elementi tematici con i corrispondenti elementi geometrici, ma soprattutto di conoscere le relazioni topologiche tra i diversi elementi di un oggetto complesso. La rappresentazione dei lati può essere fornita in due modi diversi:

- in forma parametrica, ovvero tramite parametri che definiscono una curva matematica;
- tramite una sequenza di punti connessi da una poligonale, essendo la connessione tra due punti consecutivi un segmento di una linea retta.

La seconda soluzione implica l'introduzione di altri tipi di punti oltre ai nodi; questi nuovi punti contengono solo un'informazione di posizione. In entrambi i casi, si adottano anche le seguenti convenzioni:

- quando un oggetto complesso è analizzato tramite un grafo, tutti i punti, usati per descrivere la sua geometria, sono trattati come nodi, avendo ogni nodo una posizione data dalle coordinate associate al punto corrispondente;
- facendo uso del principio di dualità, tutte le figure piane, derivanti dalla scomposizione di una figura complessa, sono trattate come nodi di un grafo duale, avendo ogni nodo una posizione data dalle coordinate associate al centroide della figura stessa;
- sempre facendo uso del principio di dualità, tutti i corpi 3D, derivati dalla scomposizione di un oggetto solido complesso, sono trattati come nodi di un grafo duale, avendo ogni nodo una posizione data dalle coordinate associate al centroide del corpo stesso;
- tutti i segmenti di linee rette sono rappresentati da lati del grafo ed ogni lato ha un nodo iniziale ed un nodo finale;
- ancora facendo uso del principio di dualità, tutte le superfici nello spazio 3D sono rappresentate da lati di un grafo duale ed ogni lato ha un nodo iniziale ed un nodo finale.

Per evitare ambiguità geometriche, si introducono due ulteriori convenzioni:

- ❑ per ogni coppia di nodi, esiste al più un lato che li connette;
- ❑ i lati non possono intersecarsi nel caso più semplice in cui un grafo sia piano, ovvero per tutti i sottografi piani sia stato possibile scomporre un grafo definito nello spazio 3D.

Il collegamento tra gli elementi geometrici e gli elementi tematici è fatto attraverso identificatori. Il passo successivo, nella definizione di una struttura dati formale, per un oggetto complesso, consiste nell'analisi dei legami tra gli elementi geometrici (nodi, lati) e gli elementi tematici (punti, linee, superfici e corpi 3D caratteristici):

- ❑ il legame tra i punti caratteristici (elementi tematici) ed i nodi (elementi geometrici) è dato semplicemente dall'essere ogni punto rappresentato da un nodo ed uno solo;
- ❑ se un nodo non rappresenta alcun punto caratteristico, un identificativo nullo è usato al posto di quello adottato per un punto caratteristico.

Il legame fra gli altri elementi geometrici e tematici è più complesso ed articolato:

- ❑ un lato può al più essere parte di una linea caratteristica;
- ❑ nel caso in cui un lato non appartenga ad una linea caratteristica, il legame di appartenenza risulta vuoto;
- ❑ nel caso più semplice in cui un grafo sia piano, ovvero per tutti i sottografi piani sia stato possibile scomporre un grafo definito nello spazio 3D, un lato ha sempre un'area caratteristica ed una sola alla sua destra ed un'area caratteristica ed una sola alla sua sinistra;
- ❑ una faccia (ovvero un lato, facendo uso del principio di dualità) può al più essere parte di una superficie caratteristica (ovvero una linea caratteristica, facendo uso del medesimo principio di dualità);
- ❑ nel caso in cui una faccia non appartenga ad una superficie caratteristica, il legame di appartenenza risulta vuoto;
- ❑ facendo nuovamente uso del principio di dualità, una superficie nello spazio 3D ha sempre un corpo 3D caratteristico ed uno solo alla sua destra ed un corpo 3D caratteristico ed uno solo alla sua sinistra;
- ❑ nel caso in cui un lato (o una faccia) siano di frontiera, una delle due superfici caratteristiche (o uno dei due corpi 3D caratteristici) è chiamato esterno;
- ❑ se una linea caratteristica (o una superficie caratteristica) serve da confine tra due superfici caratteristiche (o due corpi 3D caratteristici), allora i lati (o le facce) che appartengono al confine sono parte integrale della linea caratteristica stessa (della superficie caratteristica stessa);
- ❑ se invece un lato (o una faccia) non è parte di una linea caratteristica (o di una superficie caratteristica), oppure non appartiene ad un confine, il lato e l'eventuale linea caratteristica (o la faccia e l'eventuale superficie caratteristica) intersecano una superficie caratteristica (o un corpo 3D caratteristico) ed il legame destra sinistra è riferito alla medesima superficie (o al medesimo corpo 3D).

Un ulteriore sviluppo di una struttura dati formale di un oggetto complesso prevede l'introduzione di due tipi di relazioni topologiche:

- la prima data dalla struttura a grafo
- la seconda dal legame tra gli elementi geometrici e tematici.

Infine nel caso di una modellazione solida ad oggetti, è strettamente necessario stabilire una cross connessione fra lati e facce (o fra linee caratteristiche e superfici caratteristiche), stabilendo così un collegamento topologico fra grafi primari e grafi duali che, diversamente da quanto avviene per i grafi piani (dove il legame è stabilito dai lati, come noto, comuni ad entrambi), sono nello spazio 3D completamente disgiunti (se questo non è scomposto in sottografi piani).

2. Relazioni tra elementi

Gli oggetti, ben individuati e separati fra loro, sono in reciproche relazioni nello spazio in cui sono localizzati. Normalmente per definire questo concetto si utilizzano termini come *a destra od a sinistra di, davanti o dietro a, sopra o sotto a, interno o esterno a, interseca, ecc.*

Nella struttura formale dei dati, già analizzata in precedenza, si sono introdotti due tipi di relazioni topologiche:

- relazioni tra dati geometrici, descritte da grafi (lati e nodi) nelle strutture vettoriali e da celle nelle strutture raster;
- relazioni tra gli oggetti, determinate dalla connessione sia tra gli elementi primari (punti, linee, superfici e corpi) che formano gli oggetti complessi, sia tra gli stessi elementi ed i suddetti oggetti complessi.

Per ogni elemento, al fine di determinarne i limiti di applicazione, sono definite alcune proprietà. A prescindere dai punti per i quali non sono stabilite caratteristiche particolari, le linee e le superfici si ipotizzano continue, aperte (ovvero semplicemente connesse) o chiuse (ovvero non semplicemente connesse, ma con un solo buco) ed i corpi continui e semplicemente connessi.

A tale proposito, si sottolinea come, se non diversamente indicato, tutti gli elementi siano finiti nella loro dimensione geometrica; inoltre le linee hanno dimensione frattale (ovvero dimensione dello spazio occupato) uguale a uno, mentre le superfici hanno dimensione frattale uguale a due e che la semplice connessione prescinde da casi patologici, come l'anello di Moebius e la bottiglia di Klein, non considerati in questo contesto. Per ottenere un punto di partenza il più generale possibile, è stata considerata la realtà in tutta la sua complessità delle relazioni tra oggetti, identificando:

- 3 classi di relazioni nello spazio ad una dimensione: fra punti, fra punti e linee, fra linee;
- 6 classi di relazioni nello spazio bidimensionale: oltre a quelle del caso precedente, fra punti e superfici, fra linee e superfici, fra superfici;
- 10 classi di relazioni nello spazio tridimensionale: ancora oltre a quel del caso precedente, fra punti e corpi 3D, fra linee e corpi, fra superfici e corpi, fra corpi.

Ad una dimensione, le relazioni topologiche sono 7:

- Punto – punto: separati,
 coincidenti;

- ☐ Punto – linea: esterno
compreso;
- ☐ Linea – linea: disgiunte,
collegate,
comprese.

Passando a due dimensioni, alle 7 relazioni topologiche del caso monodimensionale, si aggiungono altre 10 relazioni, raggiungendo così il numero di 17 relazioni topologiche:

- ☐ Punto –superficie : esterno,
compreso;
- ☐ Linea – superficie: esterna,
collegata,
secante,
compresa,
enucleante;
- ☐ Superficie – sup.: esterna,
collegata,
compresa.

Passando poi a tre dimensioni, alle 17 relazioni topologiche del caso bidimensionale, si aggiungono altre 15 relazioni , raggiungendo così il numero di 32 relazioni topologiche per il caso tridimensionale:

- ☐ Punto – corpo: esterno,
compreso;
- ☐ Linea – corpo: esterna,
collegata,
secante,
compresa,
enucleante,
- ☐ Superficie – corpo: esterna,
collegata,
secante,
compresa,
enucleante;
- ☐ Corpo – corpo: esterno,
collegato,
compreso.

La figura II.1 illustra le relazioni topologiche del caso monodimensionale e quelle da aggiungersi per il caso bidimensionale, e la figura II.2 quelle da aggiungersi ulteriormente nel caso tridimensionale. Per completezza, si illustrano anche le principali relazioni geometriche tra gli elementi primari:

- ❑ 10 relazioni geometriche, nel caso monodimensionale;
- ❑ 32 relazioni geometriche, nel caso bidimensionale;
- ❑ 230 relazioni geometriche, nel caso tridimensionale.

Le seguenti liste schematizzano le relazioni geometriche sopra enunciate.

CASO MONODIMENSIONALE

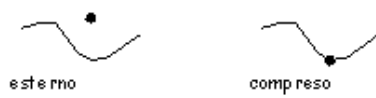
- ❑ Punto – punto: separati (1)
 coincidenti (2)
- ❑ Punto – linea: esterno (3)
 estrema (4)
 interno (5)
- ❑ Linea –linea : esterne (6)
 semiesterne (7)
 sovrapposte (8)
 seminterna (9)
 interna (10)

Relazioni topologiche a 1 dimensione

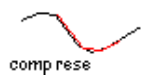
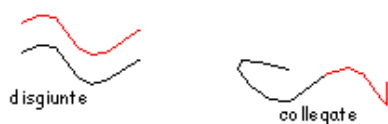
punto-punto



punto -linea.



linea -linea.

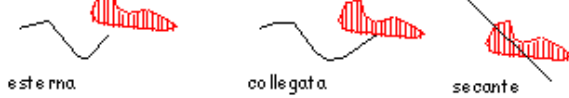


Altre relazioni topologiche a 2 dimensioni

punto-superficie



linea-superficie



superficie-superficie



Fig. II.1 – Relazioni topologiche del caso monodimensionale e quelle da aggiungersi per il caso bidimensionale

CASO BIDIMENSIONALE

- ❑ Punto – punto: separati (1)
 coincidenti (2)
- ❑ Punto – linea: esterno (3)
- estrema (4): solo se la linea è aperta.
- interno (5)
- compreso (6): solo se la linea è chiusa.

- Punto – superficie: esterno (7)
 - perimetrale (8)
 - interno (9)
- Linea –linea : esterne (10)
 - semiesterne (11): solo se le linee sono aperte.
 - semintersecate (12): solo se la linee sono aperte.
 - intersecate (13)
 - sovrapposte (14)
 - seminterna (15): solo se le linee sono aperte.
 - interna (16)
 - semicompresa (17): solo se almeno una linea è chiusa.
 - compresa (18): solo se almeno una linea è chiusa.
- Linea –superficie : esterna (19)
 - semiesterna (20): solo se la linea è aperta.
 - semiperimetrale (21)
 - perimetrale (22)
 - intersecante (23)
 - sezionante (24)
 - seminterna (25): solo se la linea è aperta.
 - interna (26)
 - enucleante (27): solo se la linea è chiusa.
- Superficie –sup. : esterne (28)
 - semiesterne (29)
 - sovrapposte (30)
 - seminterna (31)
 - interna (32)

CASO TRIDIMENSIONALE

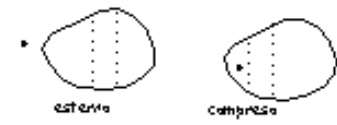
In questo caso, la classificazione delle relazioni geometriche presenta diverse possibilità. Per molte di queste, non è irragionevole raggiungere il numero di 230 elementi, ponendosi così in corrispondenza alla cardinalità del gruppo di simmetrie spaziali. Quella adottata, intende inseguire le differenti forme di linee e superfici dello spazio 3D.

- Infatti mentre un punto è un punto ed un corpo un corpo, una linea può essere aperta o chiusa, occupare un'area aperta o chiusa, oppure addirittura un volume.
- A sua volta, una superficie può essere aperta o chiusa, oppure occupare un volume.

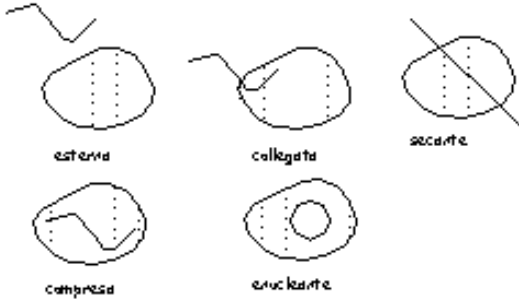
Pertanto si è scelto di chiamare i cinque tipi distinti di linee: bastone, anello, centrino, canestro e gomito, come pure i tre tipi distinti di superfici: foglia, palla e cartoccio, dove una centrino occupa interamente una superficie, un canestro forma una superficie chiusa, un gomito ed un cartoccio occupano un intero volume.

Altre relazioni topologiche a 3 dimensioni

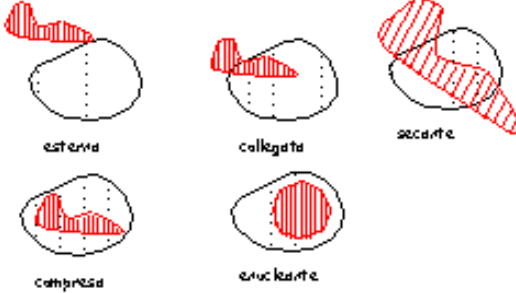
punto-corpo



linea-corpo



superficie-corpo



corpo-corpo



Fig. II.2 – Ulteriori relazioni topologiche nel caso tridimensionale

<input type="checkbox"/>	Punto – punto:	separati	(1)		superficiale	(24)	
		coincidenti	(2)		interno	(25)	
<input type="checkbox"/>	Punto – bastone:	separati	(3)	<input type="checkbox"/>	Punto – corpo:	separati	(26)
		estremale	(4)			superficiale	(27)
		interno	(5)			interno	(28)
<input type="checkbox"/>	Punto – anello:	separati	(6)	<input type="checkbox"/>	Bastone – bastone:	separati	(29)
		interno	(7)			estremale	(30)
<input type="checkbox"/>	Punto – centrino:	separati	(8)			intersecati	(31)
		perimetrale	(9)			interno	(32)
		interno	(10)	<input type="checkbox"/>	Bastone – anello:	separati	(33)
<input type="checkbox"/>	Punto – foglia:	separati	(11)			estremale	(34)
		perimetrale	(12)			intersecati	(35)
		interno	(13)			interno	(36)
<input type="checkbox"/>	Punto – canestro:	separati	(14)	<input type="checkbox"/>	Bastone – centrino:	separati	(37)
		superficiale	(15)			estremale	(38)
		incluso	(16)			sovrapposti	(39)
<input type="checkbox"/>	Punto – palla:	separati	(17)			perimetrale	(40)
		superficiale	(18)			interno	(41)
		incluso	(19)	<input type="checkbox"/>	Bastone – foglia:	separati	(42)
<input type="checkbox"/>	Punto – gomitollo:	separati	(20)			estremale	(43)
		superficiale	(21)			sovrapposti	(44)
		interno	(22)			perimetrale	(45)
<input type="checkbox"/>	Punto – cartoccio:	separati	(23)				

	interno	(46)	sovrapposti	(86)
☐ Bastone – canestro:	separati	(47)	superficiale	(87)
	estremale	(48)	incluso	(88)
	sovrapposti	(49)	☐ Anello – palla:	separati (89)
	perimetrale	(50)		tangenti (90)
	incluso	(51)		sovrapposti (91)
☐ Bastone – palla:	separati	(52)		superficiale (92)
	estremale	(53)		incluso (93)
	sovrapposti	(54)	☐ Anello – gomito:	separati (94)
	perimetrale	(55)		tangenti (95)
	incluso	(56)		sovrapposti (96)
☐ Bastone – gomito:	gomito	(57)		superficiale (97)
	estremale	(58)		interno (98)
	sovrapposti	(59)	☐ Anello – cartoccio:	separati (99)
	perimetrale	(60)		tangenti (100)
	interno	(61)		sovrapposti (01)
☐ Bastone – cartoccio:	separati	(62)		superficiale (02)
	estremale	(63)		interno (03)
	sovrapposti	(64)	☐ Anello – corpo:	separati (04)
	perimetrale	(65)		tangenti (05)
	interno	(66)		sovrapposti (06)
☐ Bastone – corpo:	separati	(67)		superficiale (07)
	estremale	(68)		interno (08)
	sovrapposti	(69)	☐ Centrino – centrino:	separati (09)
	perimetrale	(70)		tangenti (10)
	interno	(71)		sovrapposti (11)
				interno (12)
☐ Anello – anello:	separati	(72)	☐ Centrino – foglia:	separati (13)
	tangenti	(73)		tangenti (14)
	concatenati	(74)		sovrapposti (15)
	intersecati	(75)		interno (16)
☐ Anello – centrino:	separati	(76)	☐ Centrino – canestro:	separati (17)
	tangenti	(77)		tangenti (18)
	sovrapposti	(78)		sovrapposti (19)
	interno	(79)		superficiale (20)
☐ Anello – foglia:	separati	(80)		incluso (21)
	tangenti	(81)	☐ Centrino – palla:	separati (22)
	sovrapposti	(82)		tangenti (23)
	interno	(83)		sovrapposti (24)
☐ Anello – canestro:	separati	(84)		superficiale (25)
	tangenti	(85)		

	incluso	(26)			
☐ Centrino – gomito:	separati	(27)	☐ Foglia – corpo:	separati	(66)
	tangenti	(28)		tangenti	(67)
	sovrapposti	(29)		sovrapposti	(68)
	superficiale	(30)		superficiale	(69)
	interno	(31)		interno	(70)
☐ Centrino – cartoccio:	separati	(32)	☐ Canestro – canestro:	separati	(71)
	tangenti	(33)		tangenti	(72)
	sovrapposti	(34)		sovrapposti	(73)
	superficiale	(35)		incluso	(74)
	interno	(36)	☐ Canestro – palla:	separati	(75)
☐ Centrino – corpo:	separati	(37)		tangenti	(76)
	tangenti	(38)		sovrapposti	(77)
	sovrapposti	(39)		incluso	(78)
	superficiale	(40)	☐ Canestro – gomito:	separati	(79)
	interno	(41)		tangenti	(80)
				sovrapposti	(81)
☐ Foglia – foglia:	separate	(42)		incluso / int.	(82)
	tangenti	(43)	☐ Canestro – cartoccio:	separati	(83)
	sovrapposte	(44)		tangenti	(84)
	interna	(45)		sovrapposti	(85)
☐ Foglia – canestro:	separati	(46)		incluso / int.	(86)
	tangenti	(47)	☐ Canestro – corpo:	separati	(87)
	sovrapposti	(48)		tangenti	(88)
	superficiale	(49)		sovrapposti	(89)
	inclusa	(50)		incluso / int.	(90)
☐ Foglia – palla:	separati	(51)	☐ Palla – palla:	separati	(91)
	tangenti	(52)		tangenti	(92)
	sovrapposti	(53)		sovrapposti	(93)
	superficiale	(54)		inclusa	(94)
	inclusa	(55)	☐ Palla – gomito:	separati	(95)
☐ Foglia – gomito:	separati	(56)		tangenti	(96)
	tangenti	(57)		sovrapposti	(97)
	sovrapposti	(58)		inclusa / int.	(98)
	superficiale	(59)	☐ Palla – cartoccio:	separati	(99)
	interna	(60)		tangenti	(200)
☐ Foglia – cartoccio:	separati	(61)		sovrapposti	(01)
	tangenti	(62)		inclusa / int.	(02)
	sovrapposti	(63)	☐ Palla – corpo:	separati	(03)
	superficiale	(64)		tangenti	(04)
	interna	(65)			

	sovrapposti	(05)		interno	(18)
	incluso / int.	(06)			
<input type="checkbox"/>	Gomitolo – gomitolo: separati	(07)	<input type="checkbox"/>	Cartoccio – cartoccio: separati	(19)
	tangenti	(08)		tangenti	(20)
	sovrapposti	(09)		sovrapposti	(21)
	interno	(10)	<input type="checkbox"/>	Cartoccio – corpo: separati	(22)
<input type="checkbox"/>	Gomitolo – cartoccio: separati	(11)		tangenti	(23)
	tangenti	(12)		sovrapposti	(24)
	sovrapposti	(13)		interno	(25)
	interno	(14)	<input type="checkbox"/>	Corpo – corpo: separati	(26)
<input type="checkbox"/>	Gomitolo – corpo: separati	(15)		tangenti	(27)
	tangenti	(16)		sovrapposti	(28)
	sovrapposti	(17)		interno	(29)
					(230)

Alla fine di questo lungo elenco, si può ancora osservare come lo stesso potrebbe essere ulteriormente allungato, tenendo conto di condizioni particolari di tangenza esterna o interna, intersezione e sovrapposizione. Infatti tutte possono essere semplici o doppie, oppure multiple, come pure puntuali, lineari e areali. Data la lunghezza e ricchezza delle sotto – classificazioni proposte, si potrebbe arrivare al numero 4783, pari alla cardinalità dei gruppi di simmetrie quadridimensionali, recentemente dimostrati esistenti.

Attraverso lo studio combinato delle relazioni topologiche e geometriche tra elementi primari e simmetrie, è particolarmente curioso notare alcune analogie tra il numero delle relazioni trovate e la cardinalità (ovvero il numero di elementi) dei gruppi di simmetrie. Infatti come 7 sono le relazioni topologiche ad una dimensione, altrettanti sono gli elementi del gruppo di simmetrie lineari che hanno una sola direzione di traslazione. La stessa analogia è rilevabile a due dimensioni dove, a fronte di 17 relazioni topologiche, un identico numero di elementi forma il gruppo di simmetrie nel piano, considerando due direzioni di traslazione. Ancora alle 32 relazioni topologiche, individuate a tre dimensioni, corrispondono gli elementi del gruppo di simmetrie nello spazio 3D, considerando tre direzioni di traslazione e la restrizione cristallografica. Per quanto riguarda invece le principali relazioni geometriche (essendo 4 il numero degli elementi del gruppo di simmetrie lineari, considerando la restrizione cristallografica), è sempre curioso notare ¹ come:

- il numero 10 del caso monodimensionale corrisponda al numero degli elementi del gruppo di simmetrie nel piano, considerando la restrizione cristallografica;
- il numero 32 del caso bidimensionale corrisponda al numero degli elementi del gruppo di simmetrie nello spazio 3D, considerando ancora la restrizione cristallografica;
- il numero 230 nel caso tridimensionale corrisponda al numero degli elementi del gruppo di simmetrie nello spazio 3D, non considerando alcuna restrizione.

¹ Per completezza, è bene rilevare anche le fondamentali differenze tra le simmetrie e le relazioni tra oggetti. Innanzitutto le simmetrie formano gruppi (cioè hanno una legge di composizione e proprietà, quali l'associazione, l'identità e l'inversione rispetto alla suddetta legge di composizione), mentre le relazioni costituiscono solo un insieme. In secondo luogo, gli insiemi delle relazioni si includono uno con l'altro, all'aumentare della dimensione degli spazi, mentre i gruppi di simmetrie sono tutti disgiunti tra loro.

III RELAZIONI TOPOLOGICHE E GEOMETRICHE TRA OGGETTI (APPROCCIO BASATO SUL CALCOLO DELLE COMBINAZIONI)

Un approccio differente, anche se non completamente diverso, alla modellazione di/ad oggetti si basa su relazioni combinatorie, solitamente binarie, valutandone a posteriori la congruenza geometrica.

Esso ha il vantaggio di prendere in considerazione tutte le combinazioni possibili, anche se il loro numero, talvolta davvero molto grande, può ingenerare qualche difficoltà nella scelta delle sole congruenti. Infatti creare un modello della realtà non è sempre facile: ad esempio, decidere dove inizia qualcosa dipende dalla prospettiva con cui si osserva il fenomeno, inoltre se gli oggetti sono tempo – varianti, la loro interpretazione dipende dal momento di osservazione degli stessi. Infine e soprattutto la rappresentazione della realtà dipende dal livello di dettaglio che si vuole descrivere.

Questa soggettività di rappresentazione rende necessaria una formalizzazione dei processi di astrazione della realtà, per permettere di avere uno strumento insieme efficiente e robusto, in grado di interpretare le informazioni geografiche. Esistono diversi meccanismi di astrazione per la creazione di un modello concettuale. In genere,

- ❑ si parte da una CLASSIFICAZIONE, cioè da insieme degli individui con un comune comportamento, e si passa poi a costituire una classe (ovvero un determinato stato di relazione);
- ❑ si passa poi ad una GENERALIZZAZIONE, passando da un insieme di classi a classi immaginarie;
- ❑ si può infine passare ad un'AGGREGAZIONE, partendo da insiemi di individui per arrivare ad un individuo più complesso (facente parte di relazione).

Oggetti e Campi: di fronte ad un fenomeno da descrivere, il problema più immediato è la discretizzazione di un fenomeno continuo. Infatti si possono distinguere i fenomeni spaziali (e spazio – temporali) in discreti e continui. Tra gli elementi discreti si hanno individui con un'identità (indipendente da ogni valore dell'oggetto): la loro estensione spaziale è descritta dal loro confine e solitamente si ritrovano le stesse proprietà all'interno dello stesso elemento; di conseguenza, da un elemento discreto si crea l'OGGETTO.

Per quanto riguarda invece gli elementi continui o distribuzioni, si sa che proprietà e valori cambiano attraverso lo spazio e talvolta nel tempo; pertanto i valori non possono essere completamente determinati da un campionamento. Non esistendo metodologie di misurazione continua è necessario impiegare un processo d'interpolazione, per passare da osservazioni discrete ad una rappresentazione continua del fenomeno in esame; di conseguenza, per le distribuzioni si creano i CAMPI. Per delineare lo spazio oggetto, è poi necessario definirne un limite riconosciuto univoco da tutti.

Spazio e Oggetti: dopo aver definito i confini di un oggetto, si passa a dover misurare lo spazio geografico. Le misure si eseguono puntualmente in un determinato istante e forniscono valori comparabili con un certo sistema di riferimento fissato a priori. Certamente non sono prive di errori e solitamente si riferiscono ad un modello concettuale.

Per avere una descrizione dello spazio il meno possibile affetta da interpretazioni personali, si definiscono elementi di conoscenza spaziale. Innanzitutto occorre suddividere lo spazio in categorie, per poterlo classificare e rendere meno soggettiva la sua modellazione, riconoscendo due grandi categorie, una secondo la dimensione dello spazio e un'altra secondo la destinazione d'utilizzo dello stesso.

SPAZI DI ZUBIN – Lo spazio è suddiviso in quattro categorie (A, B, C, D).

- ❑ Gli spazi di tipo A contengono oggetti che possono essere manipolati con le mani, ovvero più piccoli del corpo umano e che pertanto possono essere osservati e descritti, girandoli fra le mani.
- ❑ Gli spazi di tipo B sono composti da oggetti che sono troppo grandi per essere tenuti in mano, ma per osservarli è sufficiente girare la testa.
- ❑ Gli spazi di tipo C sono costituiti da oggetti per cui è proprio necessario camminare loro attorno, per poter avere una conoscenza completa degli stessi.
- ❑ Gli spazi di tipo D comprendono tutti gli oggetti che sono troppo grandi per essere esplorati e conseguentemente descritti sulla base della propria esperienza.

L'esistenza di modelli in scala di oggetti reali fa sì che questa classificazione di spazi non sia così rigida.

IMAGE SCHEMATA – Un secondo tipo di classificazione è fornito da schemi basati su strutture mentali che nascono dall'interazione corporea, l'esperienza linguistica e il contesto storico cui ciascuno è individualmente e/o collettivamente soggetto. Infatti il realismo sperimentale dichiara che ogni individuo si costruisce un personale modello mentale del mondo, ma questi modelli cognitivi dei diversi individui sono simili nei loro elementi di base, in quanto la percezione sensoriale dei differenti individui è molto simile, inoltre i differenti individui interagiscono con lo stesso mondo reale.


NAIVE GEOGRAPHY – Un altro tipo di classificazione dello spazio geografico è dato dalla geografia istintiva che cattura e riflette il modo in cui le persone pensano e ragionano sullo spazio geografico ed il tempo sia consciamente che inconsciamente. Esso è un approccio formale per una più naturale (spontanea) interpretazione dello spazio geografico e del tempo. Alcuni elementi della geografia istintiva individuano: le cose vicine e più rilevanti, la lunghezza degli spazi circostanti, i problemi di scala, le modalità di trasporto, il significato diverso di altezza e profondità, le interpretazioni diverse delle unità spaziali, la mutua appartenenza degli oggetti spaziali.

Modelli di dati spaziali: innanzitutto è necessario elencare alcune proprietà spaziali fondamentali per la creazione di un modello:

- ❑ coincidenza: essere nello stesso posto nello stesso istante ($A \equiv B$): ovviamente non è possibile per tutti gli oggetti occupare lo stesso posto nello stesso istante, ma non si deve dimenticare l'esistenza di oggetti immaginari;
- ❑ dimensione: unità di misura (0, 1, 2, 3 dimensioni), oppure forma di un oggetto spaziale: (punto, linea, regione, corpo);
- ❑ co-dimensione: differenze tra la dimensione dello spazio oggetto e la dimensione dello spazio circostante (ad esempio, una regione in uno spazio 2D ha una co-dimensione uguale a 0, mentre una linea in uno spazio 2D ha una co-dimensione uguale a 1);
- ❑ ordine: stabilire una sequenza basata su relazioni transitive, antisimmetriche, riflessive, ecc., per fare paragoni (maggiore, uguale, minore) e creare sequenze in 1D (ad es., nel tempo) e in 2D. Ad esempio, si può cercare di creare un ordine in una classica tabella. Decidendo di seguire un ordine per righe (row-order), non si è in grado di preservare la vicinanza tra una cella e l'altra.



Un'altra possibilità è quella di seguire un ordine z (z-order), previa una suddivisione in quadranti. Questa suddivisione rispetta meglio il concetto di vicinanza fra le celle.

- ❑ connettività: proprietà (in genere) simmetrica che indica la presenza di un percorso tra due elementi (A connesso a B) e supplisce ai vuoti che esistono tra un oggetto e l'altro;
- ❑ inclusione: proprietà di un oggetto di essere completamente incluso in un altro (A contenuto in B);
- ❑ supporto: un oggetto sostiene un altro (A sostiene B)  ;
- ❑ vicinanza: vicino è un concetto relativo e dipende dal contesto, potendo essere associato al tempo ed allo spazio necessario per raggiungere un oggetto (il suo opposto è lontano);
- ❑ metrica: funzione della distanza (a sua volta, distanza Euclidea, distanza cosiddetta Manhattan, ecc.);
- ❑ direzione: egocentrica, se dipende dall'osservatore, oppure globale (N, S, E, O), se indipendente;
- ❑ partizione: suddivisione dello spazio in parti, tale che ogni intersezione di due parti sia vuota e l'unione di tutte le parti dia l'intero.

Sistemi di numeri

Esistono diversi sistemi di misura dello spazio tra cui il più diffuso è il sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Come ben noto, la rappresentazione concreta dello spazio è discreta, in contrapposizione alla sua formalizzazione astratta, supposta continua. Uno dei maggiori problemi pratici è l'inesattezza delle intersezioni: se il punto di intersezione fra due linee rette non esiste, si dovrà operare un'approssimazione, usando il punto più vicino, rendendo inesatta l'intersezione e dando origine ad una spezzata.

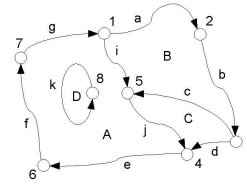
Elementi geometrici di base

- ❑ oggetti 0-D: punti (con monografie e coordinate) e nodi (per le informazioni circa la connessione);
- ❑ oggetti 1-D:
 - ❑ archi (di connessione tra i nodi che non sono in grado di determinare gli elementi di confine);
 - ❑ segmenti retti (di cui non si è in grado di calcolare la lunghezza, non essendo riferiti a punti di coordinate definite e note);
 - ❑ segmenti curvilinei: recanti informazioni sulla forma della linea (raggio di curvatura, ecc.), dove la maggior parte di essi è approssimata mediante sequenze di punti di rottura (breakdown) e dalla loro linea retta di connessione;
 - ❑ linee (sequenze di segmenti che non si intersecano fra loro, oppure circuiti chiusi);
 - ❑ linee orientate (vettori e forze);
- ❑ oggetti 2-D: poligoni circondati da sequenze chiuse di segmenti che possono contenere buchi.

Codifica della topologia

Esistono varie possibilità di rappresentazione in tabella di un dato grafo, a seconda che si voglia focalizzare l'attenzione su archi, nodi, connessioni, elementi di bordo, ecc.

Polligoni	Archi di contorno
A	(e, f, g, i, j)(k)
B	(a, b, c, -i)
C	(-c, d, -j)
D	(-k)



Archi	Nodi di confine	Poligono a sinistra	Poligono a destra
a	1, 2	-	B
b	2, 3	-	B
c	3, 5	C	B
d	3, 4	-	C
...
k	8, 8	D	A

Nodi	Archi di co-confine
1	a, i, -g
2	-a, b
3	-b, c, d
4	-d, e, -j
5	-c, -i, j
6	-e, f
7	-f, g
8	$\pm k$

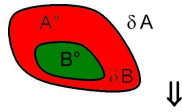
Poligoni	\Rightarrow	Archi
Archi	\Rightarrow	Poligoni
Archi	\Rightarrow	Nodi
Nodi	\Rightarrow	Archi

Relazioni spaziali: la Topologia tratta sottogruppi di trasformazioni, conservando o meno alcune proprietà (scala, similitudini, simmetrie). Se le relazioni fra gli elementi sono binarie, esse sono dette relazioni topologiche binarie. Le regioni (dischi 2D omomorfici e omogenei senza separazioni, né buchi, né punte) possono essere definite come insiemi chiusi, indicando con A° l'interno e con δA il loro contorno. Secondo il Teorema di Jordan, se J è una semplice curva chiusa in uno spazio R^2 , allora $R^2 - J$ ha un dentro e un fuori, in cui J è il contorno di ciascuna. Inoltre due punti all'interno di una regione possono essere sempre connessi da una linea, mentre se due punti sono uno all'interno e l'altro all'esterno, una linea deve necessariamente attraversare il contorno della regione per unire i due punti.



Se si prendono due regioni si ha un interno A° ed un contorno δA , ed un altro interno B° ed un altro contorno δB . Queste due regioni possono essere messe in relazione attraverso 4 intersezioni, creando una tabella a doppia entrata per le due regioni cui corrisponde una matrice 2×2 . Infatti se si verificano le intersezioni generate si possono trovare intersezioni piene ($-\emptyset$) o vuote (\emptyset) e, così facendo, si hanno 16 combinazioni differenti.

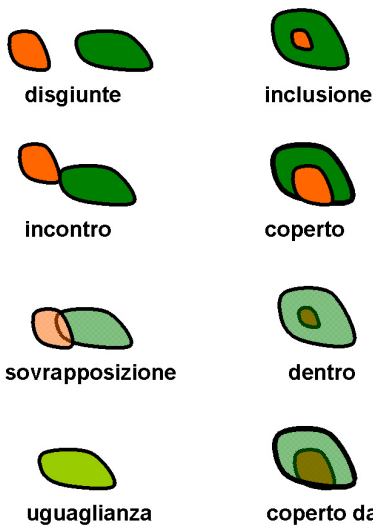
	B°	δB
A°	$A^\circ \cap B^\circ$	$A^\circ \cap \delta B$
δA	$\delta A \cap B^\circ$	$\delta A \cap \delta B$



\emptyset	\emptyset	$\neg \emptyset$	\emptyset	\emptyset	$\neg \emptyset$	\emptyset	\emptyset
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$\neg \emptyset$	\emptyset
\emptyset	\emptyset	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	\emptyset	$\neg \emptyset$	\emptyset
\emptyset	$\neg \emptyset$	\emptyset	\emptyset	$\neg \emptyset$	\emptyset	\emptyset	$\neg \emptyset$
\emptyset	$\neg \emptyset$	\emptyset	$\neg \emptyset$	\emptyset	\emptyset	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$
$\neg \emptyset$	\emptyset	\emptyset	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	\emptyset
$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	\emptyset	\emptyset	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$
\emptyset	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$	$\neg \emptyset$

Pertanto se si considerano tutte le relazioni topologiche potenziali, partendo da 2 valori e 4 intersezioni ($2^4=16$), si hanno 16 tipi di relazioni topologiche che, per comodità, possono essere raggruppate in un'unica matrice insieme delle 16 matrici suddette. Solo 8 matrici di questo tipo formano una classe di equivalenza con le relazioni topologiche sotto riportate. Le rimanenti 8 costituiscono invece casi geometrici impossibili come, ad es., l'intersezione di interni senza alcuna intersezione con contorni. Inoltre occorre segnalare come la perfetta simmetria delle relazioni di sovrapposizione e uguaglianza non permetta di mettere in evidenza il verso delle 2 relazioni topologiche, anche se talvolta rilevante da un punto di vista tematico.

Terminologia



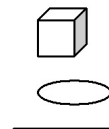
Nel caso di similitudine topologica, è tuttavia necessario segnalare alcune configurazioni che risultano essere differenti, seppure con matrici identiche. In questo caso, un criterio di distinzione potrebbe essere quello di contare il numero di intersezioni (ovvero i punti di contatto) tra i due oggetti.



Proprietà fondamentali dell'insieme: copertura completa (l'insieme non lascia mai zone vuote); mutua esclusione (ad esempio, due regioni sono sovrapposte, oppure una è interna all'altra, ma non possono essere vere entrambe le relazioni).

Interni e contorni: al fine di classificare le differenti relazioni topologiche in modo più semplice, è conveniente fare uno schema che metta in relazione gli oggetti con le dimensioni del loro interno e contorno. In uno spazio R^1 , si hanno 4 intersezioni possibili e, come detto in precedenza, 8 casi sono geometricamente compatibili. Si noti poi che la perfetta simmetria delle relazioni di sovrapposizione ed uguaglianza porta a 10 i casi geometricamente compatibili, proprio come le simmetrie lineari senza restrizione cristallografica.

	Dim. dell'INTERNO	Dim. del CONTORNO
Corpo	3	2
Regione	2	1
Linea	1	0
Punto	0	-



	<table border="1"><tr><td>\emptyset</td><td>\emptyset</td></tr><tr><td>\emptyset</td><td>\emptyset</td></tr></table>	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	Incontro
\emptyset	\emptyset					
\emptyset	\emptyset					
	<table border="1"><tr><td>\emptyset</td><td>\emptyset</td></tr><tr><td>\emptyset</td><td>\emptyset</td></tr></table>	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	Disgiunzione
\emptyset	\emptyset					
\emptyset	\emptyset					
	<table border="1"><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>\emptyset</td></tr><tr><td>\emptyset</td><td>$\neg\emptyset$</td></tr></table>	$\neg\emptyset$	\emptyset	\emptyset	$\neg\emptyset$	Uguaglianza
$\neg\emptyset$	\emptyset					
\emptyset	$\neg\emptyset$					
	<table border="1"><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>$\neg\emptyset$</td></tr><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>$\neg\emptyset$</td></tr></table>	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	Sovrapposizione (nel caso di linee la sovrapposizione è proprio completa; infatti il nodo di una linea è completamente incluso nell'altra)
$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$					
$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$					
	<table border="1"><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>$\neg\emptyset$</td></tr><tr><td>\emptyset</td><td>\emptyset</td></tr></table>	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	\emptyset	\emptyset	Contiene
$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$					
\emptyset	\emptyset					
	<table border="1"><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>$\neg\emptyset$</td></tr><tr><td>\emptyset</td><td>\emptyset</td></tr></table>	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	\emptyset	\emptyset	Coperto
$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$					
\emptyset	\emptyset					
	<table border="1"><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>\emptyset</td></tr><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>\emptyset</td></tr></table>	$\neg\emptyset$	\emptyset	$\neg\emptyset$	\emptyset	Interno
$\neg\emptyset$	\emptyset					
$\neg\emptyset$	\emptyset					
	<table border="1"><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>\emptyset</td></tr><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>$\neg\emptyset$</td></tr></table>	$\neg\emptyset$	\emptyset	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	Coperto da
$\neg\emptyset$	\emptyset					
$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$					

In uno spazio R^2 , si hanno ancora tutte le 8 relazioni linea – linea che si trovano nello spazio R^1 cui occorre aggiungere tre nuovi casi distinti propri di uno spazio bidimensionale. A riguardo, occorre tuttavia precisare come, se si volesse tenere conto di tutte le configurazioni geometriche ammissibili, occorrerebbe contare invece il numero di intersezioni (ovvero i punti di contatto) tra le due linee, differenziando così casi diversi, seppure talvolta con matrici identiche.

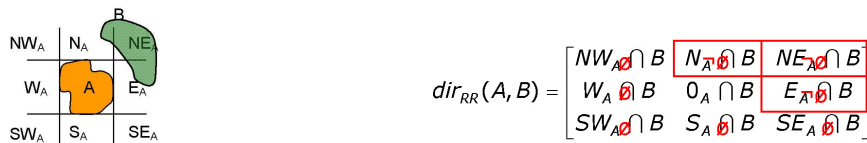
<table border="1"><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>\emptyset</td></tr><tr><td>\emptyset</td><td>$\neg\emptyset$</td></tr></table>	$\neg\emptyset$	\emptyset	\emptyset	$\neg\emptyset$		Parte dell'interno della linea nera percorre l'esterno della linea rossa
$\neg\emptyset$	\emptyset					
\emptyset	$\neg\emptyset$					
<table border="1"><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>\emptyset</td></tr><tr><td>\emptyset</td><td>$\neg\emptyset$</td></tr></table>	$\neg\emptyset$	\emptyset	\emptyset	$\neg\emptyset$		Parte del contorno della linea nera appartiene all'esterno della linea rossa
$\neg\emptyset$	\emptyset					
\emptyset	$\neg\emptyset$					
<table border="1"><tr><td>$\neg\emptyset$</td><td>\emptyset</td></tr><tr><td>\emptyset</td><td>$\neg\emptyset$</td></tr></table>	$\neg\emptyset$	\emptyset	\emptyset	$\neg\emptyset$		Nessuna parte dell'interno della linea nera percorre l'esterno della linea rossa; nessuna parte dell'interno della linea rossa percorre l'esterno della linea nera
$\neg\emptyset$	\emptyset					
\emptyset	$\neg\emptyset$					

Dopodiché occorre introdurre i concetti di INTERNO, ESTERNO, CONFINE. Pertanto indicando con A^- e B^- l'esterno delle regioni A e B , analogamente a quanto già descritto per interno e contorno, si può creare una matrice a doppia entrata per le tre regioni cui corrisponde una matrice 3×3 (con ben 81 disposizioni). Dato il numero davvero molto grande di casi, è conveniente procedere per altra via, ricercando solo le relazioni topologiche geometricamente ammissibili. Ad esempio, fra linee e regioni, si hanno 19 relazioni topologiche geometricamente ammissibili, come illustrato tabella a fianco.

Se si sommano le 8 relazioni regione – regione, alle 10 relazioni linea – linea ed alle 19 relazioni linea – regione, si ottiene il numero 37. Tuttavia a causa della perfetta simmetria tra inclusione e dentro, come pure tra coperto e coperto da, e riducendo ad uno tutte le estensioni di uguale (che a due dimensioni possono essere parecchie), il numero di casi geometricamente compatibili si riduce a 32, proprio come le simmetrie planari senza restrizione cristallografica.

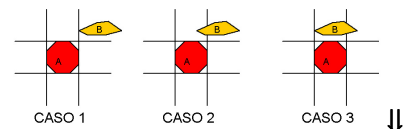
Per motivi di brevità, si omette la disamina di tutte le combinazioni fra punti, linee, regioni e corpi nello spazio 3D, osservando nuovamente come il calcolo combinatorio per quattro oggetti, variamente combinati tra loro, porterebbe certamente a numeri davvero parecchi grandi tra cui scegliere solo un numero ben più limitato di relazioni topologiche geometricamente ammissibili. Del resto, come sarà evidente nel prosieguo, si ha $4! = 24$ ed 8 moti rigidi nel piano, mentre $8! = 40.320$ con solo 48 moti rigidi nello spazio 3D.

Direzioni per oggetti estesi: quando si analizzano oggetti estesi, è necessario considerare dapprima la dimensione dell'oggetto e il suo orientamento, e successivamente le relazioni topologiche con gli altri oggetti o con lo spazio circostante. Pertanto è necessario creare una MATRICE DIREZIONE – RELAZIONE, riferita ad un dato oggetto, disegnando attorno all'oggetto stesso una griglia della dimensione del minimo rettangolo capace di includerlo. A questo punto, si è in grado di stabilire le relazioni qualitative tra l'oggetto in esame (A) e lo spazio circostante. Se si considera un secondo oggetto B, si può creare la matrice di direzione – relazione, per mettere in relazione l'oggetto B con l'oggetto A. Le intersezioni non vuote sono presenti dove l'oggetto B è in relazione con l'oggetto A. Questa matrice dipende dalla forma propria di B e, invertendo gli elementi (l'oggetto B diventa allora oggetto di riferimento), non si ha solitamente la stessa matrice direzione – relazione.



Considerando una matrice direzione – relazione e dividendo la presenza dell'oggetto in una determinata zona per la sua superficie totale, si può vedere la direzione predominante. Tuttavia l'approccio qualitativo è poco adatto a valutazioni di similitudine fra oggetti. Ad esempio, prendendo due oggetti A e B, facendo una valutazione qualitativa di raggruppamento intuitivo ed osservando semplicemente la posizione qualitativa dei due oggetti, si può dire che i casi 1 e 2 sono simili tra loro. Tuttavia osservando la matrice di direzione – relazione (1^a riga delle espressioni sottostanti), si nota che le matrici del casi 2 e 3 sono addirittura uguali. Allora è necessario introdurre una matrice dettagliata di direzione – relazione (2^a riga delle stesse espressioni) per poter risolvere ed evitare ambiguità di questo tipo.

$$dir_{RR}(A, B) = \begin{bmatrix} 0 & 0.15 & 0.65 \\ 0 & 0 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \uparrow$$



$$\begin{aligned} dir_{RR}(A, B)_1 &= \begin{bmatrix} \phi & \phi & -\phi \\ \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi \end{bmatrix} & dir_{RR}(A, B)_2 &= \begin{bmatrix} \phi & -\phi & -\phi \\ \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi \end{bmatrix} & dir_{RR}(A, B)_3 &= \begin{bmatrix} \phi & -\phi & -\phi \\ \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi \end{bmatrix} \\ dir_{RR}(A, B)_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & dir_{RR}(A, B)_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.10 & 0.90 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & dir_{RR}(A, B)_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dalla lettura di queste ultime matrici dettagliate, si può notare come i singoli valori nei casi 2 e 3 differiscano tra loro (pur essendo uguali le matrici di direzione – relazione), mentre nei casi 1 e 2 non differiscono di molto (conformemente alle matrici di direzione – relazione già simili fra loro).

I CAMPI sono distribuzioni (e non oggetti) e richiedono: diversi tipi di relazione (campionamento), diversi tipi di operazione (ad esempio, conteggio delle celle), diversi tipi di modelli di dati (STRUTTURE RASTER o vettori), avendo definito con cura: la risoluzione, l'orientamento, l'origine. Talvolta è necessario cambiare risoluzione, orientamento ed origine della griglia, per meglio rappresentare il fenomeno oggetto di studio e meglio ottimizzare lo spazio occupato dai dati.



Operazioni con i raster:

- ❑ vicinanza: gli elementi vicini sono i 4 elementi contigui, oppure sono considerati elementi vicini anche quelli in diagonale, raggiungendo così il numero di 8;
- ❑ combinazioni: differenti strati (o layer) con la stessa risoluzione ed orientamento, ricoprenti una stessa area, possono essere combinati opportunamente, determinando differenti estensioni della mappa di strati sovrapposti, avendo cura di scegliere opportunamente le modalità di memorizzazione delle suddette strutture.

APPENDICE A – I GRUPPI DI SOSTITUZIONE

Lo studio delle invarianze costituisce uno dei primi passi per il riconoscimento degli elementi caratteristici, nell'analisi di figure e corpi 3D. A tal fine, le trasformazioni elementari nel piano e nello spazio costituiscono le più comuni e più importanti invarianze. Preliminari ad esse, sono i movimenti rigidi: rotazioni, riflessioni e glisso – riflessioni, il cui studio si fonda sui sottogruppi rigidi di S_4 e S_8 , rispettivamente nei casi 2D e 3D.

Si chiamano trasformazioni elementari quelle trasformazioni che fanno corrispondere biunivocamente in forma lineare, oppure ad essa riconducibili, un insieme di dati ad un altro insieme di dati. Tra le tante trasformazioni elementari, sono note quelle che conservano, oltre alla corrispondenza biunivoca, anche altre proprietà geometriche quali: gli allineamenti, il parallelismo, le perpendicolarità, la similitudine e la congruenza ovvero: omografie, trasformazioni affini (generalmente e particolari), similitudini (trasformazioni S), roto – traslazioni.

Il passaggio dalle dimensioni (di una figura od un corpo) alle coordinate richiede la definizione di un sistema di riferimento. Entro un sistema di riferimento, a meno di traslazioni e piccole rotazioni, i corpi sono invarianti per simmetria nelle partizioni dello spazio, operate dal sistema di riferimento.

Tutte le trasformazioni elementari hanno bisogno della congruenza dei sistemi di riferimento, addirittura quella topologiche (per il cui calcolo è necessaria, in generale, una linearizzazione), hanno bisogno della quasi – coincidenza (a meno di traslazioni) dei sistemi di riferimento, ovvero della conoscenza dei valori approssimati dei parametri non lineari della trasformazione. Spesso la conoscenza grossolana dei parametri non lineari delle trasformazioni elementari è pressoché immediata, assumendo quale valore approssimato per le scale: l'unità, e per tutte le altre eventuali deformazioni: lo zero.

- ❑ Per quanto riguarda invece le rotazioni, se queste sono all'incirca 0 , $\pi/2$, π e $3\pi/2$, per le modalità di definizione degli assi coordinati costituenti i principali sistemi di riferimento, esse possono essere determinate con verifiche topologiche di congruenza (o specularità) fra gli stessi sistemi di riferimento.
- ❑ In caso contrario, se le scale e tutte le altre eventuali deformazioni hanno come valori approssimati rispettivamente l'unità e lo zero, allora il calcolo delle rotazioni si riduce al calcolo di una congruenza.

Eeguire le verifiche topologiche tra due sistemi di riferimento (fra i quali si vuole stabilire una trasformazione elementare), significa verificare se è necessario dare un movimento rigido agli assi coordinati che definiscono uno dei due sistemi di riferimento, per far sì che questi risultino congruenti con gli assi coordinati che definiscono l'altro sistema di riferimento.

Il gruppo di sostituzione S_4 serve per conoscere facilmente tutti i possibili movimenti rigidi di un sistema di riferimento piano costituito da due assi coordinati e, essendo ovviamente ogni asse individuato da due punti, è conveniente fare riferimento alle permutazioni su 4 lettere, coincidenti con i 4 vertici di un quadrato, non lacerato dai suddetti movimenti / permutazioni. Questo gruppo ha $4! = 24$ elementi, indicati di seguito, con specifico riferimento al loro significato geometrico:

- | | | |
|-----|---------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | 1 2 3 4 | identità |
| 2. | 1 3 4 2 | triscambi (non rigidi) |
| 3. | 1 4 2 3 | |
| 4. | 1 4 3 2 | scambio: glisso – riflessione sulla bisettrice del 1° e 3° quadrante (P) |
| 5. | 1 3 2 4 | scambi (non rigidi) |
| 6. | 1 2 4 3 | |
| 7. | 2 3 4 1 | rotazione antioraria semplice (R_1) |
| 8. | 2 3 1 4 | triscambi (non rigidi) |
| 9. | 2 4 3 1 | |
| 10. | 2 1 4 3 | doppio scambio: riflessione sull'asse verticale (T_1) |
| 11. | 2 1 3 4 | scambio (non rigido) |
| 12. | 2 4 1 3 | tetrascambio (non rigido) |
| 13. | 3 4 1 2 | rotazione antioraria doppia, doppio scambio: riflessione doppia (R_2, T_2) |
| 14. | 3 1 2 4 | triscambi (non rigidi) |

15. 3 2 4 1
 16. 3 2 1 4 scambio: glisso – riflessione sulla bisettrice del 2° e 4° quadrante (Q)
 17. 3 1 4 2 tetrascambi (non rigidi)
 18. 3 4 2 1
 19. 4 1 2 3 rotazione antioraria tripla (R_3)
 20. 4 1 3 2 triscambi (non rigidi)
 21. 4 2 1 3
 22. 4 3 2 1 doppio scambio: riflessione sull'asse orizzontale (T_3)
 23. 4 2 3 1 scambio non rigido
 24. 4 3 1 2 tetrascambio (non rigido)

Il gruppo S_4 è non – abeliano (cioè non commutativo) e non – ciclico (cioè non avente un unico elemento generatore); in esso si individuano facilmente il sottogruppo delle rotazioni R_4 e il sottogruppo delle riflessioni T_4 . Il sottogruppo R_4 ha 4 elementi, è abeliano e ciclico, con elemento generatore la rotazione semplice, e ha la seguente tavola di composizione.

Il sottogruppo T_4 (noto, in letteratura, come il gruppo trirettangolo di Klein) ha 4 elementi, è abeliano e non – ciclico, mentre ogni suo elemento è involutorio (cioè ogni riflessione coincide con la sua inversa ed ogni doppia riflessione coincide con l'identità), e ha la tavola di composizione riportata appena sopra.

I due sottogruppi R_4 e T_4 non hanno la stessa tavola di composizione e pertanto non sono tra loro isomorfi, ovvero rappresentano movimenti rigidi, in generale, diversi tra loro. Per sapere se essi esauriscono tutti i possibili movimenti rigidi, è necessario verificare, se i due sottoinsiemi prodotto destro U_4 e sinistro V_4 del sottogruppo delle rotazioni R_4 per il sottogruppo delle riflessioni T_4 sono chiusi rispetto al prodotto (cioè se dalla composizione degli elementi non nascono nuovi elementi). I sottogruppi U_4 e V_4 hanno le seguenti tavole di composizione.

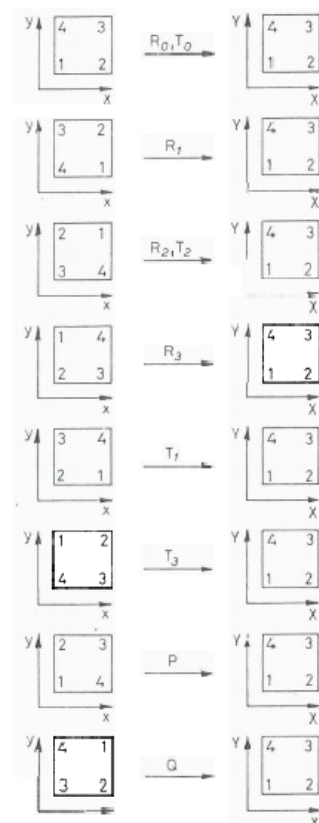
	R_0	R_1	R_2	R_3		T_0	T_1	T_2	T_3
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3	T_0	T_0	T_1	T_2	T_3
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0	T_1	T_1	T_0	T_3	T_2
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1	T_2	T_2	T_3	T_0	T_1
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2	T_3	T_3	T_2	T_1	T_0
	T_0	T_1	T_2	T_3		T_0	T_1	T_2	T_3
R_0	$R_0;T_0$	T_1	$R_2;T_2$	T_3	R_0	$R_0;T_0$	R_1	$R_2;T_2$	R_3
R_1	R_1	P	R_3	Q	R_1	T_1	Q	T_3	P
R_2	$R_2;T_2$	T_3	$R_0;T_0$	T_1	R_2	$R_2;T_2$	R_3	$R_0;T_0$	R_1
R_3	R_3	Q	R_1	P	R_3	T_3	P	T_1	Q

I sottoinsiemi U_4 e V_4 non sono chiusi rispetto al prodotto e pertanto non sono sottogruppi (si osservi inoltre che i sottogruppi R_4 e T_4 non sono fra loro permutabili, non coincidendo U_4 e V_4). Il sottogruppo dei movimenti rigidi W_4 , costituito dalle rotazioni, dalle riflessioni e dai prodotti delle rotazioni per le riflessioni (cioè delle glisso – riflessioni P e Q), è ovviamente chiuso rispetto al prodotto (infatti dalla composizione degli elementi non nascono nuovi elementi); pertanto i suoi elementi esauriscono tutti i possibili movimenti rigidi. Esso ha 8 elementi, è non – abeliano e non – ciclico, e ha la tavola di composizione sotto riportata.

	$R_0;T_0$	R_1	$R_2;T_2$	R_3	T_1	T_3	P	Q
$R_0;T_0$	$R_0;T_0$	R_1	$R_2;T_2$	R_3	T_1	T_3	P	Q
R_1	R_1	$R_2;T_2$	R_3	$R_0;T_0$	P	Q	T_3	T_1
$R_2;T_2$	$R_2;T_2$	R_3	$R_0;T_0$	R_1	T_3	T_1	Q	P
R_3	R_3	$R_0;T_0$	R_1	$R_2;T_2$	Q	P	T_1	T_3
T_1	T_1	Q	T_3	P	$R_0;T_0$	$R_2;T_2$	R_3	R_1
T_3	T_3	P	T_1	Q	$R_2;T_2$	$R_0;T_0$	R_1	R_3
P	P	T_1	Q	T_3	R_1	R_3	$R_0;T_0$	$R_2;T_2$
Q	Q	T_3	P	T_1	R_3	R_1	$R_2;T_2$	$R_0;T_0$

Riprendendo allora dall'elenco delle sostituzioni su 4 lettere i soli movimenti rigidi, si definiscono i cambi di verso degli assi coordinati, in corrispondenza ai possibili differenti movimenti rigidi:

1. $R_0;T_0$ $\begin{cases} X \equiv x \\ Y \equiv y \end{cases}$
2. R_1 $\begin{cases} X \equiv y \\ Y \equiv -x \end{cases}$
3. $R_2;T_2$ $\begin{cases} X \equiv -x \\ Y \equiv -y \end{cases}$
4. R_3 $\begin{cases} X \equiv -y \\ Y \equiv x \end{cases}$
5. T_1 $\begin{cases} X \equiv -x \\ Y \equiv y \end{cases}$
6. T_3 $\begin{cases} X \equiv x \\ Y \equiv -y \end{cases}$
7. P $\begin{cases} X \equiv y \\ Y \equiv x \end{cases}$
8. Q $\begin{cases} X \equiv -y \\ Y \equiv -x \end{cases}$



1.

Il gruppo di sostituzione S_8 ha ben $40320 = 8!$ elementi, ma solo il suo sottogruppo rigido serve per conoscere tutti i possibili movimenti di un sistema di riferimento costituito da tre assi coordinati, facendo specifico riferimento alle permutazioni su 8 lettere, coincidenti con gli 8 vertici di un cubo, non lacerato dai suddetti movimenti / permutazioni. Il sottogruppo rigido del gruppo di sostituzione S_8 è costituito da 48 elementi distinti, è non – abeliano e non – ciclico; in esso si individuano molti sottogruppi differenti fra i quali quelli delle rotazioni, quelli delle riflessioni. La certezza della chiusura del suddetto sottogruppo rigido è data dalla sua tavola di composizione dove non si generano elementi esterni al sottogruppo stesso, cosa che ne fa un sottogruppo (chiuso) e non solo un insieme ordinato. Gli elementi del sottogruppo rigido sono sotto indicati, nel prosieguo, con specifico riferimento al loro significato geometrico:

1.	1 2 3 4 5 6 7 8	identità
2.	4 1 2 3 8 5 6 7	rotazioni attorno all'asse z
3.	3 4 1 2 7 8 5 6	
4.	2 3 4 1 6 7 8 5	
5.	4 3 7 8 1 2 6 5	rotazioni attorno all'asse x
6.	8 7 6 5 4 3 2 1	
7.	5 6 2 1 8 7 3 4	
8.	2 6 7 3 1 5 8 4	rotazione attorno all'asse y
9.	6 5 8 7 2 1 4 3	
10.	5 1 4 8 6 2 3 7	
11.	1 5 6 2 4 8 7 3	rotazioni attorno ai vertici
12.	1 4 8 5 2 3 7 6	
13.	6 7 3 2 5 8 4 1	
14.	8 4 3 7 5 1 2 6	
15.	3 2 6 7 4 1 5 8	
16.	6 2 1 5 7 3 4 8	
17.	3 7 8 4 2 6 5 1	
18.	8 5 1 4 7 6 2 3	
19.	7 3 2 6 8 4 1 5	rotazioni attorno alla mezzeria degli spigoli
20.	4 8 5 1 3 7 6 2	
21.	7 8 4 3 6 5 1 2	
22.	2 1 5 6 3 4 8 7	
23.	7 6 5 8 3 2 1 4	
24.	5 8 7 6 1 4 3 2	

Nel prosieguo, si hanno specularità dirette dal numero 25 al numero 32 e trasformazioni speculari composte dal numero 33 al numero 48.

Per esigenze di brevità, la tavola di composizione delle 48 simmetrie spaziali è omessa, non essendo concettualmente dissimile da quella delle 8 simmetrie planari.

Le Figure A.1, A.2, A.3 e A.4 mostrano l'identità ed i successivi primi 32 elementi del suddetto sottogruppo rigido, raggruppate come rotazioni attorno ai centri delle facce ed alle mezzerie degli spigoli, rotazioni intorno ai vertici e specularità elementari.

25.	5	6	7	8	1	2	3	4	specularità elementari
26.	2	1	4	3	6	5	8	7	
27.	4	3	2	1	8	7	6	5	
28.	3	2	1	4	7	6	5	8	
29.	1	4	3	2	5	8	7	6	
30.	6	2	3	7	5	1	4	8	
31.	1	5	8	4	2	6	7	3	

32.	1	2	5	6	4	3	7	8	specularità composte
33.	8	7	3	4	5	6	2	1	
34.	8	5	6	7	4	1	2	3	
35.	7	8	5	6	3	4	1	2	
36.	6	7	8	5	2	3	4	1	
37.	8	7	3	4	5	6	2	1	
38.	4	3	2	1	8	7	6	5	
39.	1	2	6	5	4	3	7	8	
40.	6	2	3	7	5	1	4	8	
41.	2	1	4	3	6	5	8	7	
42.	1	5	8	4	2	6	7	3	
43.	3	7	6	2	4	8	1	5	
44.	8	4	1	5	7	3	2	6	
45.	3	4	8	7	2	1	5	6	
46.	6	5	1	2	7	8	4	3	
47.	3	2	1	4	7	6	5	8	
48.	1	4	3	2	5	8	7	6	

E' allora, del tutto, evidente l'inutilità di elencare 40320 elementi, per poi studiarne al massimo 48.

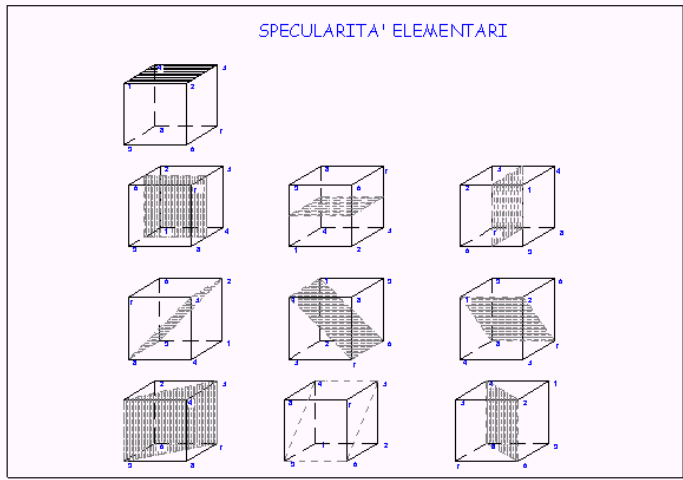
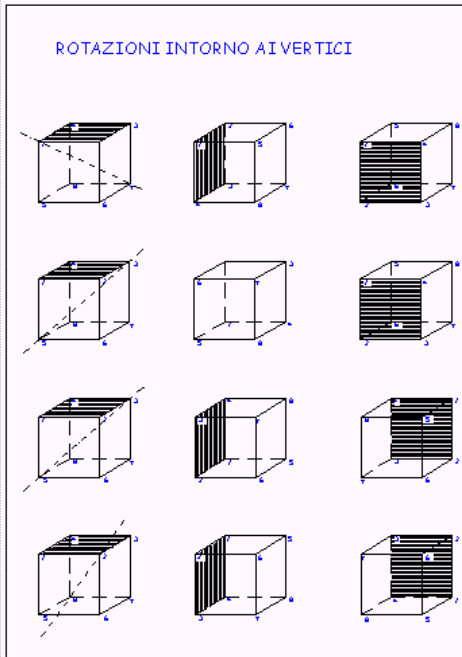
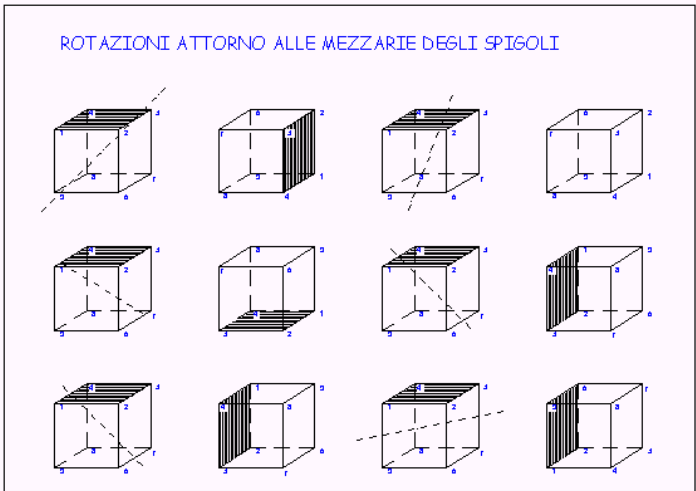
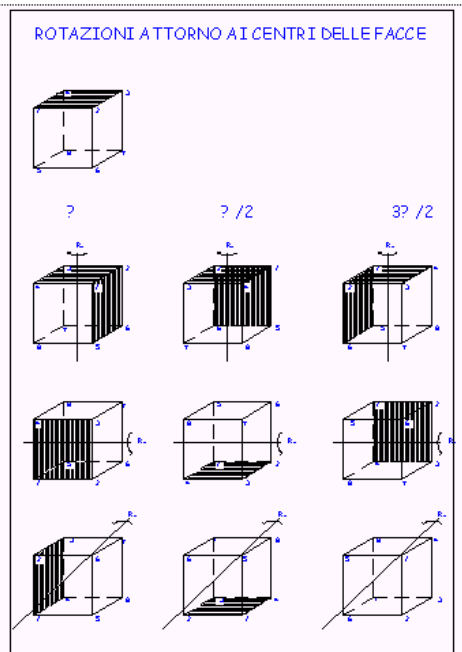


Fig. A.1 – Rotazioni attorno ai centri delle facce

Fig. A.2. – Rotazioni attorno alle mezzarie degli spigoli

Fig. A.3 – Rotazioni intorno ai vertici

Fig. A.4 – Specularità elementari

E' curioso notare come i numeri 7 e 32, ottenibili dai sottogruppi rigidi dei gruppi di sostituzione S_4 e S_8 tralasciando, nel primo caso, l'identità e, nel secondo, l'identità e tutte le trasformazioni composte, siano numeri già trovati nei conteggi delle relazioni topologiche e geometriche fra elementi (inoltre anche il numero 17, già trovato negli stessi conteggi, si ottiene comprendendo tutte le rotazioni più complesse del gruppo di sostituzione S_8 , attorno ai centri delle facce ed intorno ai vertici, e tralasciando le più semplici rotazioni attorno alla mezzaria degli spigoli).

APPENDICE B – I GRUPPI DI SIMMETRIE

La proibizione di un'arte figurativa per gli Ebrei e per gli Arabi portò allo sviluppo di un'arte puramente astratta e geometrica, ed all'esplorazione dei possibili tipi di decorazione murale. In questo campo, il risultato più elevato fu raggiunto, a Granada nel XIV secolo, con le pavimentazioni dell'Alhambra. Benché il numero di decorazioni murali sia pressoché illimitato, esse sono invece limitate per quanto riguarda il tipo di simmetria adottato per la loro ripetizione. Da un punto di vista matematico, le simmetrie esibite da queste decorazioni possono essere classificate in base alle possibili trasformazioni (costituenti gli elementi dei gruppi di simmetrie) che lasciano invariate: traslazioni lungo una retta, riflessioni rispetto ad una retta e rotazioni attorno ad un punto.

Nel 1891, Fedorov dimostrò che esistono solo 7 tipi diversi di simmetrie per i fregi lineari e 17 per le pavimentazioni planari. Inoltre i gruppi planari possono esibire simmetrie rotazionali solo con angoli di 180° , 120° , 90° , 60° , cioè di tipo assiale, triangolare, quadrato ed esagonale. Se gli oggetti lineari e planari simmetrici più comuni sono le decorazioni, gli oggetti spaziali simmetrici più noti sono i cristalli e, infatti a partire dal 1849, Bravais applicò proprio alla cristallografia la teoria dei gruppi, recentemente costruita. Inoltre nel 1890, prima di dimostrare l'analogo risultato per i gruppi di simmetrie lineari e planari, Fedorov aveva già dimostrato che esistono soltanto 230 tipi diversi di simmetrie spaziali.

La prima parte del 18° problema di Hilbert chiedeva se, per ogni n , i gruppi di simmetrie a n dimensioni sono un numero finito. Nel 1910, una risposta positiva fu data da Ludwig Bieberbach; tuttavia ancora oggi non si conosce una relazione esplicita che dia il numero di tali gruppi per un qualsiasi n dato; infatti solo negli anni '70, si è infatti riusciti a dimostrare che esistono 4783 gruppi di simmetrie quadridimensionali.

Trasformazioni e lattici

Si definisce simmetria una invarianza rispetto ad un gruppo di trasformazioni e, qualora la trasformazione preservi la distanza, essa è chiamata isometria. Nel piano, esistono quattro tipi di isometrie: traslazione, rotazione, riflessione e glisso – riflessione. Si può notare come la rotazione possa essere evitata, sostituendola con due opportune riflessioni, come del resto la traslazione; inoltre la glisso - riflessione si può ridurre ad una riflessione, seguita da una traslazione nella stessa direzione. Pertanto si definisce la simmetria geometrica un qualunque movimento che si ottenga combinando riflessioni e due figure sono dette geometricamente simmetriche (o isometriche), se è possibile passare da una all'altra mediante una simmetria geometrica.

Una volta introdotte e classificate le geometrie, è possibile usarle per determinare il grado di simmetria di una figura: infatti una figura è tanto più simmetrica, quante più simmetrie possiede. Si definisce gruppo diedrale di ordine n , l'insieme delle simmetrie di una figura regolare, con n braccia uguali, lasciata invariata da n rotazioni ed n riflessioni. Si definisce altresì gruppo ciclico di ordine n , l'insieme delle simmetrie di una figura regolare non - stellata, con n braccia uguali, lasciata invariata da n rotazioni, ma non da alcuna riflessione. I gruppi diedrali e ciclici sono i soli insiemi di simmetrie possibili per i rosoni che ammettono solo un numero finito di simmetrie ed un centro (ossia un punto non mosso da alcuna simmetria). Se invece di un solo punto rimane invariato un intero segmento, allora l'unica possibile simmetria è una riflessione.

Definizione di traslazione: una traslazione si ha se, spostando una figura lungo una certa direzione ed ad una certa distanza, essa ricade su se stessa. Le traslazioni avvengono lungo una sola direzione per le simmetrie lineari, lungo due direzioni per quelle planari e lungo tre direzioni per quelle spaziali.

Definizione di rotazione: una rotazione tiene fisso un punto del piano e ruota tutto il resto di un certo angolo attorno al punto stesso. L'angolo di rotazione può essere arbitrario, ma per le simmetrie considerate, l'angolo deve essere un preciso sottomultiplo di 360° e precisamente solo gli angoli pari a 180° , 120° , 90° e 60° sono considerati ammissibili. L'ordine di una rotazione è il numero di ripetizioni della rotazione scelta, per riportare la figura alla configurazione iniziale; di conseguenza, una rotazione di 60° ha ordine 6, una rotazione di 90° ha ordine 4, una rotazione di 120° ha ordine 3 ed una rotazione di 180° ha ordine 2.

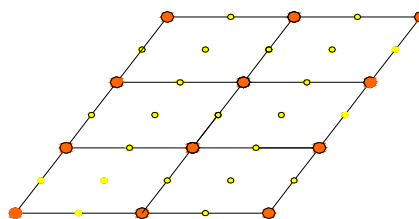
Definizione di riflessione: una riflessione fissa una linea nel piano, chiamata asse di riflessione, e scambia i punti da un lato dell'asse con i punti dall'altro lato dell'asse, alla stessa distanza dall'asse. Essa è chiamata riflessione, perché lo stesso fenomeno accade con una riflessione attraverso uno specchio.

Definizione di glisso – riflessione: una glisso – riflessione si compone di una riflessione attraverso un asse e una traslazione parallela all'asse stesso.

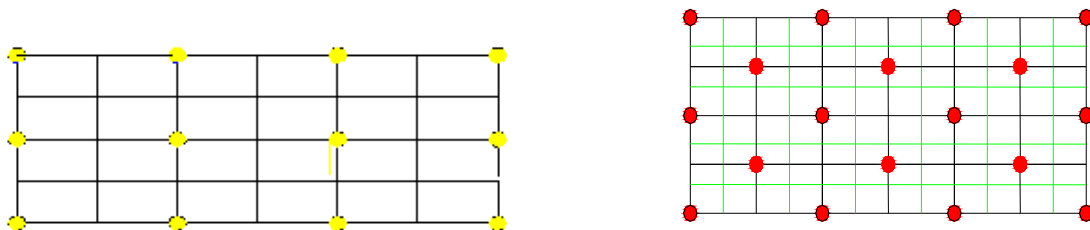
L'insieme delle traslazioni di un punto, attraverso le simmetrie di traslazione di un figura, forma un lattice. Si possono classificare i lattice in 5 tipi diversi.

- ❑ se un lattice ha una regione fondamentale quadrata, è detto lattice quadrato;
- ❑ se un lattice ha una regione fondamentale rombica, con angoli di 60° , è detto lattice esagonale, poiché i punti più vicini a qualunque altro punto dello stesso lattice sono i vertici di un esagono regolare;
- ❑ se un lattice ha una regione fondamentale rombica, con angoli qualsiasi, è detto lattice rombico;
- ❑ se invece un lattice ha una regione fondamentale rettangolare, è detto lattice rettangolare;
- ❑ se, un lattice ha una regione fondamentale a parallelogramma (con angoli non retti e lati non tutti uguali tra loro), è detto un lattice a parallelogramma.

Lattice a parallelogramma: i punti arancio indicano i punti del lattice e le linee segnano i parallelogrammi. Oltre alle traslazioni esistono simmetrie di mezzo giro. Alcune rotazioni hanno punti del lattice come punti fissi, altre hanno punti che cadono a metà tra due punti di lattice. Riassumendo il gruppo di simmetrie ha traslazioni e rotazioni di 180° , ma non ha riflessioni.

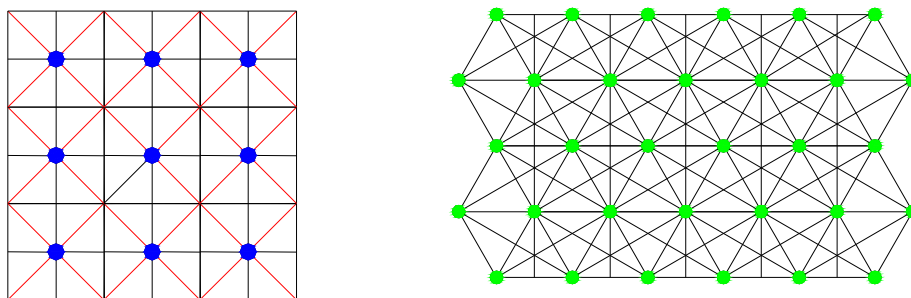


Lattice rettangolare: i punti gialli indicano i punti del lattice e le linee segnano i rettangoli. Accanto alla traslazione e alla rotazione di 180° , il lattice ha anche la riflessione. I centri delle rotazioni giacciono nelle intersezioni degli assi di riflessione. Non si hanno glisso – riflessioni. Riassumendo il gruppo di simmetrie ha traslazioni, rotazioni di 180° e riflessioni.



Lattice rombico: i punti rossi indicano i punti del lattice. Il lattice ha traslazioni, riflessioni e rotazioni di 180° proprio come il lattice rettangolare, ma in aggiunta ha anche una glisso – riflessione i cui assi sono disegnati in verde. Alcuni centri di rotazione coincidono con le intersezioni degli assi di riflessione, altri invece coincidono con le intersezioni degli assi di glisso – riflessione. Riassumendo il gruppo di simmetrie ha traslazioni, rotazioni di 180° , riflessioni e glisso – riflessioni.

Lattice quadrato: i punti blu indicano i punti del lattice. Dal momento che un quadrato è sia un rombo che un rettangolo, esso ha le simmetrie tanto di quello rombico, quanto di quello rettangolare, e molti assi di riflessione e glisso – riflessione. Gli assi di riflessione sono inclinati di 45° e passano per ciascun punto del lattice; quelli di glisso – riflessione passano invece a metà tra assi paralleli di riflessione. Oltre a numerose rotazioni di 180° , il lattice ha anche rotazioni di 90° ; i loro centri coincidono con i punti del lattice oppure sono equidistanti dai quattro punti più vicini del lattice e posti dove si incontrano i quattro assi. Riassumendo il gruppo di simmetrie ha traslazioni, rotazioni di 180° e 90° , riflessioni e glisso – riflessioni.



Lattice esagonale: i punti verdi indicano i punti del lattice. Il lattice ha simmetrie di rotazione di 60° , riflessioni e glisso - riflessioni. I punti fissi di queste rotazioni sono i punti del lattice. In ogni punto di lattice, si incontrano sei assi di rotazione. Riassumendo il gruppo di simmetrie ha traslazioni, rotazioni di 60° , 120° e 180° , riflessioni e glisso – riflessioni.

Se una composizione ha un riflessione come simmetria, il suo lattice può essere rombico, rettangolare o quadrato; se ha una rotazione di 90° , il lattice deve essere quadrato, mentre se ha una rotazione di 60° o 120° , il lattice deve essere esagonale. Si noti poi come le restrizioni, tenuto conto delle particolarità geometriche specifiche, siano ancora più severe nelle simmetrie di traslazione di un corpo dello spazio 3D.

Simmetrie lineari

Si chiamano simmetrie lineari quelle simmetrie che hanno una sola direzione di traslazione. Esse si distinguono in 7 gruppi, frequentemente rappresentata mediante fregi (o greche). La notazione usata per identificare i gruppi è la notazione cristallografica, dove:

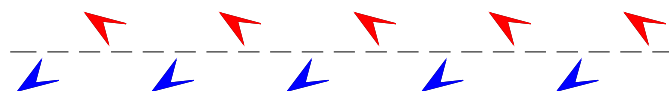
- ❑ il primo simbolo è sempre una p ;
- ❑ il secondo simbolo può essere un 1 od una m , ed indica la presenza (m) o l'assenza (1) di una riflessione ortogonale alla direzione di traslazione;
- ❑ il terzo simbolo può essere un 1, una m od una a , ed indica la presenza di una riflessione (m), una glisso – riflessione (a) o nessuna delle due (1), nella direzione parallela alla direzione di traslazione;
- ❑ l'ultimo simbolo può essere un 1 o un 2, ed indica la presenza (2), o l'assenza (1) di una rotazione di π .

Per ciascuno gruppo di simmetrie, le linee continue rappresentano gli assi di riflessione, i punti i centri di rotazione e la linee tratteggiate gli assi di glisso – riflessione non banali.

- ❑ **p111** Questo gruppo contiene infinite traslazioni: F F F F F F F F F F.



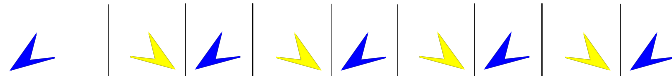
- ❑ **p1a1** Questo gruppo contiene infinite traslazioni e glisso – riflessioni: p b p b p b.



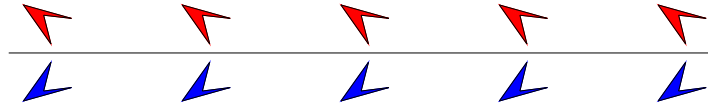
- ❑ **p112** Questo gruppo contiene infinite traslazioni e rotazioni di 180° (i cui i centri sono una serie di punti equidistanti): S S S S S S S S S S.



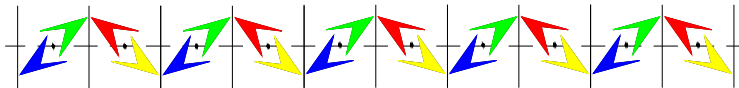
- ❑ **pm11** Questo gruppo contiene infinite traslazioni e riflessioni su rette ortogonali alla direzione di traslazione: A A A A A A A A A A.



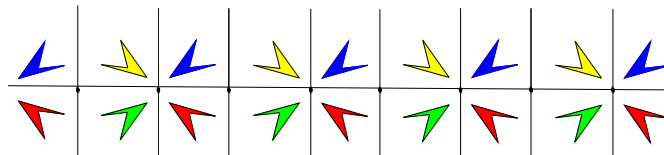
- **p1m1** Questo gruppo è formato da una sola riflessione su una retta parallela alla direzione di traslazione e contiene infinite traslazioni: E E E E E E E E E E.



- **pma2** Questo gruppo è formato da una rotazione di 180° ed una glisso – riflessione, e contiene infinite traslazioni e riflessioni su rette ortogonali alla direzione di traslazione: bd pq bd pq bd pq.



- **pmm2** Questo gruppo è formato da due riflessioni con assi tra loro ortogonali e contiene infinite traslazioni e rotazioni di 90° e 180° (i cui centri sono una serie di punti equidistanti): X X X X X.



Simmetrie planari

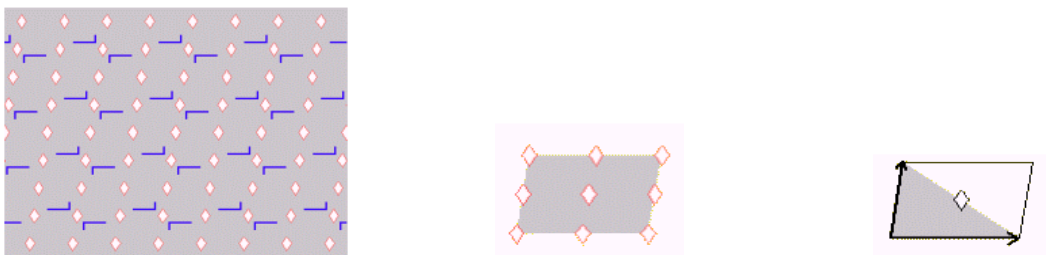
Si chiamano simmetrie planari quelle simmetrie che hanno due direzioni di traslazione. Esse si distinguono in 17 gruppi, frequentemente rappresentate mediante mosaici; adottando la notazione cristallografica, si ha:

- per il primo simbolo: *p* (primitiva),
 - c* (centrata, dove le direzioni di traslazione e/o degli assi di riflessione non coincidono con gli assi del lattice o della regione fondamentale);
- per il secondo simbolo, un numero che indica il numero massimo di rotazioni ammissibili;
- per il terzo simbolo: *m* (dall'inglese: mirror, cioè specchio) indica la presenza di una riflessione,
 - g* (dall'inglese: glide, cioè scivolata) indica la presenza di una glisso – riflessione,
 - 1 indica la loro assenza nella prima direzione di traslazione;
- per l'ultimo simbolo, *m*, *g* o 1 ed indica rispettivamente la presenza di una riflessione, una glisso – riflessione o la loro assenza, nella seconda direzione di traslazione.

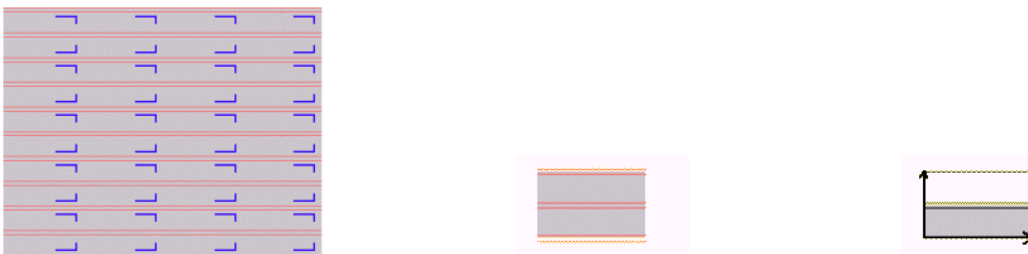
- **p111 = p1** Questo gruppo contiene sole traslazioni i cui assi possono essere inclinati di un angolo qualsiasi. Il lattice è a parallelogramma e la regione fondamentale un parallelogramma.



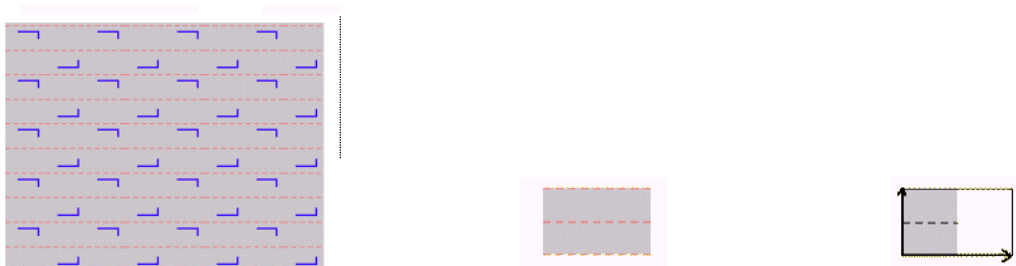
- **p211 = p2** Questo gruppo contiene traslazioni e rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°). Gli assi di traslazione possono essere inclinati di un angolo qualsiasi. Il lattice è a parallelogramma e la regione fondamentale la metà triangolare di un parallelogramma.



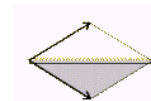
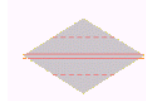
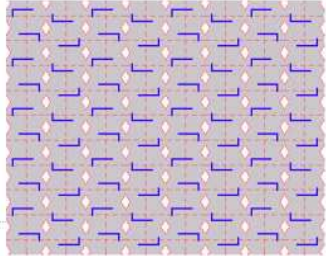
- **p1m1 = pm** Questo gruppo contiene traslazioni e riflessioni. Gli assi di riflessione sono paralleli ad un asse di traslazione e perpendicolari all'altro. Non esistono rotazioni, né glisso – riflessioni. Il lattice è rettangolare e la regione fondamentale la metà rettangolare di un rettangolo.



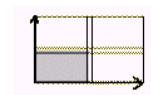
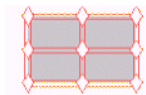
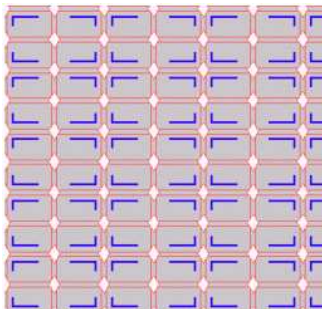
- **p1g1 = pg** Questo gruppo contiene traslazioni e glisso – riflessioni. La direzione della glisso – riflessione è parallela ad un asse di traslazione e perpendicolare all'altro. Non esistono rotazioni, né riflessioni. Il lattice è rettangolare e la regione fondamentale la metà rettangolare di un rettangolo (ortogonale a quella del gruppo precedente).



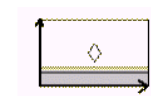
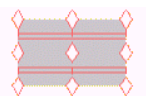
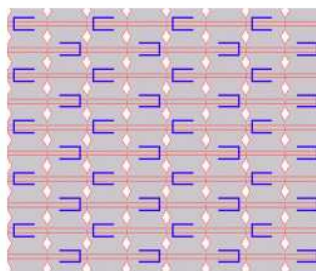
- c1m1 = cm** Questo gruppo contiene traslazioni, riflessioni con assi paralleli e glisso – riflessioni. Le traslazioni possono essere inclinate di un angolo qualsiasi, ma gli assi di riflessione bisecano gli angoli formati dalle traslazioni. Non esistono rotazioni. Il lattice è rombico e la regione fondamentale la metà di un rombo.



- p2mm = pmm** Questo gruppo contiene traslazioni, doppie riflessioni e rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°). Anche in questo caso, gli assi di traslazione possono essere inclinati di un angolo qualsiasi. Non esistono glisso – riflessioni. Il lattice è rettangolare e la regione fondamentale un quarto di un rettangolo.

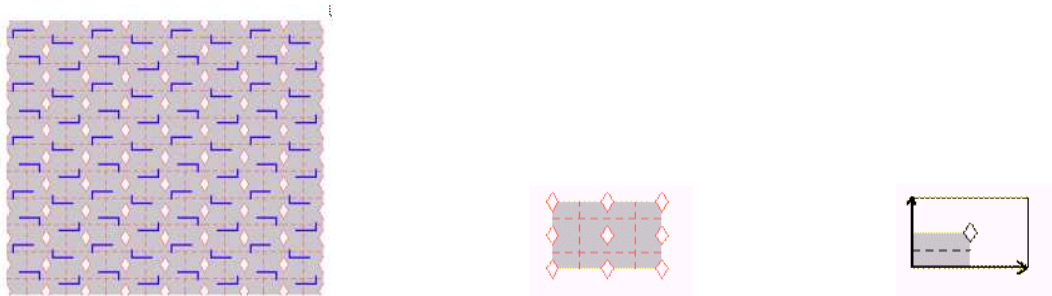


- p2mg = pmg** Questo gruppo contiene traslazioni, riflessioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°) e glisso – riflessioni. I centri di rotazione non giacciono sugli assi di riflessione. Il lattice è rettangolare e la regione fondamentale un rettangolo per le sole traslazioni, mentre essa è un quarto di un rettangolo (a striscia) per l'intero gruppo. Si noti come questo fatto renda questo gruppo di simmetrie, come alcuni altri gruppi nel seguito, formalmente un po' più complesso.



- p2gg = pgg** Questo gruppo contiene traslazioni, glisso – riflessioni e rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°). Gli assi di glisso – riflessione sono perpendicolari ed i centri di rotazione non giacciono su

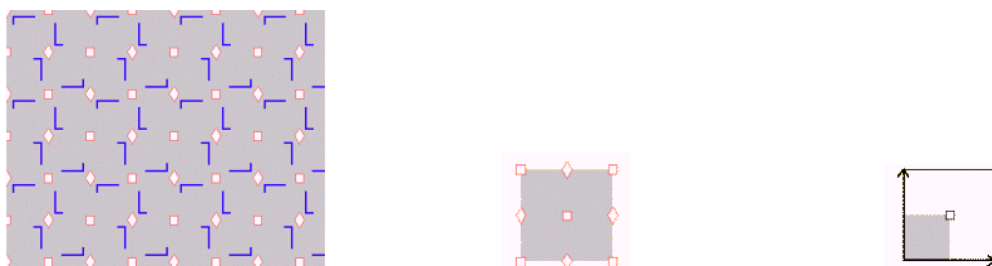
questi assi. Non esistono riflessioni. Il lattice è rettangolare e la regione fondamentale un rettangolo per le sole traslazioni, mentre essa è un quarto di un rettangolo per l'intero gruppo.



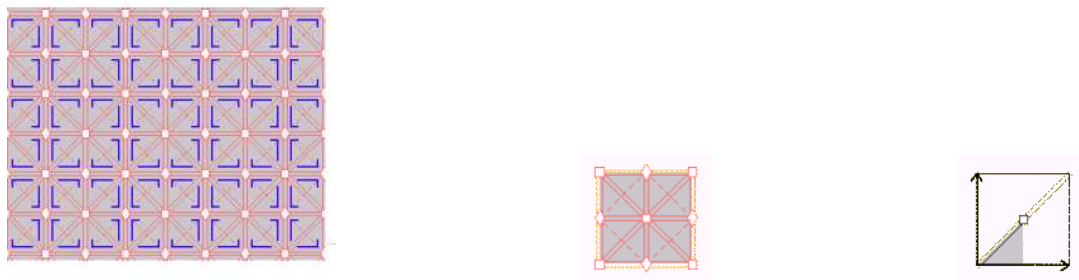
- c2mm = cmm** Questo gruppo contiene traslazioni, doppie riflessioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°) e doppie glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione sono perpendicolari ed i centri di rotazione non giacciono su questi assi. Il lattice è rombico e la regione fondamentale un rombo per le sole traslazioni, mentre essa è un quarto di un rombo per l'intero gruppo.



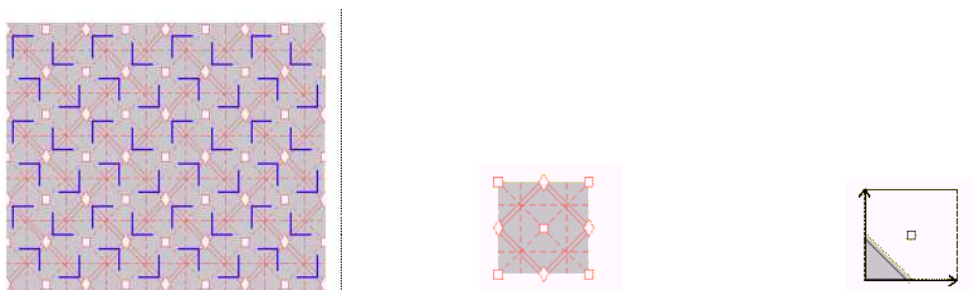
- p411 = p4** Questo gruppo contiene traslazioni e rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°) e 4 (ovvero di 90°). I centri di rotazione di ordine 2 sono a metà tra i centri di rotazione di ordine 4. Non esistono riflessioni, né glisso – riflessioni. Il lattice è quadrato e la regione fondamentale un quadrato per le sole traslazioni, mentre essa è un quarto di quadrato per l'intero gruppo.



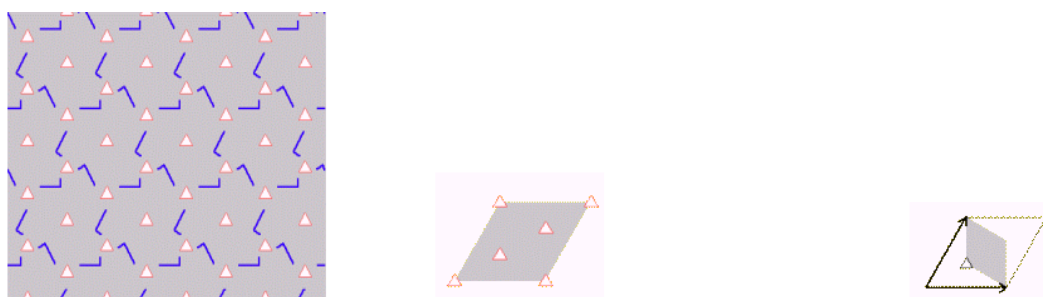
- p4mm = p4m** Questo gruppo contiene traslazioni, quadruple riflessioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°) e 4 (ovvero di 90°) e doppie glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione sono inclinati di un angolo di 45° ; pertanto essi passano per i centri di rotazione di ordine 4. Il lattice è quadrato e la regione fondamentale un triangolo pari all'ottava parte (centripeta) di un quadrato.



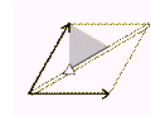
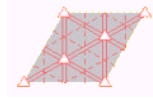
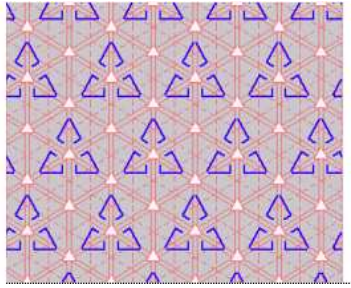
- **p4gm = p4g** Questo gruppo contiene traslazioni, doppie riflessioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°) e 4 (ovvero di 90°) e quadruple glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione sono perpendicolari e nessun centro di rotazione giace sugli assi di riflessione. Il lattice è quadrato e la regione fondamentale un triangolo pari all'ottava parte (perimetrale) di un quadrato.



- **p311 = p3** Questo gruppo contiene traslazioni e rotazioni di ordine 3 (ovvero di 120°). Non esistono riflessioni, né glisso – riflessioni. Il lattice è rombico e la regione fondamentale un rombo pari alla terza parte (centrale) di un rombo. Si osservi a riguardo, come i quattro angoli del rombo (due pari a 60° e due pari 120°), proprio per i loro particolari valori di ampiezza, permettano una diversa e più complessa organizzazione dello spazio piano in esagoni (raggruppando tre rombi alla volta). Si noti poi, come la stessa osservazione valga anche per tutti gli altri quattro gruppi illustrati di seguito.

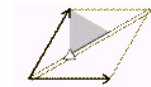
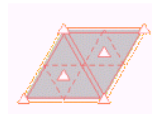
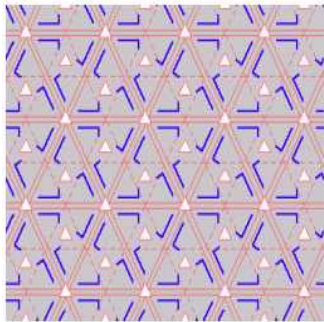


- **p31m = p31m** Questo gruppo contiene traslazioni, triple riflessioni, rotazioni di ordine 3 (ovvero di 120°) e triple glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione sono inclinati di 60° uno con l'altro ed alcuni centri di rotazione sono sugli assi di riflessione. Il lattice è rombico e la regione fondamentale un triangolo, pari alla metà del rombo di cui al caso precedente.

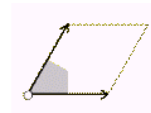
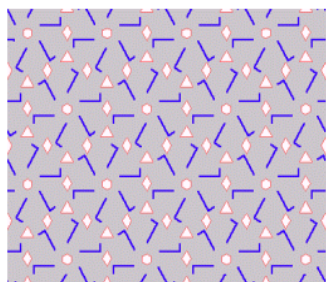


- **p3m1 = p3m1** Questo gruppo contiene traslazioni, triple riflessioni, rotazioni di ordine 3 (ovvero di 120°) e triple glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione sono inclinati di 60° e tutti i centri di rotazione giacciono sugli assi di riflessione. Il lattice è rombico e la regione fondamentale lo stesso triangolo del caso precedente.

...

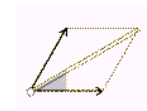
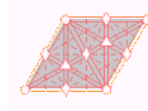
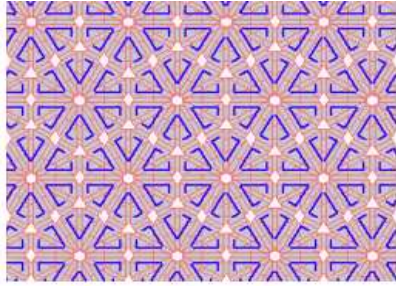


- **p611 = p6** Questo gruppo contiene traslazioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°), 3 (ovvero di 120°) e 6 (ovvero di 60°). Non esistono riflessioni, né glisso –riflessioni. Il lattice è rombico e la regione fondamentale un aquilone simmetrico² (apicale).



- **p6mm = p6m** Questo gruppo contiene traslazioni, sestuple riflessioni, rotazioni di ordine 2 (ovvero di 180°), 3 (ovvero di 120°) e 6 (ovvero di 60°) e sestuple glisso – riflessioni. Gli assi di riflessione incontrano tutti i centri di rotazione e, nei centri delle rotazioni di ordine 6, si incontrano i sei assi di riflessione inclinati di 30° . Il lattice è rombico e la regione fondamentale la metà dello stesso aquilone.

² E' comunemente detto aquilone un quadrilatero con le diagonali parallele ed aquilone simmetrico un quadrilatero, dove una delle due diagonali è divisa a metà dall'altra diagonale.



Simmetrie spaziali

Si chiamano simmetrie spaziali quelle simmetrie che hanno tre direzioni di traslazione. Un lattice 3D è un insieme discreto di punti generato da tre vettori linearmente indipendenti. Questi vettori generano un gruppo additivo discreto che è noto, in algebra, come il gruppo di traslazione dei lattici. Ogni elemento può essere associato a un punto del lattice. Come per tutti gli oggetti finiti, la geometria del lattice è descritta dal suo gruppo di simmetrie, cioè dal gruppo completo di isometrie che lo lascia invariato. Esistono 7 sistemi di cristalli la cui suddivisione rappresenta l'arrangiamento dei gruppi in famiglie di sottogruppi:

- triclinico
- monoclinico
- ortorombico
- trigonale
- tetragonale
- esagonale
- cubico.

Combinando i 7 sistemi di cristalli, si ottengono i 14 lattici di Bravais (7 primitivi e 7 centrati), riportati nella tabella sottostante. A partire dai 14 lattici di Bravais, il numero 17 può essere messo in evidenza dividendo opportunamente, in due parti, i lattici i cui gli ordini, eccessivamente sparsi, variano da meno di 8 a più di 12 (ovvero isolando dagli altri lattici di Bravais le classi $6/mmm$, $m\bar{3}$ e $\bar{4}3m$, aventi ciascuno ordine 24). Infatti tenendo conto della limitazione cristallografica (dove le rotazioni presentano soltanto gli ordini 1, 2, 3, 4 e 6) esistono 32 gruppi di simmetrie, mentre senza alcuna limitazione, si hanno 230 gruppi di simmetrie. In questo caso, la dimensione dei 10 ordini varia da 1 a 48 (cioè 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48). Pertanto tenuto conto che il numero 14 dei lattici di Bravais è il doppio del numero 7, tutti i numeri ricordano i numeri già trovati, tenendo conto dei gruppi di simmetrie lineari e planari, nonché quelli di tutte le relazioni topologiche e geometriche, precedentemente illustrate.

Nella figura B.1 sono indicati i solidi di riferimento dei 32 gruppi di simmetrie dei cristalli (considerando la restrizione cristallografica) ed evidenziando, in grigio, le regioni di simmetria per ciascun elemento. L'illustrazione delle 230 simmetrie, ottenute senza alcuna limitazione, è invece omessa, per motivi di brevità ed in quanto inessenziale per il prosieguo.

Sistemi:	N.	Classi:	Ordini:	N. di gruppi:	Lattici di Bravais e loro suddivisione:	
1. triclino	1	1	1	1	1	1
	2	$\bar{1}$	2	1	1	1
2. monoclino	3	2	2	3	3	3
	4	<i>m</i>	2	4	4	4
	5	<i>2/m</i>	4	6	6	7
3. ortorombico	6	222	4	9	9	12
	7	<i>mm2</i>	4	22	13	16
	8	<i>mmm</i>	8	28	14	17
4. trigonale	16	3	3	4	4	4
	17	$\bar{3}$	6	2	2	2
	18	32	6	7	7	9
	19	<i>3m</i>	6	6	6	7
	20	$\bar{3}m$	12	6	6	7
5. tetragonale	9	4	4	6	6	7
	10	$\bar{4}$	4	2	2	2
	11	<i>4/m</i>	8	6	6	7
	12	422	8	10	10	13
	13	<i>4mm</i>	8	12	11	14
	14	$\bar{4}_2m$	8	12	11	14
	15	<i>4/mmm</i>	16	20	12	15
6. esagonale	21	6	6	6	6	7
	22	$\bar{6}$	6	1	1	1
	23	<i>6/m</i>	12	2	2	2
	24	622	12	6	6	7
	25	<i>6mm</i>	12	4	4	4
	26	$\bar{6}m2$	12	4	4	4
	27	<i>6/mmm</i>	24	4	4	5
7. cubico	28	23	12	5	5	6
	29	<i>m3</i>	24	7	7	10
	30	432	24	8	8	11
	31	$\bar{4}_3m$	24	6	6	8
	32	<i>m3m</i>	48	10	10	13




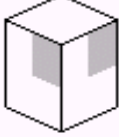



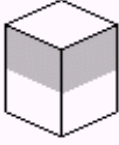
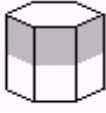



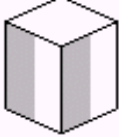


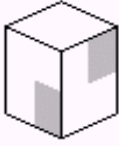





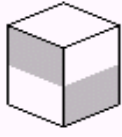
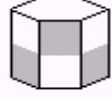


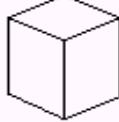
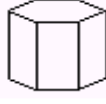
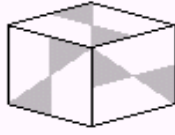
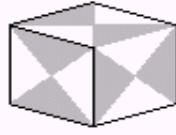

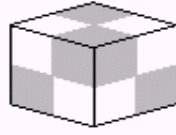
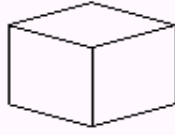
				
C_1	C_2	C_3	C_4	C_6
				
	C_{2v}	C_{3v}	C_{4v}	C_{6v}
				
C_s	C_{2h}	C_{3h}	C_{4h}	C_{6h}
				
	C_i		S_4	S_6
				
	D_2	D_3	D_4	D_6
				
	D_{2d}	D_{3d}		
				
	D_{2h}	D_{3h}	D_{4h}	D_{6h}
				
T	T_h	O	T_d	O_h

Fig. B.1 – I 32 gruppi di simmetrie dei cristalli

Un pensiero complementare di un matematico e filosofo inglese dei primi del '900, Godfrey H. Hardy, rileva come il matematico, come il pittore o il poeta, sia un creatore di forme e, se le forme che crea sono più durature delle loro, è perché le sue sono fatte di idee. A riguardo, poiché parte delle considerazioni che fanno capo alla modellazione di oggetti, come pure al mondo dei sistemi informativi territoriali, possono fondarsi sullo studio di sostituzioni e simmetrie, è interessante notare, come recentemente matematici e fisici abbiano compiuto passi nella direzione di una loro estensione, rispettivamente giungendo a definire tassellazioni non – periodiche nel piano ed scoprire quasi – cristalli nello spazio 3D. La figura B.2 mostra due elementi base (e precisamente la stella ed il sole di Penrose) di una tassellazione non – periodica dello stesso Penrose (fig. B.3) dove si notano, tra l'altro, pentagoni, decagoni e stelle a cinque punte.

Un'importante applicazione di questo puzzle di tessere, parzialmente irregolari, ricoprenti il piano, è trovata mediante un'estensione allo spazio 3D. Infatti la struttura cristallina, cioè la disposizione degli atomi, di alcuni gruppi di sostanze, dette quasicristalli (fig. B.4), non risponde alle leggi classiche della cristallografia, ma presenta una quasi simmetria quinaria, a rigore, proibita. A riguardo, si noti come generalmente i corpi solidi, allo stato amorfo, dispongano i loro atomi disposti in modo casuale e disordinato. Invece la scoperta delle tassellazioni non – periodiche (dei quasicristalli) individua forme intermedie, tra questo stato ed il mondo regolare ed ordinato dei cristalli con le loro simmetrie (binaria, ternaria, quaternaria e senaria, come mostrato dalle pavimentazioni di fig. B.5 e dagli schemi di cristalli di fig. B.6).

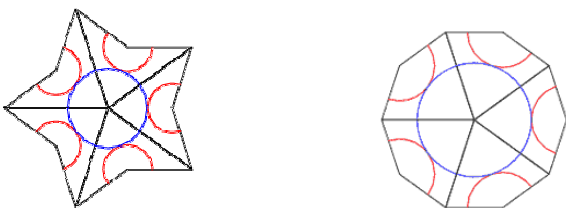


Fig. B.2 – La stella ed il sole di Penrose

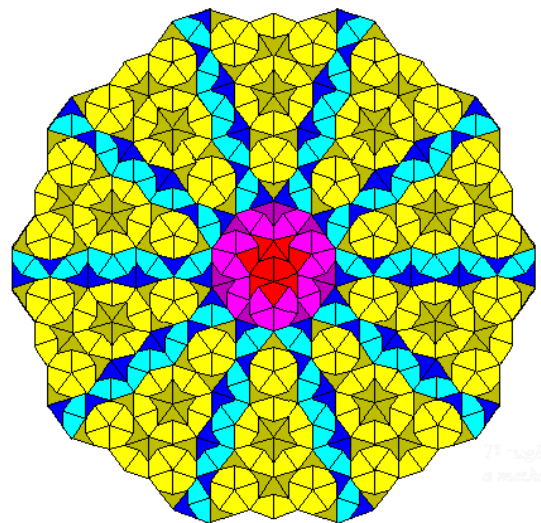


Fig. B.3 –Tassellazione non - periodica di Penrose

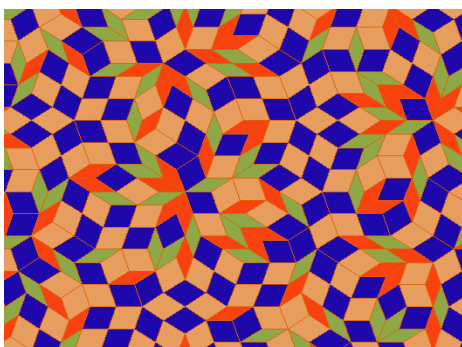
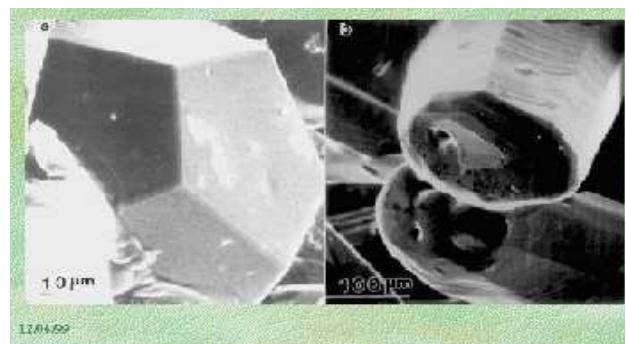


Fig. B.4 – (a) Tassellazione non – periodica 3D



(b) Esempi di quasicristalli

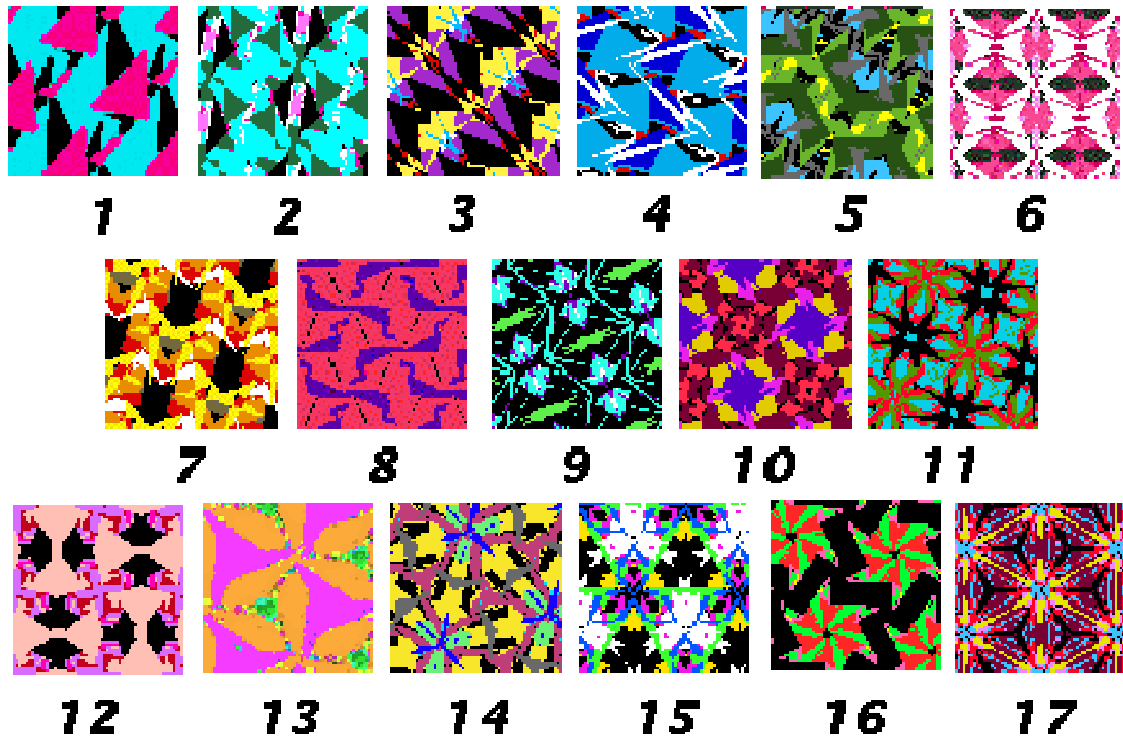


Fig. B.5 – Pavimentazioni corrispondenti alle simmetrie planari

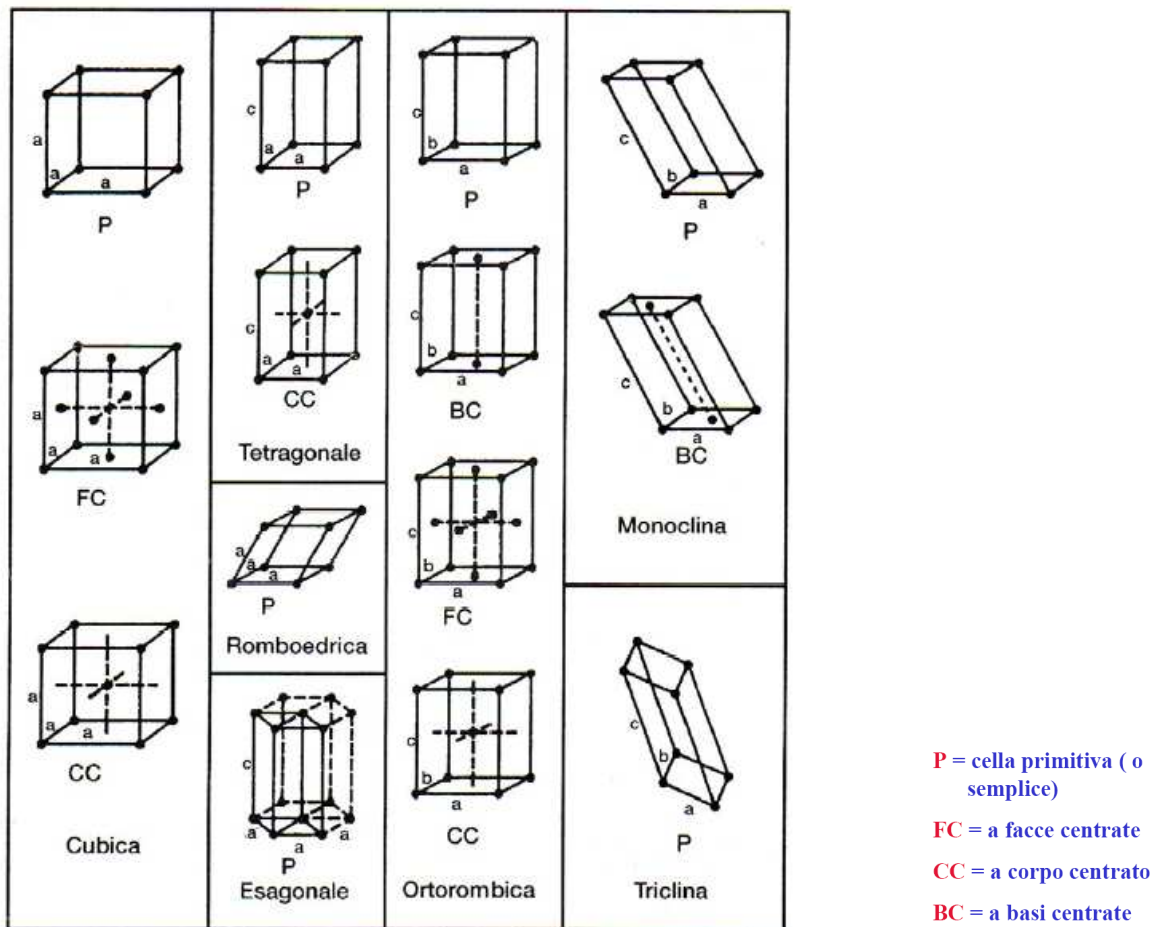


Fig. B.6 – Schemi di cristalli corrispondenti ai reticoli spaziali di Bravais

IV ALTRI ASPETTI DELLA CARTOGRAFIA INFORMATICA

Dopo aver parlato, a lungo, del mondo dei sistemi informativi a referenza spaziale ³, e dei suoi collegamenti con il mondo della matematica discreta, occorre dare alcune indicazioni per collegare l'intero discorso sulla cartografia informatica ai DSM (modelli digitali di superficie) ed alle mappe digitali con le loro trasformazioni di coordinate ⁴.

I modelli digitali di superficie (DSM) sono gli strumenti matematici che permettono di rappresentare numericamente una qualsiasi superficie. Essi sono altrimenti detti:

- ❑ modelli digitali delle altezze (DEM), se riferiti alla superficie (fisica) terrestre, oppure ad una sua qualsiasi porzione, grande o piccola;
- ❑ modelli digitali del terreno (DTM), se usati per rappresentare altri fenomeni diversi dalle quote (ad es., pendenze e curvature, oppure dati tematico territoriali di tipo: geografico, naturalistico, ambientale, demografico, sociologico, urbanistico, economico, ecc.), ma sempre riferiti al sistema terra, oppure ad una sua parte;
- ❑ modelli digitali di superficie (DSM), come il nome generico, se riferiti a superfici od oggetti, diversi dal sistema terra, nella loro totalità, oppure in qualche loro porzione.

Il tipo di rappresentazione fornita può essere scelta, a sua volta, tra una vasta gamma di possibilità:

- ❑ curve di livello;
- ❑ sezioni;
- ❑ profili;
- ❑ reticoli;
- ❑ punti isolati qualsiasi,
- ❑ mappe a sfumo o di colore;
- ❑ viste tridimensionali.

Infatti con l'espressione DSM si vuole porre l'attenzione non tanto sulle fasi iniziali e finali, d'acquisizione dei dati e d'archiviazione dei dati originari ed elaborati, quanto soprattutto sulla fase intermedia di trattamento dei dati, dove opportuni algoritmi della matematica applicata, dalla statistica al calcolo numerico, permettono di passare dall'uno all'altro tipo di rappresentazione.

³ I sistemi informativi a referenza spaziale (o georeferenziati, se riferiti al sistema terra o, più spesso, a sue parti, grandi o piccole) sono precisamente chiamati geografici (GIS), se hanno una referenza spaziale forte, indotta dalle coordinate, mentre sono solitamente detti territoriali (LIS), se hanno solo una referenza spaziale debole, dipendente da altre informazioni di luogo, ad es., gli indirizzi, le zone censuarie e le particelle catastali. Entrambi i sistemi possono poi essere costruiti con modalità estensibili ed anche essere dinamici e non, a seconda che i dati contenuti siano tempo varianti (cioè variabili nel tempo) o meno.

⁴ Un'osservazione importante deve rilevare come tutta la trattazione svolta e quella a seguire siano poco cartografiche, da un punto di vista classico. Infatti la cartografia geometrica è pressoché del tutto assente ed anche la cartografia informatica è quasi limitata al mondo dei GIS e dei LIS, mentre un discorso completo su altri aspetti della cartografia informatica dai DSM (modelli digitali di superficie) alle mappe digitali, con le loro trasformazioni di coordinate, è piuttosto contenuto e rinviato ad altri e differenti lavori. Tutto ciò è certamente vero ed il presente lavoro non vuole certamente costituire un testo base per lo studio della cartografia, ma mettere chiaramente in evidenza come la cartografia, oltre ad aver contribuito, da sempre (insieme alla geodesia ed accanto all'astronomia), a formare parti rilevanti della matematica applicata e della statistica (dove queste stesse parti hanno poi vissuto di vita propria, dando importanti sostegni alla formazione, allo sviluppo ed al consolidamento di altre scienze e/o altre tecniche, vicine e più lontane), abbia incontrato, più recentemente, le tecnologie dell'informazione, trovando in esse nuove ed importanti sinergie (insieme alla fotogrammetria ed al telerivamento): anche da qui ricadute significative, in varie direzioni, già esistono e/o sono comunque attese.

L'importanza e l'attualità della rappresentazione numerica deve oggi essere particolarmente sottolineata, essendo la base dei più moderni ed avanzati sviluppi nel settore cartografico dalla cartografia numerica ai sistemi informativi a referenza spaziale. La stessa importanza e la stessa attualità si ha anche per alcune applicazioni speciali. Infatti accanto alla formazione di banche dati geometrici, la costruzione di profili altimetrici, derivati dalla scansione fotogrammetrica di un modello stereoscopico, serve da supporto alla produzione di ortoimmagini, così come per la realizzazione di texture mapping. Inoltre la costruzione di profili altimetrici ed altre sezioni, riferite al sistema terra, costituisce uno strumento utile per localizzare e progettare impianti, infrastrutture, linee di trasporto e di comunicazione.

Un DTM può essere costruito con metodologie e procedure analoghe a quelle impiegate per la formazione di un DEM (o più in generale i DSM). In questo ambito, meritano di essere menzionati, i dati relativi ai movimenti e/o alle deformazioni della superficie (fisica) terrestre, oppure di una sua qualsiasi porzione, grande o piccola. La loro importanza ed attualità deve essere particolarmente sottolineata, proprio quando è diventato possibile effettuare il controllo, con speciali misure geodetiche – topografiche e fotogrammetriche o telerilevate, effettuate secondo le prescrizioni di nuove tecniche caratterizzate da elevate accuratezza, precisione, affidabilità, ripetitività e sicurezza.

La tradizionale rappresentazione cartografica dell'altimetria era effettuata con diversi procedimenti grafici:

- ❑ a sfumo, con diverse tonalità di grigio (od altro colore), oppure a macchie di colore, in entrambi i casi, con intensità crescente all'aumentare della quota (o all'aumentare della profondità per la batimetria marina e lacustre);
- ❑ a tratteggio, con tratto diretto lungo la direzione di massima pendenza, interrotto lungo gli impluvi (segnati con tratto più marcato), le linee di cresta e le zone pianeggianti (lasciate entrambe bianche);
- ❑ a curve di livello, interrotte negli impluvi (segnati a tratto), integrate da punti quotati isolati irregolarmente disposti (come illustrato nel punto appena seguente) e, se del caso, a tratteggio nelle zone eccessivamente inclinate;
- ❑ a punti quotati isolati, disposti irregolarmente su particolari morfologicamente rilevanti della superficie, oppure disposti irregolarmente su particolari morfologicamente rilevanti di profili altimetrici regolarmente cadenzati, nonché disposti regolarmente ai nodi di un reticolo artificiale aderente alla superficie (come pure disposti insieme regolarmente ed irregolarmente).

La moderna rappresentazione numerica dell'altimetria può originare solo da dati estratti con procedimenti digitali (automatici o manuali), costituiti da:

- ❑ punti quotati isolati (comunque rilevati);
- ❑ discretizzazione di curve di livello.

Si osservi che, qualunque sia la densità dei punti, a volte anche molto fitti, si ha sempre una discretizzazione, dando ragione per l'uso dell'avverbio: solo, riferito all'impiego di procedimenti digitali per rappresentazioni numeriche. Si ricordi poi che proprio la struttura numerica dei dati, originari ed elaborati, permette di passare, utilizzando opportuni algoritmi di calcolo, da un tipo di rappresentazione ad un'altra. Tutto ciò giustifica il nome DSM; infatti si ha a disposizione non solo un campione di dati acquisiti, ma anche

campioni derivati, mediante algoritmi di calcolo, cioè avendo assunto arbitrariamente ed opportunamente una certa rappresentazione, quale modello interpretativo dell'andamento dell'altimetria oggetto di studio. La formazione di DSM si compone, come già detto in precedenza, di diverse fasi:

- ❑ acquisizione dei dati, per rilivamento e/o digitalizzazione;
- ❑ elaborazione dei dati, tramite gli algoritmi propri del trattamento delle osservazioni;
- ❑ archiviazione dei dati originari ed elaborati.

L'acquisizione dei dati attiene alle operazioni di misura proprie della geodesia e della topografia, oppure della fotogrammetria (in particolare, dei vicini per il rilievo di manufatti ed oggetti, assieme alla topografia speciale, messa in atto in sede locale) e del telerilevamento. Sempre all'acquisizione si riferiscono le operazioni di discretizzazione (scansione e/o digitalizzazione) della cartografia esistente, su supporto analogico, come pure quelle di acquisizione diretta dagli archivi delle banche date territoriali.

L'elaborazione dei dati costituisce la fase che, più propriamente, può chiamarsi costruzione di DSM. Questa può essere effettuata in diversi modi, per lo più, basati su procedimenti deterministici e, più raramente, facenti uso di processi stocastici. Infatti la costruzione classica dei DSM avviene con diverse metodologie e procedure che possono essere distinte in:

- ❑ metodi interpolativi locali, ad es., una media mobile pesata con gli inversi delle distanze dai punti dati;
- ❑ metodi di triangolazione, dove l'interpolazione avviene mediante piani, su punti comunque disposti, dopo aver collegato tra loro questi punti, in modo da formare una triangolazione completa di triangoli, non ricoprentisi, ed avendo cura di evitare, per quanto possibile, triangoli mal conformati (essendo, come noto, ben conformati quelli equilateri);
- ❑ metodi di quadrettatura, dove l'interpolazione avviene con funzioni bilineari (paraboloidi iperbolici o a sella, raccordati tra loro, in modo tale da garantire la continuità della superficie), su punti disposti nelle maglie di una griglia regolare ⁵;
- ❑ metodi d'approssimazione, dove l'interpolazione avviene con funzioni spline bicubiche (pezzi di paraboloidi bicubici, raccordati tra loro in modo tale da garantire, oltre la continuità della superficie, anche la continuità della sua pendenza e curvatura), su punti comunque disposti nelle maglie di una griglia regolare ⁶.

Il pregio di tutti questi metodi (presentati in altri lavori cui si rimanda) sta nella loro reattiva facilità d'applicazione, mentre il loro limite sta, nei primi due casi, nella scabrosità della superficie interpolata, nel terzo, anche nella rigidità imposta dall'uso di griglie regolari e, nel quarto caso, solo nella rigidità imposta dall'uso di griglie regolari. Si noti invece come, in quest'ultimo caso, proprio la migliore qualità dei raccordi elimini la scabrosità della superficie interpolata, dando ragione al nome: metodo d'approssimazione (prevalente su quello: metodo di quadrettatura, quale pur sempre rimane).

⁵ La mancanza di regolarità, in questo metodo, come nel successivo metodo d'approssimazione, richiede di procedere alla preliminare regolarizzazione dei dati, ad es., con metodi interpolativi locali, oppure in alternativa ad interpolare i dati stessi, secondo opportuni criteri statistici. In entrambi i casi, la fedeltà della rappresentazione, rispetto ai dati originari, viene giocoforza a cadere.

⁶ Si noti, a riguardo, come opportune funzioni spline tricubiche, a supporto triangolare, permettano di togliere la scabrosità insita nei metodi di triangolazione, dando alla rappresentazione, oltre la continuità della superficie, anche la continuità della sua pendenza e, se in triangoli sono ben conformati, anche della sua curvatura.

Un procedimento alternativo, certo più oneroso, ma altrettanto più flessibile, consiste invece in un approccio non – deterministico, come già detto in precedenza, facente uso di processi stocastici. In questo modo, l'insieme dei dati originari è interpretato come un campione estratto da una realizzazione di un processo stocastico (continuo, lineare, normale e stazionario del secondo ordine), definito secondo un qualche parametro ordinatore, avendo scelto e fissato un gruppo d'invarianza del suddetto parametro ordinatore, per la caratterizzazione del processo stocastico stesso e la stima della sue statistiche. Per tale via (come esposto in altri lavori cui si rimanda), si procede allora alla stima di opportune funzioni di covarianza, al filtraggio dal segnale stocastico dal rumore accidentale ed alla predizione di dati elaborati, ove richiesti (ad es., su griglie regolari, per successive rappresentazioni grafiche).

La flessibilità del metodo sta nella possibilità, o meno, di ottenere, la fedeltà della rappresentazione, rispetto ai dati originari, conservando od annullando la varianza del rumore. Quanto qui esposto è noto come metodo della collocazione, ma una strada simile è fornita, ad es., dal metodo di krieging. Si noti poi come, nel dominio della frequenze, strade ugualmente flessibili siano date dall'analisi di Fourier o mediante ondate (wavelet), facendo uso di metodi deterministici, oppure dallo studio della geometria frattale, rimanendo nel campo dei metodi stocastici.

L'archiviazione dei dati attiene alle metodologie dell'informatica, capaci di consentire la formazione, la conservazione, la correzione, l'aggiornamento, nonché l'accessibilità per uso comune, di banche dati caratterizzate o specializzate quali sistemi informativi a referenza spaziale. Infine un aspetto non secondario della fase d'archiviazione attiene alle possibilità di rappresentazione, visualizzazione e stampa dei dati originari ed elaborati, potendo anche passare da una rappresentazione ad un'altra. A tutto ciò, rispondono pienamente l'enormi potenzialità attuali dell'informatica grafica, ben capaci di elaborare mappe e figure, così come modelli 3D, secondo svariate modalità grafiche a richiesta.

Le mappe digitali, con le loro trasformazioni di coordinate, sono gli strumenti matematici che permettono di rappresentare numericamente il contenuto geometrico e tematico di una qualsiasi superficie (come pure, se del caso, di uno spazio 3D, come per l'esplorazione del sottosuolo o dell'atmosfera, oppure dell'interno di un manufatto od oggetto).

L'obiettivo finale del discorso a seguire è ricollegare lo studio delle mappe digitali a quello dei DSM. Benché apparentemente sorprendente, l'affermazione è corretta e può essere sostenuta con le seguenti osservazioni.

- ❑ I DSM possono riguardare dati diversi dalle altezze (e le variazioni d'altezza), ad es., come le pendenze, oppure i movimenti 2D e 3D.
- ❑ Questi esempi hanno innegabili caratteristiche geometriche e/o tematiche bidimensionali o tridimensionali.
- ❑ Analogamente le mappe digitali, nel loro contenuto geometrico (o comunque tematico – spaziale), hanno altrettante innegabili caratteristiche geometriche e/o tematiche bidimensionali o tridimensionali.

Pertanto un'evidente corrispondenza può essere stabilita, a conferma della relativa vicinanza tra i DSM e le mappe digitali, con le loro trasformazioni di coordinate.

Resta da osservare, come il contenuto tematico, propriamente detto, delle mappe digitali riguardi invece il mondo dei sistemi informativi a referenza spaziale (in particolare, l'approccio entità – relazioni, per collegare, alle entità spaziali, i loro attributi tematici), già precedentemente trattato e cui si rimanda.

Infine un problema speciale riguarda il caso principe di DSM e mappe digitali, riferiti al sistema terra, oppure ad una sua qualsiasi porzione, grande o piccola. Infatti mentre la rappresentazione di un manufatto ed un oggetto può / deve avvenire in uno spazio cartesiano ortogonale, tutto quanto è riferito al sistema terra deve correttamente rispondere alla sua particolare geometria, a sua volta, condizionata dalla sua realtà fisica.

- ❑ Dapprima occorre dare ragione dell'uso, in parallelo, di due verbi servili diversi: potere e dovere. Infatti per un manufatto, prescindere dal sistema terra può essere una scelta ragionevole, purché il manufatto sia circoscritto, come usuale, in un cerchio con un raggio di un centinaio di metri (ed allora prescindere dal tener conto della curvatura terrestre ⁷ fa commettere un errore altimetrico di poco inferiore ad un millimetro, a sua volta, certamente inferiore alla comune precisione di misura). Al contrario, un oggetto è un corpo mobile (i cui assi cartesiani non sono solidali al sistema terra) ed allora l'unica scelta ragionevole deve disporlo in uno spazio cartesiano ortogonale.
- ❑ Successivamente occorre presentare la geometria propria del sistema terra, ricordando come essa possa approssimativamente essere ricondotta ad un'ellissoide di rotazione (leggermente schiacciato ai poli), per quanto riguarda la planimetria, come pure detta superficie si riduca ad una sfera locale entro un cerchio con un raggio di *200 km* ed ulteriormente ad un piano tangente entro un cerchio con un raggio di *20 km*.
- ❑ Al contrario, per quanto riguarda l'altimetria, la geometria della terra è condizionata dalla sua realtà fisica (determinata dal campo della gravità terrestre, dato dalla composizione vettoriale tra l'attrazione newtoniana e la rotazione terrestre); allora la superficie di riferimento è il geoide (che ha scostamenti dall'ellissoide fino ad oltre un centinaio di metri e, di conseguenza, del tutto inaccettabili). A sua volta, questa superficie si riduce alla sfera tangente entro un cerchio con un raggio di *20 km*, purché l'altimetria non sia troppo corrugata, né la zona troppo perturbata da un punto di vista tettonico.
- ❑ Da queste superfici di riferimento, si calcolano tutte le altezze nel sistema terra, oppure in una sua qualsiasi porzione, grande o piccola.
- ❑ Invece la rappresentazione della planimetria, scartata l'idea impossibile di utilizzare un mappamondo o parti di esso (a parte minuscole realizzazioni didattiche e/o artistiche), deve ancora affrontare il problema dell'inevitabile deformazione della rappresentazione su un piano delle superfici riemanniane, cioè a doppia curvatura (come la sfera, l'ellissoide, il paraboloido, il paraboloido a sella, gli iperboloidi, ecc.), diversamente da quelle euclidee, cioè a semplice curvatura (come il cono, il cilindro, il toro, ecc.) che si sviluppano su un piano senza alcuna deformazione.
- ❑ Allora per poter riportare la planimetria su un piano cartografico (indifferentemente analogico o digitale), è necessario accettare queste inevitabili deformazioni:
 - ❑ scegliendo di conservare le scale locali e gli angoli, così da generare una delle tante carte conformi ed isogoniche, dove le condizioni di tangenza definiscono la carta specifica;
 - ❑ scegliendo di conservare le aree e generando una delle tante carte equivalenti, dove ancora le condizioni di tangenza definiscono la carta specifica;
 - ❑ scegliendo di conservare limitate (ma non nulle) tutte le deformazioni e generando una delle tante carte afilattiche, dove sempre le condizioni di tangenza definiscono la carta specifica.

⁷ La curvatura terrestre vale: *0.8 mm* a *100 m* (ed è trascurabile), *8 cm* ad *1 km*, *8 m* a *10 km* e ben *800 m* a *100 km*.

Le immagini, a seguire, servono soltanto ad illustrare, con la potenza dell'evidenza grafica, alcuni tipi di rappresentazione cartografica, tra le più comuni adottate. A riguardo, si noti, come la rappresentazione dello spazio abbia origini antichissime (già babilonesi) e sia diffusa presso molti popoli della terra). L'incontro con la geometria greco – ellenistica ne fa una scienza, per quanto riguarda le proiezioni. Dopodiché tra il '600 ed il '700 (con qualche esempio nel tardo medioevo e nel rinascimento) anche il contenuto planimetrico attinge ai rigori della geodesia e della topografia. Invece solo dall'inizio dell'800, appaiono indicazioni altimetriche dotate di proprietà metriche e non solo di qualità pittoriche.

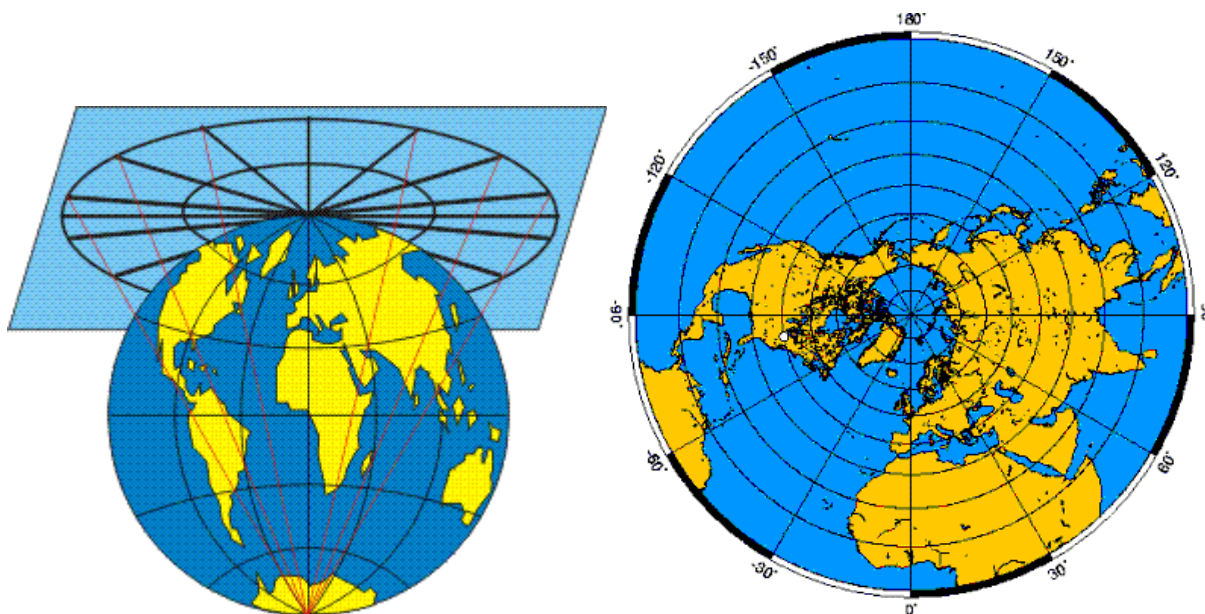


Fig. 4.1 – Proiezione stereografica polare ⁸

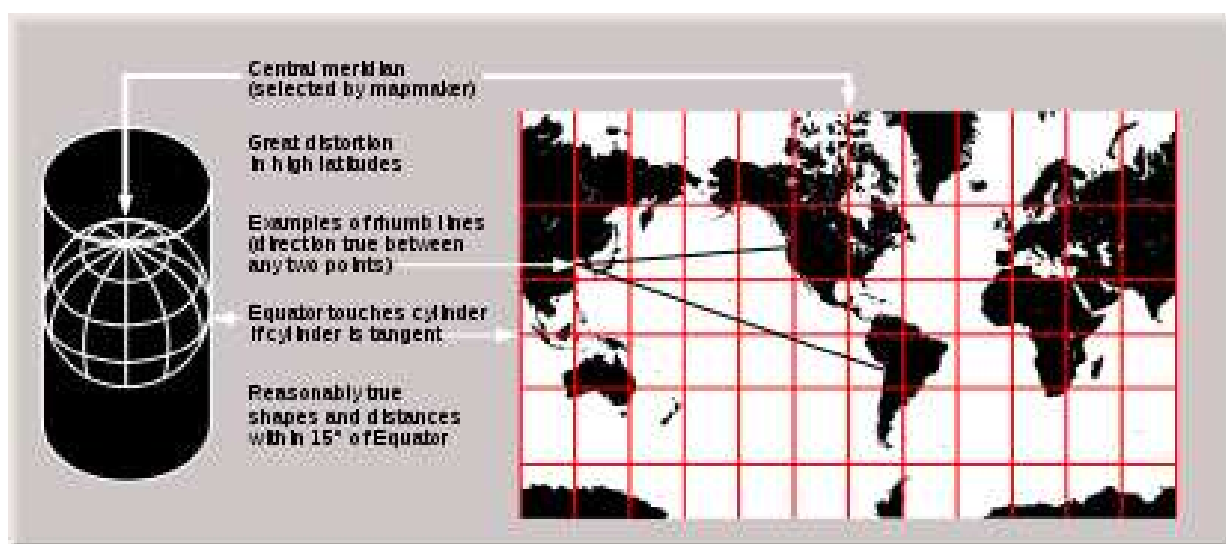


Fig. 4.2 – Proiezione cilindrica diritta ⁹

⁸ La proiezione stereografica polare è definita sulla sfera (in, quanto nelle regioni polari, l'ellissoide di rotazione è pressoché sferico) ed è una rappresentazione conforme. Un esempio d'utilizzo è data dalla carta stereografica polare, redatta secondo la convenzione UPS.

⁹ La proiezione cilindrica diritta è alla base della carta di Mercatore, una proiezione conforme definita sull'ellissoide. Benché sia largamente usata, al di fuori della fascia equatoriale, presenta deformazioni inaccettabili. Pertanto è preferibile adottare carte equivalenti (come quella cilindrica di Lambert, oppure varie altre fino a quella di Arno Peters, recentemente proposta) che, pur deformando la forma della rappresentazione, mantengono quantomeno uguali le aree.

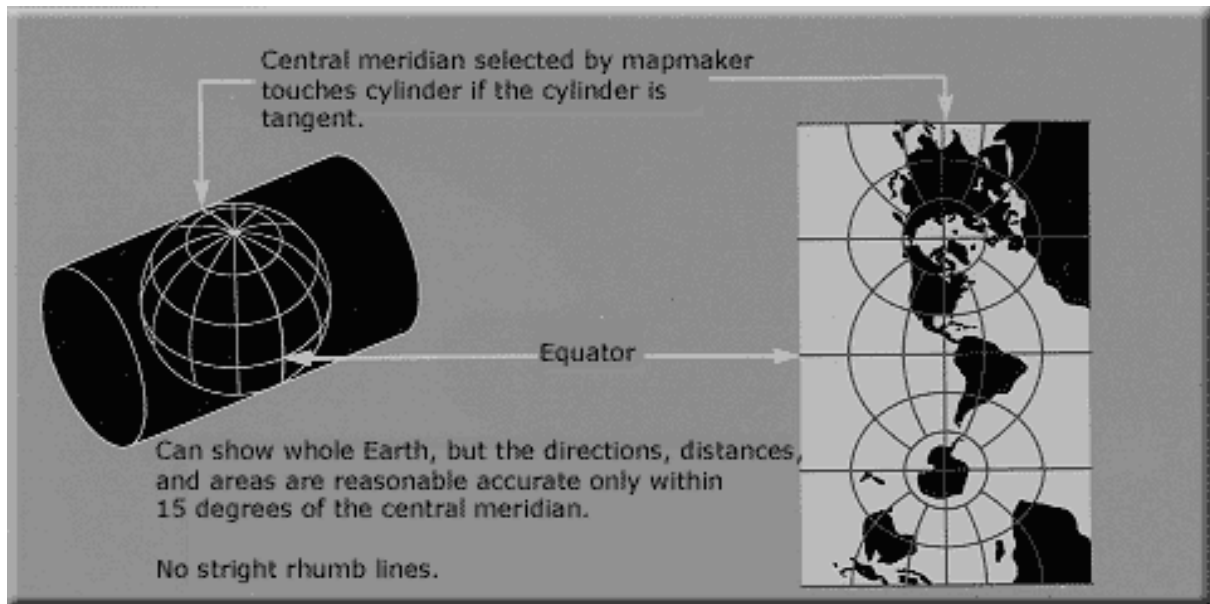


Fig. 4.3 – Proiezione cilindrica traversa ¹⁰

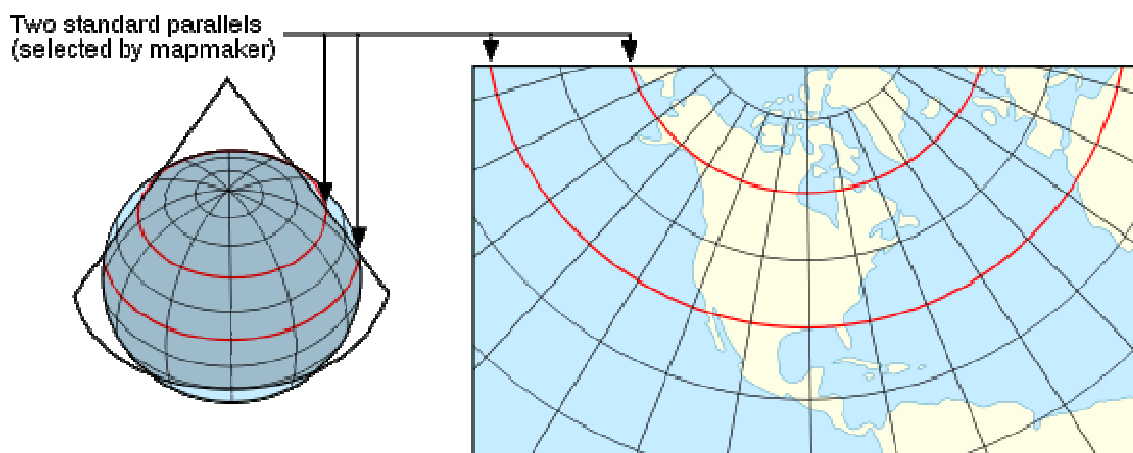


Fig. 4.4 – Proiezione conica¹¹

Una breve digressione puntualizza l'essere una carta conforme (o isogonica), equivalente, oppure afilattica. Infatti definiti i moduli di deformazione lineare, angolare e superficiale, l'essere il primo indipendente dalla direzione di una linea in un punto (ovvero la nullità del secondo) determina conformità (ovvero isogonia). Invece la costanza del secondo determina equivalenza tra superfici. Si badi, a riguardo, come la doppia curvatura della sfera e dell'ellissoide impedisca di avere rappresentazioni insieme conformi ed equivalenti, pur potendo mantenere contenuti tutti i moduli di deformazione, come già nelle più antiche carte afilattiche. Infine il problema della rappresentazione (deformata) dell'ellissoide sul piano (cartografico) si pone anche per i database topografici, quantomeno in termini di passaggio dall'archiviazione alla visualizzazione.

¹⁰ La proiezione cilindrica trasversa è alla base della carta di Gauss, una proiezione conforme definita sull'ellissoide. Essa quasi universalmente adottata (ad esempio, secondo la convenzione UTM), insieme alla suddetta carta stereografica polare. Tuttavia poiché, come evidente, anche questa rappresentazione presenta deformazioni inaccettabili, al di fuori di fuso meridiano relativamente stretto, la carta è costruita per fusi meridiani, parzialmente sovrapposti.

¹¹ La proiezione conica è alla base della carta di Lambert, una proiezione conforme definita sull'ellissoide. Riferite a Lambert esistono anche carte equivalenti definite sull'ellissoide e derivate da proiezioni cilindriche e coniche.

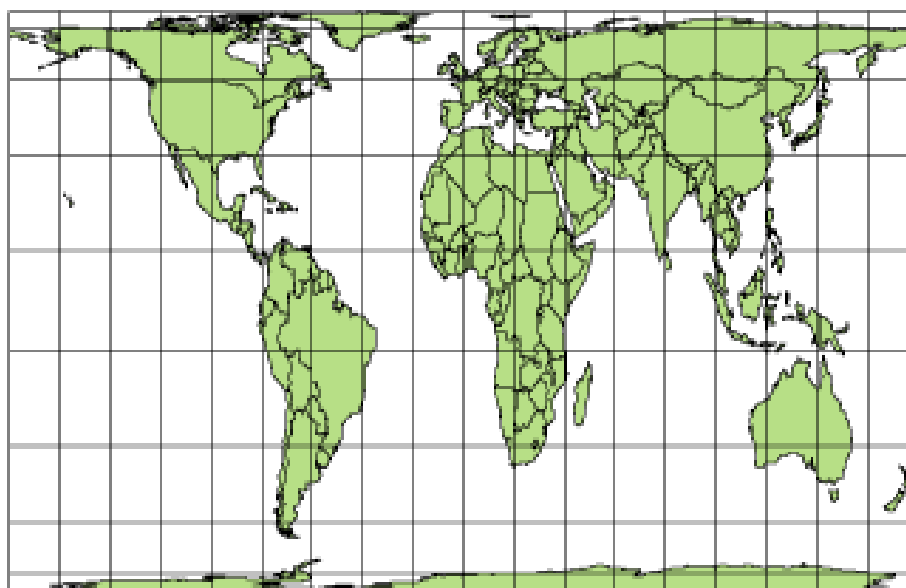


Fig. 4.5 – Carta di Arno Peters ¹²

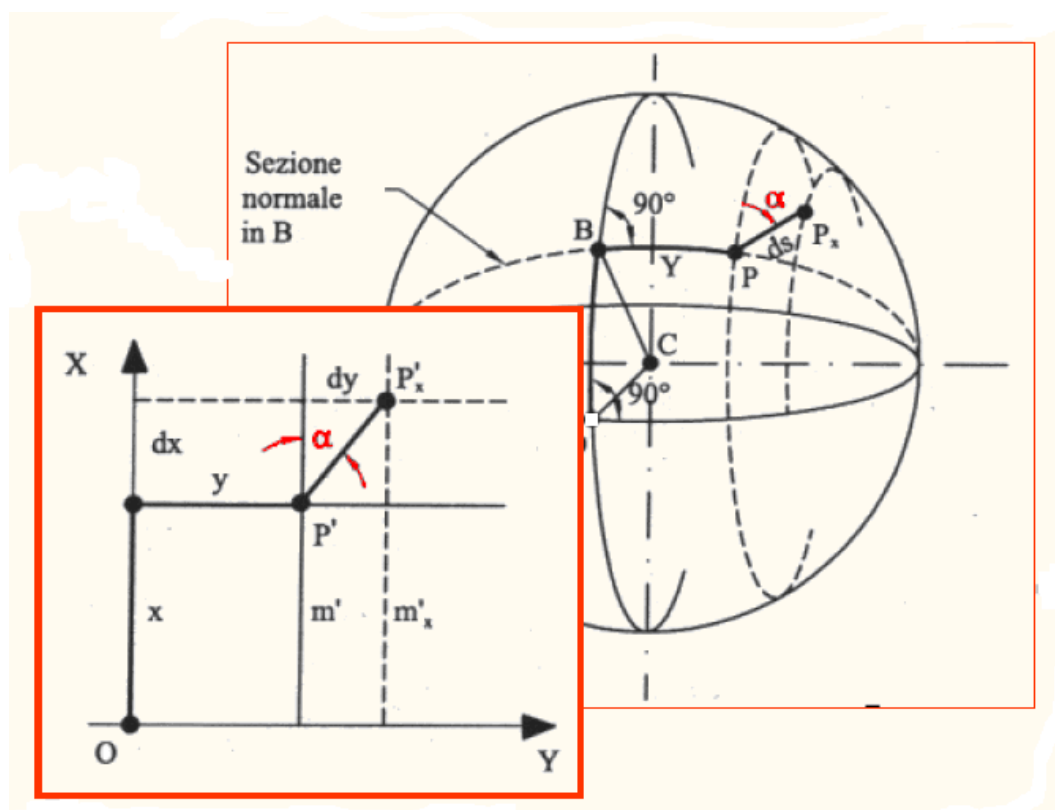


Fig. 4.6 – Proiezione policentrica ¹³

12 La carta di Arno Peters è una proiezione cilindrica equivalente. Essa discende dal teorema di Tolomeo, in base al quale è possibile calcolare l'area di una sfera come equivalente all'area di un cilindro tangente ad un suo cerchio massimo. Il passaggio dalla sfera all'ellissoide si attua fissando nell'equatore la tangenza tra ellissoide e cilindro, ed applicando una contrazione affine nella direzione dei meridiani.

13 Una proiezione policentrica è alla base della carta afilattica di Cassini – Soldner che, per le sue coordinate cartografiche, fa uso di coordinate geodetiche rettangolari locali. Il suo essere quasi – equivalente (aggiunto alla policentricità) rende la stessa particolarmente adatta per rappresentazioni catastali. Si badi a riguardo che la mancanza d'altimetria, nelle rappresentazioni cartografiche più vecchie, non dipende dalla rappresentazione cartografica, ma dai metodi di rilievo e soprattutto da scelte operative. A riprova, una qualsiasi restituzione fotogrammetrica è direttamente una carta di Cassini – Soldner e, come evidente, una qualsiasi restituzione fotogrammetrica si sviluppa nello spazio oggetto 3D.

Per completezza, nel prosieguo, si riportano due figure che illustrano lo sviluppo del sistema UTM sull'intero globo terrestre e la cartografia ufficiale italiana dell'IGM, con il suo inserimento nel sistema UTM.

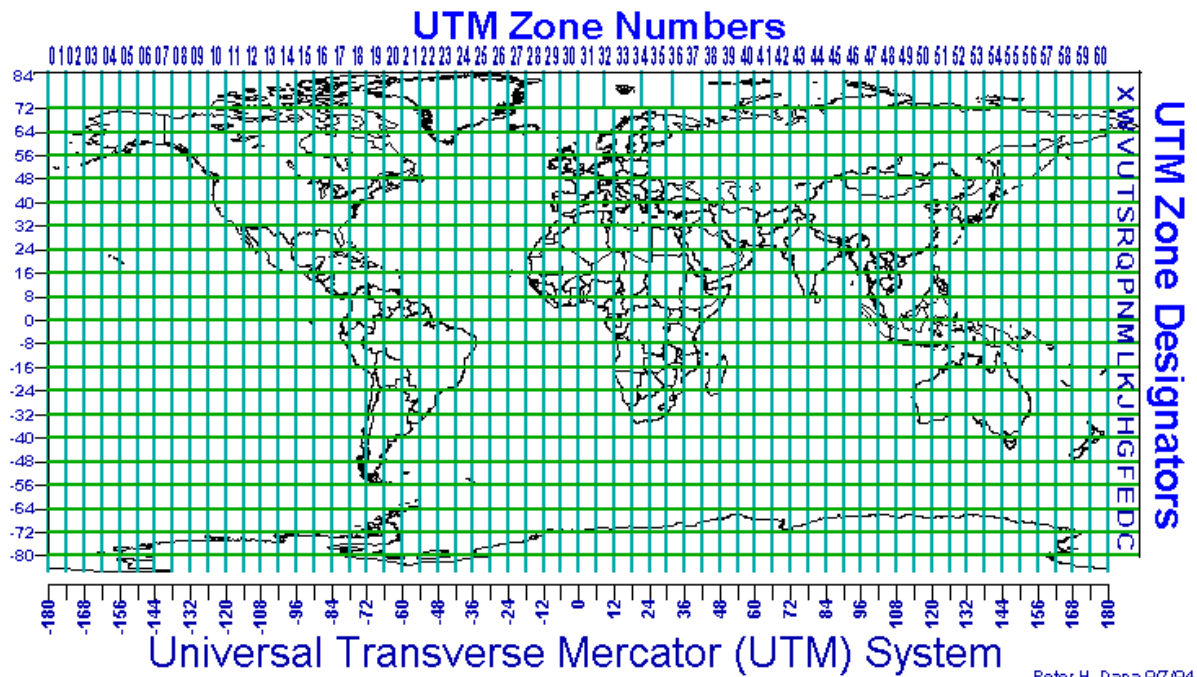


Fig. 4.7 – Sistema UTM

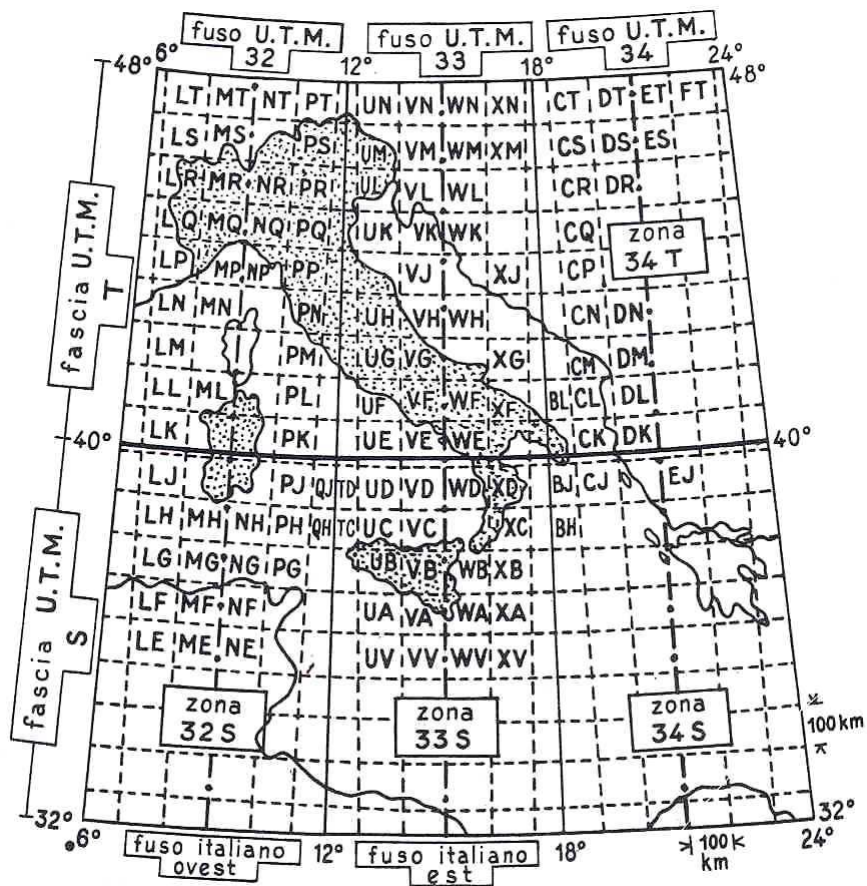


Fig. 4.8 – La cartografia ufficiale italiana dell'IGM ed il suo inserimento nel sistema UTM

APPENDICE C – INGEGNERIA DELLA CONOSCENZA

La discussione, riguardante l'interesse per l'Ingegneria della conoscenza (già detta in precedenza, con un pizzico di presunzione, forse anche di troppo, Intelligenza Artificiale) e l'uso delle tecniche da essa derivate in campo geomatico, dipende soprattutto dall'esigenza di automazione totale nell'intero processo fotogrammetrico – cartografico (acquisizione dei dati, trattamento delle osservazioni ed analisi dei dati, procedure decisionali a diversi livelli, restituzione / archiviazione e rappresentazione / visualizzazione). Questo è un ambito un poco lontano dagli interessi specifici, forse dovuto al fatto che mentre le scienze matematiche applicate (Statistica e Calcolo Numerico) sono il pane quotidiano, la Computer Science e le Tecnologie dell'informazione sono state finora più lontane dai loro interessi, anche se occorre notare, come tali scienze siano relativamente recenti. D'altra parte, la Computer Vision è una delle questioni più frequentemente trattate dall'Ingegneria della conoscenza ed anche studiosi, di altre discipline, hanno ipotizzato la presenza, nel cervello umano, di aree predisposte all'interpretazione. Questo approccio, basato sulla conoscenza e guidato da un'aspettativa, è attualmente assunto alla base dei sistemi avanzati di Computer Vision, basati sull'Ingegneria della conoscenza.

Varie sono le definizioni che, in questi ultimi anni, i ricercatori hanno dato dell'Ingegneria della conoscenza. Basti ricordare quella secondo la quale l'Ingegneria della conoscenza è quel settore della Computer Science che si occupa di progettare sistemi intelligenti di computer, oppure quell'altra secondo cui essa è la ricerca finalizzata a rendere intelligenti i computer. Poiché il concetto di comportamento intelligente, in grado cioè di imparare, ragionare, risolvere problemi, scegliere, è estremamente complesso e nello stesso tempo ambiguo, pare più pratica un'altra definizione, secondo la quale l'Ingegneria della conoscenza è quella scienza che si propone di far fare al computer quello che, per ora, riesce ancora meglio all'essere umano. In questo contesto, si può affermare che l'Ingegneria della conoscenza si occupa di costruire sistemi intelligenti per una varietà di applicazioni. Vari sono infatti i settori di ricerca di tale scienza, si ricordano tra gli altri:

- ❑ la rappresentazione dello spazio degli stati;
- ❑ le tecniche di ricerca euristica;
- ❑ le tecniche di rappresentazione della conoscenza;
- ❑ la manipolazione generale dei simboli;
- ❑ il linguaggio naturale;
- ❑ hardware speciale per la programmazione nel settore specifico dell'Ingegneria della conoscenza;
- ❑ software speciale, ovvero paradigmi specifici di programmazione;
- ❑ la tecnologia dei Sistemi Esperti.

Per quanto riguarda i primi due punti, si ricorda che la ricerca euristica può essere usata, in modo efficiente, per la risoluzione di problemi altrimenti non trattabili. Esiste infatti una classe di problemi, detti NP (non – deterministic polynomial problem) di cui non si possono trovare soluzioni efficaci, oppure quantomeno per i quali il cercare una qualche soluzione matematica potrebbe portare ad una grande perdita di tempo. In campo, del resto, sono noti problemi collegati alla ricerca euristica, ad esempio, il rilevamento degli errori grossolani, non essendoci ancora un preciso accordo sulla definizione di errore grossolano, oppure la scelta dei parametri aggiuntivi in una compensazione ed altri ancora trattati normalmente con tecniche matematiche di tipo statistico, ma che potrebbero usufruire vantaggiosamente delle tecniche derivate

dell'Ingegneria della conoscenza. D'altra parte, un tipico problema risolto con l'approccio euristico è il riordino e/o la dissezione delle incognite nella matrice normale, finalizzato alla minimizzazione del suo profilo e dell'ampiezza massima di banda.

Per quanto riguarda il terzo e il quarto punto, si osserva che lo scopo della rappresentazione della conoscenza è quello di organizzare le informazioni richieste, in una forma tale che il programma di Ingegneria della conoscenza possa prontamente avervi accesso, per prendere decisioni, pianificare, riconoscere gli oggetti e le situazioni, analizzare le scene e le sequenze, ed esprimere altre funzioni cognitive. Pertanto la rappresentazione della conoscenza è di fondamentale importanza per la tecnica dei Sistemi Esperti, la Computer Vision e la comprensione del linguaggio naturale. Gli schemi di rappresentazione sono classicamente divisi in dichiarativi (rappresentazioni di fatti ed affermazioni) e procedurali (azioni e disposizioni).

- ❑ La logica computazionale, cioè fare un ragionamento logico con un computer, è basata sulla tradizionale logica simbolica e si divide in due branche principali: la logica proposizionale (basta sulle questioni di vero e falso) e la logica predicativa.
- ❑ La logica inferenziale, cioè raggiungere conclusioni usando la logica, di norma, si basa invece sulla dimostrazione di teoremi.

Il più diffuso metodo per la dimostrazione automatica dei teoremi è la procedura di Robinson. Esso consiste in un metodo generale automatico, per determinare, se una conclusione ipotizzata (tesi) discenda da un gruppo dato di premesse (postulati, assiomi ed ipotesi). Dapprima le premesse originali e la conclusione da dimostrare sono messe in forma di affermazioni; successivamente la conclusione da dimostrare è negata, derivando automaticamente nuove affermazioni. Allorquando è raggiunta una contraddizione, il teorema è dimostrato. Si osservi inoltre, come la ricerca sull'Ingegneria della conoscenza sia una scienza sperimentale e cerchi di sviluppare programmi di calcolo che mostrino comportamenti intelligenti. La formulazione di tali programmi richiede un ambiente interattivo, con supporti quali l'allocazione dinamica della memoria all'evolvere del programma, invece della memoria predisposta in anticipo, come si usa nella maggior parte delle applicazioni di programmazione. Più importante ancora è il fatto che, all'evolvere del programma, le forme intermedie dei dati, a loro volta imprevedibili, influenzano anche la forma del linguaggio e l'utilizzazione della memoria stessa che è una delle poche cose certe sul funzionamento della memoria umana. Del resto, i linguaggi fondamentali della Ingegneria della conoscenza (LISP, PROLOG, ecc.) si sono evoluti proprio come risposte appropriate alla necessità di programmazione.

Per quanto riguarda il quinto punto, è noto che una delle maggiori ambizioni della ricerca sia trovare il modo di interagire con la macchina in una lingua naturale, mentre lo scopo complementare è comprendere come gli esseri umani comunichino. L'insieme di questi scopi è detto Linguistica computazionale (o Scienza della cognizione): un grande sforzo nel quale si mescolano l'Ingegneria della conoscenza, la Linguistica, la Filosofia, la Psicologia. Il settore comunque di maggiore sviluppo ed interesse, allo stato attuale della ricerca applicativa, riguarda la costruzione dei Sistemi Esperti.

Due tappe sono le tappe principali che danno avvio a quel processo chiamato Ingegneria della conoscenza, nell'ambito della Computer Vision, e sono di grande interesse in geomatica, in particolare, per la fotogrammetria e la cartografia, completando l'offerta dell'elaborazione di immagini e dell'informatica grafica:

- la segmentazione;
- il *parsing*,

infatti per poter usare le entità estratte, in una descrizione simbolica dello spazio oggetto, queste ultime devono essere dapprima segmentate, raggruppate e successivamente confrontate tra loro.

Segmentazione

Il problema della segmentazione, cioè della scomposizione di una curva tridimensionale in primitive, più significative di una lista di punti a forte densità, è stato affrontato da parecchio tempo dalla Computer Vision. L'idea della segmentazione trae origine dal lavoro di filosofi e psicologi della Gestalt che studiavano le preferenze degli uomini per le varie forme nei campi visivi, al fine di organizzare le immagini in raggruppamenti. Si capì che tali preferenze andavano a caratteristiche quali la prossimità, la somiglianza, la continuità, la regolarità, e bisognava tenere conto dell'illuminazione e del contrasto tra figura e sfondo. Più in generale la capacità di raggruppamento si basava sulla tendenza a dare un significato alla scena. Nella Computer Vision, la possibilità di raggruppare parte di una generica immagine in unità omogenee rispetto ad una o più caratteristiche, porta ad una cosiddetta immagine segmentata che costituisce un primo passo verso l'interpretazione dell'immagine. Due tipi di segmenti sono immediatamente evidenti:

- i confini,
- le regioni.

Per quanto riguarda gli algoritmi utilizzati, essi prendono a base le intensità dei livelli di grigio il colore, o la texture. La vista dell'uomo impiega, come noto, più di un metodo per ricostruire le superfici. I fotogrammetri adottano come metodo più comune la visione stereoscopica: tuttavia anche la texture si presta a fornire informazioni di vario tipo (forma, orientamento, cambiamenti di profondità). Se la texture è del tutto periodica o direzionale nello spazio, il suo spettro di potenza tende a presentare picchi per le corrispondenti frequenze spaziali. Questi picchi possono costituire la base caratteristica di discriminazione nel riconoscimento del modello, mediante le tecniche della Trasformata di Fourier e della Trasformata dell'energia, metodo che si basa su un approccio spaziale – statistico.

I confini degli oggetti sono comunque forse l'elemento più importante che lega i dati dell'immagine alla sua interpretazione. In questo caso, i metodi di segmentazione, facenti tutti riferimento alle varie tecniche di line following, si distinguono in base alla variabile necessità di vincoli di conoscenza. In generale, le primitive sono linee rette e curve regolari, quali archi circolari, ma la ricerca si sta ulteriormente ampliando, indirizzandosi anche ad altri tipi di curve. Un metodo, noto per molte applicazioni nel campo della segmentazione, si basa sulla trasformata di Hough, già citata in precedenza, per il suo utilizzo nell'estrazione di punti e spigoli, insieme ad altri ben noti algoritmi. Tale metodo si propone di trovare linee rette, a partire da un insieme di punti sparsi; esso rappresenta comunque uno spreco di tempo di calcolo, in quanto nel caso degli spigoli, i punti oggetto di analisi sono in qualche modo già organizzati.

Esistono altri metodi, esposti nella letteratura della Computer Vision, alcuni basati sull'approssimazione di curve piane mediante poligoni, altri su procedure ai minimi quadrati e loro varianti robuste che provvedono ad una prima segmentazione, successivamente raffinata da tecniche di split and merge, altri ancora su

un'interazione tra algoritmi di split and merge e algoritmi nello spazio $\psi - s$. Le tecniche di split and merge utilizzano il cosiddetto spazio degli stati e le strutture a grafi per rappresentare regioni e confini. Il primo approccio è una tecnica presa dalla Intelligenza Artificiale, applicata alla region growing. All'inizio, l'immagine presenta tante regioni quanti sono i punti; i cambiamenti di stato avvengono quando un confine è rimosso o inserito: si tratta allora di cercare opportuni cambiamenti di stato, al fine di ottenere la migliore regionalizzazione possibile. Nel secondo approccio, la rappresentazione di un'area suddivisa in regioni può avvenire con l'utilizzo della Teoria dei Grafi. Tale schema rappresenta esplicitamente sia i confini, sia le regioni (Fig. D.1). Per quanto riguarda i confini la rappresentazione, mediante un grafo, è immediata, mentre per quanto riguarda le region, la rappresentazione fa uso del grafo duale, dove i nodi rappresentano le regioni e gli archi collegano le regioni adiacenti (ovvero le separano, essendo i confini e le loro perpendicolari in perfetta corrispondenza biunivoca).

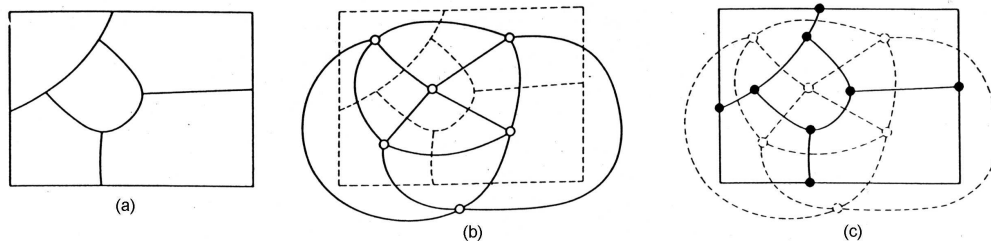


Fig. D.1

In generale, quasi tutti questi metodi, eccetto la trasformata di Hough, hanno come input per il processo una curva piana, ma si comincia a prendere in considerazione la possibilità di segmentare curve tridimensionali nello spazio oggetto. Del resto, mentre le linee rette nello spazio oggetto sono linee rette in tutte le proiezioni, non si può affermare l'inverso; inoltre gli archi circolari diventano, in generale, archi ellittici, come noto, più difficili da rilevare. Tornando ai metodi più consolidati, si segnala un algoritmo di modifica della trasformata di Hough, all'interno di un processo di segmentazione dell'immagine che fa uso della Teoria dei Grafi. Infatti una modifica della trasformata di Hough tende a risolvere la contraddizione tra lo spreco di tempo e la buona precisione, notando come risulti ben funzionante una strategia in cui all'estrazione degli spigoli segua una segmentazione dell'immagine, basata sulla descrizione della struttura dell'immagine.

Per quanto riguarda invece l'approccio tridimensionale, si fa ricorso a due algoritmi adatti alla segmentazione di curve tridimensionali. Il primo si basa su una versione tridimensionale del concetto di split and merge; all'interno di tale approccio, la curva è segmentata solamente in linee rette. Il secondo, a sua volta, è una versione tridimensionale dell'algoritmo nello spazio $\psi - s$, capace di rilevare linee rette ed archi circolari. In entrambi i casi, l'input del processo è costituito da una lista di punti, molto fitti nello spazio tridimensionale, anche se non equidistanti, rappresentati mediante le tre coordinate, e l'output prevede di rappresentare i punti estremi degli spigoli in uno spazio tridimensionale, discretizzato a cubetti, detti voxel. A riguardo, si ricorda che il metodo split and merge è costituito, come si deduce dalla denominazione stessa, di due fasi:

- nella prima fase, i dati di input sono ridotti in segmenti, cosicché ogni segmento rispetti pienamente certe condizioni (ad esempio, la condizione che i punti di un segmento corrispondano ad una linea retta);
- nella seconda fase, sono eliminati i punti ridondanti prodotti nel corso della prima.

Nello spazio $\psi - s$ invece, sono facilmente rilevabili gli archi circolari. In questo caso infatti, come già detto in precedenza, le linee rette appaiono come linee orizzontali, mentre gli archi circolari sono descritti come linee rette di inclinazione qualsiasi. Il diagramma nello spazio $\psi - s$ per una curva spaziale qualsiasi, non necessariamente analitica, è costruito calcolando le direzioni tra i punti. Per quanto riguarda la segmentazione della curva $\psi - s$, si nota che le discontinuità dovrebbero manifestarsi solo nei punti di intersezione. Tuttavia una discontinuità artificiale è presente quando l'orientamento varia bruscamente da 360° a 0 o viceversa, fatto che non si può vedere nella rappresentazione di questo spazio; pertanto è stato previsto un modulo correttivo, per tenere conto di tale discontinuità. La segmentazione delle curve tridimensionali può essere un buon suggerimento per il riconoscimento di oggetti artificiali, spesso composti da linee rette o da altre curve regolari che forniscono informazioni, più di quanto non possano fare i semplici punti, pur fittamente distribuiti, noti nelle loro coordinate tridimensionali, in seguito al matching della stereocoppia.

Per quanto riguarda le regioni, si ricorda che le tecniche di region growing hanno lo scopo di utilizzare le caratteristiche dell'immagine, per registrare pixel singoli in insiemi di pixel chiamati regioni, cosicché una regione individui un oggetto od una significativa parte di esso. Naturalmente è facile ottenere un confine da una regione, come pure viceversa da un confine si può ricavare una regione. Anche in questo caso, le tecniche sono di vario tipo:

- ❑ tecniche locali: i pixel sono messi in una regione, sulla base delle loro proprietà, oppure di quelle dei pixel loro vicini;
- ❑ tecniche globali: i pixel sono raggruppati in regioni, sulla base delle proprietà di un largo numero di pixel, distribuiti in tutta l'immagine;
- ❑ tecniche di split and merge;
- ❑ tecniche semantiche, trattandosi dell'incorporazione nelle tecniche di merging di una possibile interpretazione riguardante la regione oggetto di analisi.

Parsing

La produzione di carte a grande scala, a partire da immagini aeree, come noto, è una delle principali applicazioni della fotogrammetria. Tale procedura sarà totalmente automatica quando il posizionamento e la descrizione degli oggetti si baserà, come già detto in precedenza, su una interpretazione razionale dei contenuti dell'immagine. L'automazione della ricostruzione di oggetti, a partire dalle immagini, si basa su una procedura razionale di interpretazione delle entità estratte dalle immagini stesse e sulla presenza di un modello dell'oggetto che deve essere ricostruito. Tale procedimento è detto *parsing* e presenta notevoli affinità con il matching relazionale. Le entità estratte dalle immagini e sottoposte al processo di segmentazione devono essere interpretabili (ad esempio, gli elementi di un singolo spigolo non possono esserlo, mentre hanno contenuto informativo le regioni chiuse, o gli incroci a T od a L). A sua volta, il modello dell'oggetto può essere specifico o generico, poiché dipende dalle varietà possibili di uno stesso tipo di oggetto. Esistono alcuni metodi, sviluppati in questi ultimi decenni, per questo tipo di processo. Un metodo semplice è basato sull'attribuzione di proprietà logiche a segmenti di linea e dà buoni risultati, se è corretta l'identificazione delle linee di confine dell'oggetto. Un altro prende invece in considerazione livelli più

complessi di descrizione degli oggetti da ricostruire, affidandosi anche ad una base di conoscenza, costituita in modo da riguardare:

- ❑ fatti;
- ❑ opinioni;
- ❑ strategie.

Pertanto nella nella cosiddetta base di conoscenza sono introdotte regole generali ed empiriche, l'esperienza euristica, fatti e decisioni strategiche. I fatti sono il tipo di oggetto da ricostruire, la sua posizione approssimata, i parametri dell'orientamento delle immagini ed i risultati di svariati procedimenti di segmentazione dell'immagine: ad esempio, in regioni chiuse con confini approssimati da linee rette. Le regole per l'interpretazione di confini e di regioni, oltre ad una verifica di coerenza, possono essere definite conoscenza di giudizio; inoltre la conoscenza strategica accumulata guida l'intero processo di razionalizzazione. Il processo di ricostruzione fornisce, come risultato, i parametri di forma, disposizione ed orientamento degli oggetti, nonché la classificazione delle parti degli oggetti stessi, in base a categorie prestabilite e date dal modello generico, adottato per tale ricostruzione. La ricostruzione di un edificio, ad esempio da immagini digitali aeree multiple, è attuata in due tempi:

- ❑ dapprima sono applicate le procedure di segmentazione alle immagini grezze, ottenendo un gruppo di poligoni chiusi, descrittivi le discontinuità in ogni immagine;
- ❑ successivamente tale output è interpretato, nello spazio oggetto, con l'uso di una serie di analizzatori, basati sul generico modello, adottato per la ricostruzione degli edifici.

In generale, il modello descrive l'edificio in termini di muri, porte, finestre, rappresentati in termini di semplici regioni geometriche ed interrelazioni. Sono assegnate particolari etichette ai descrittori dell'oggetto segmentato e sono paragonati tra loro descrittori corrispondenti, situati in immagini differenti. La procedura termina con un test di coerenza, riguardante l'accettabilità della descrizione dell'oggetto, mentre la descrizione degli oggetti presenti nelle immagini digitali prevede:

- ❑ una procedura di segmentazione, dove un gruppo di poligoni dotati di descrizioni, abbia i confini definiti secondo un generico modello, costituito assumendo che i confini tra i muri e i tetti siano linee rette;
- ❑ l'interpretazione dell'output ottenuto nello spazio oggetto.

Un sistema, basato su regole razionali, ottiene poi la struttura tridimensionale di oggetti poliedrici in proiezioni prospettiche, con l'uso della conoscenza di vincoli geometrici. Il risultato è un matching relazionale dei risultati, ottenuti dall'interpretazione delle immagini singole nello spazio.

Sistemi esperti

Pare opportuno, a mo' di premessa, ricordare come è generalmente definito un Sistema esperto:

- ❑ un programma che risolve problemi, di norma, affidati all'esperienza umana;

- ❑ un sistema a conoscenza intensiva che affronta problemi, di norma, riservati all'esperienza umana;
- ❑ un sistema di calcolo che usa una base di conoscenza ed un meccanismo deduttivo, capace di risolvere particolari questioni.

Lo scopo della tecnologia è, in pratica, quello di trasferire la competenza umana entro la forma di un programma di calcolo. La responsabilità del tecnico è quella di pervenire ad una comprensione del campo di applicazione, tale che si possa costruire un programma di calcolo, in grado di sostituire, in una certa misura, un esperto nel processo decisionale. La fase dell'implementazione dei Sistemi esperti è progressiva e interattiva: i Sistemi esperti sono prodotti, passo dopo passo, e la loro validità è immediatamente verificata (procedimento di costruzione dei prototipo). Attualmente si ritiene che i Sistemi esperti, costruiti in modo tale che la conoscenza possa essere formalizzata in regole, costituiscano il mezzo migliore a disposizione per codificare la conoscenza umana in vista della soluzione di problemi specifici. Tali sistemi sono detti RBS (rule based system). In generale comunque, la tecnologia dei Sistemi esperti è oggi costituita da un insieme di metodi, strumenti di software e speciali attrezzature di calcolo, impiegati per trattare ed utilizzare la conoscenza specifica.

Dal punto di vista dei software, la parte dei Sistemi esperti che richiede la conoscenza necessita di speciali strumenti e, poiché per l'implementazione di algoritmi numerici sono sufficienti linguaggi convenzionali, quali Fortran, Pascal, C, C++, è ovviamente necessaria una interfaccia tra i due tipi di linguaggio. Del resto, per quanto riguarda il software, sono già disponibili numerosi strumenti specifici; inoltre per quanto riguarda l'hardware, sono stati introdotti speciali tipi di computer (Lisp machine). I Sistemi esperti possono essere divisi in due gruppi:

- ❑ quelli adatti a risolvere un problema all'interno di un gruppo di vincoli;
- ❑ quelli adatti a produrre una diagnosi.

In entrambi i casi, la struttura è la medesima; infatti i tipici Sistemi esperti hanno quattro componenti:

- ❑ la base di conoscenza;
- ❑ il meccanismo di inferenza;
- ❑ la memoria di lavoro;
- ❑ l'interfaccia utente.

La base di conoscenza contiene informazioni, strutturate e codificate, riguardanti una specifica area di problemi; in molti casi, ciò è rappresentato in forma di regole (rule). Il meccanismo di inferenza è un insieme di programmi che costituisce il meccanismo centrale di risoluzione del problema, controlla e coordina le operazioni ed il cosiddetto ragionare del Sistema esperto. La memoria di lavoro contiene la descrizione dello stato corrente della risoluzione del problema. L'interfaccia utente controlla come l'utente possa comunicare con il sistema. Costruire Sistemi esperti è un'impresa complessa. Identificati gli scopi del progetto (fase di identificazione) e resi espliciti gli attributi chiave (fase di concettualizzazione), la conoscenza degli esperti, per quanto concerne la ricerca delle specifiche soluzioni, deve essere trasferita in diagrammi di flusso, necessari ad esplicitare strategie, relazioni ed informazioni (fase di formalizzazione); a tale tappa seguono la

scrittura dei programmi e la verifica (fase d'implementazione).

La tecnologia dei Sistemi esperti è usata in una varietà di casi nei settori ingegneristici, per risolvere problemi riguardanti il prendere una decisione in base a conoscenze acquisite. Finora sono state coinvolte, nell'applicazione dei Sistemi esperti a problemi fotogrammetrici, le fasi di acquisizione, riduzione ed analisi dei dati, ma si pensa di utilizzare tale tecnologia, anche nella fase di progetto. Alcuni degli studi più recenti tendono a dimostrare la potenzialità dei Sistemi Esperti durante la fase di progetto, in particolare nel campo della fotogrammetria del vicino. Infatti come noto, è usuale progettare la rete d'inquadramento e lo schema di presa prima di intraprendere un rilievo del vicino. Basandosi su una iniziale scelta di parametri, i fotogrammetri simulano i risultati della configurazione iniziale. Tale progetto coinvolge la soluzione di un certo numero di problemi, quali le decisioni concernenti la scelta della camera e la geometria della presa, la segnalizzazione, lo schema di acquisizione dei dati, gli algoritmi di processamento dei dati e così via. Le decisioni da prendere non sono riducibili ad una soluzione ottenuta, con l'uso di un algoritmo; pertanto si comincia a fare riferimento a quella scienza che è valida là dove sono inapplicabili le soluzioni dovute all'implementazione di determinati algoritmi.

La scelta delle camere è un problema riguardante puramente la cosiddetta base di conoscenza, quella parte dei Sistemi esperti che contiene informazioni strutturate su una specifica area di interesse. Infatti i tipi delle camere e i loro parametri possono essere descritti formalmente e incorporati in un data base. Invece la geometria della presa dipende, oltre che dal tipo di camera, anche dalla precisione desiderata del rilievo e non è descrivibile come un problema collegato alla base di conoscenza. In ogni caso, tutti i Sistemi esperti dovrebbero essere in grado di determinare, se una certa configurazione proposta possa raggiungere una precisione accettabile, per un certo scopo. A tal fine, si costruisce un predittore di precisione, cioè uno strumento capace di:

- ❑ predire le precisioni che si possono attendere da una data camera e da una certa configurazione;
- ❑ determinare la scelta della camera e della configurazione richieste, per raggiungere una certa precisione.

Le equazioni di tale algoritmo sono utilizzate all'interno di un sistema sperimentale, per scegliere la camera e la geometria della presa che è ritenuta favorevole ad un certo scopo. Il sistema sperimentato è composto da quattro moduli di base di conoscenza integrati, interagenti fra di loro e riguardanti il progetto dei segnali, la scelta delle camere, la geometria della presa e gli schemi di acquisizione dei dati. Gli algoritmi di predizione della precisione sono usati per modificare i parametri di progetto, fino a quando si trova la precisione specificata dall'utente. In questo stesso contesto, si pone il problema della realizzazione di misure fotogrammetriche di alta precisione, sotto l'aspetto preliminare della ideazione di una rete. La rete è comunemente progettata con una simulazione nella quale l'esperienza dello specialista è impegnata nel padroneggiare la complessità delle scelte; pertanto è stato ideato un sistema sperimentale (chiamato Consens) che permette di verificare l'applicabilità delle tecniche convenzionali di Ingegneria della conoscenza alla progettazione della rete. Nella costruzione di questo sistema, i due passaggi fondamentali sono quello della concettualizzazione e formalizzazione della conoscenza acquisita. In generale, la costruzione di Sistemi esperti comporta i cinque moduli definiti da Buchanan: identificazione, concettualizzazione, formalizzazione, implementazione e verifica. Il processo di ottimizzazione di una rete

può essere concettualizzato in tre modi diversi:

- ❑ a partire dallo schema di Grafarend,
- ❑ secondo la strategia della simulazione,
- ❑ in un processo generico di risoluzione.

In generale, maggiore attenzione è prestata al processo che usa la strategia della simulazione; tale strategia, euristica per natura, è il risultato della esperienza degli esperti. Si parte da una configurazione iniziale di prima approssimazione, se essa si rivela insoddisfacente si corregge con misure dovute a procedimenti di ottimizzazione di primo e di secondo ordine (FOD e SOD), allo scopo di raffinare in modo interattivo la rete, ovvero si può addirittura provare a riconfigurare la rete stessa. L'esempio fornito riguarda la fase della diagnosi: l'obiettivo della diagnosi, in questo genere di applicazioni, consiste nell'identificazione dei difetti che causano il fallimento del progetto della rete, in termini di rigidità, precisione, affidabilità ed economicità. Il complesso dei processi euristici è la somma di regole di buon senso ed associazioni empiriche che, derivate dall'esperienza, consentono agli esperti le estrapolazioni necessarie, a riconoscere gli approcci più promettenti al problema. L'applicazione di tali criteri euristici, nella diagnosi della rete, può essere concettualizzata nei termini di un albero di decisioni, più o meno ramificato. Una volta che la conoscenza, relativa ad un certo obiettivo, è stata concettualizzata, il passo successivo, per la costruzione di Sistemi esperti, consiste nel formalizzare tale conoscenza, in termini di rappresentazioni di meccanica della conoscenza. Esistono due tipi di rappresentazione più spesso utilizzati: i cosiddetti quadri (frame) e le regole (rule). I primi servono a rappresentare la conoscenza gerarchica; le regole sono invece adatte a rappresentare la conoscenza di tipo euristico. Gli elementi di una qualsiasi rete fotogrammetrica possono essere ordinati in quattro diverse categorie:

- ❑ stazioni di presa;
- ❑ immagini;
- ❑ punti oggetto;
- ❑ osservazioni (punti misurati sulle immagini).

Le relazioni fisiche fra le grandezze, rappresentative di queste classi, si prestano, in modo naturale, ad una strutturazione gerarchica. La regola è un blocco di conoscenze che rappresenta una situazione e le sue immediate conseguenze. Una regola si esprime come affermazione di condizione – azione, cioè IF – THEN. Se (IF) tutte le condizioni della regola sono vere, allora (THEN) l'ipotesi della regola è confermata e, in tale caso, qualsiasi azione, associata con la regola, è messa in moto dal meccanismo deduttivo dei Sistemi esperti; al contrario, se almeno una delle condizioni risulta non vera, allora l'ipotesi è falsa.

E' probabile che i Sistemi esperti in fotogrammetria saranno utilizzati in ambiti in cui tradizionalmente non operano fotogrammetri. Attualmente si conoscono sistemi forniti di base di conoscenza nel campo della diagnostica medica; se infatti si deve determinare la forma di un oggetto ed informazioni sulla precisione ottenuta, quando non sono presenti specialisti in fotogrammetria, è indispensabile che sia incorporata, nello strumento fotogrammetrico, una base appropriata di conoscenze. Essa offrirà un supporto agli utilizzatori privi di esperienza, oltreché fornire un controllo di qualità ed eliminare le ambiguità di interpretazione.

Apprendimento automatico

L'apprendimento automatico (Machine learning) è un aspetto della Ingegneria della conoscenza ed è importante per la tappa di acquisizione di conoscenza nei Sistemi esperti e nei GIS. Con il termine learning si indicano cambiamenti in un sistema che permettono di eseguire lo stesso compito con gli stessi dati di ingresso, ma in modo più preciso ed efficace della volta precedente. Secondo un'altra definizione, esso è una trasformazione della rappresentazione della realtà, essendo la nuova rappresentazione, in qualche modo, migliore della precedente. Per eseguire il compito dell'apprendimento, deve essere specificata e quantificata la nozione di miglioramento per cui la nuova rappresentazione:

- ❑ non è fine a se stessa, ma è la base per processi successivi;
- ❑ aiuta e facilita il trattamento di processi successivi (classificazione, riconoscimento, posizionamento di oggetti);
- ❑ è più compatta della rappresentazione precedente e, partendo da un gruppo di esempi, impara dagli esempi stessi e finisce con una loro descrizione di tipo generale (gli esempi richiedono più memoria della descrizione sintetica prodotta);
- ❑ è più esplicita della rappresentazione precedente (imparare vuoi dire ristrutturare la conoscenza);
- ❑ è più generale della rappresentazione precedente;
- ❑ può rilevare fatti nuovi sui dati.

La tecnica dell'Apprendimento automatico è applicata per ottenere informazioni cartografiche sull'uso del territorio da immagini aeree. Di solito, si usano classificazioni multispettrali, ma nelle immagini sono contenuti oltre ai dati radiometrici, anche la tessitura e la geometria che pure contengono informazioni sui tipi di uso del territorio. Ciascuna di queste sorgenti di informazioni richiede un modello per estrarre la conoscenza.

L'uso delle mappe per ottenere la classificazione è la via maestra; tuttavia le mappe sono spesso il risultato della classificazione stessa, allora se non esistono mappe, bisogna disporre di un modello di aggregazione delle particelle. Tale modello deve essere una descrizione molto generale, dato che è impossibile rappresentare tutti i tipi possibili di aggregazione delle particelle.

Pertanto si ha l'esigenza di un cosiddetto modello generico nel quale non solo i parametri oggetto, ma anche la struttura, abbiano una certa libertà. Un parametro oggetto, nel caso della struttura di aggregazione delle particelle, può essere la dimensione della singola particella. La struttura riflette i rapporti fra le parti oggetto, ad esempio, il numero di confinanti con una particella.¹⁴

¹⁴ Di norma i modelli sono formulati in modo esplicito dalle persone che li usano; questo basta sino a che i modelli sono chiaramente definibili ed hanno caratteristiche distinte. Spesso tuttavia si ha a che fare con un insieme di oggetti prototipi, dove non è preliminarmente noto quali siano le parti importanti di un oggetto, le caratteristiche ed i rapporti. Nella terminologia della rappresentazione conoscitiva, gli esempi indicano la descrizione spaziale degli oggetti. Il compito delle macchine per l'apprendimento automatico è di rendere esplicita questa conoscenza implicita, ottenendo una descrizione intensiva. Il singolo problema specifico di aggregazione delle particelle diventa un esempio nella costruzione di una strategia per acquisire un modello automatico di aggregazione delle particelle dagli esempi. Prerequisito per l'acquisizione del modello automatico è ovviamente, dati gli esempi, l'estrazione della struttura interna dei dati. Quest'ultima è rivelata in un processo di addensamento, raggruppando gli oggetti che hanno qualche genere di affinità. Il grafo risultante è rappresentato con l'analisi di grammatiche formali, dove ciascun nodo è codificato da una regola grammaticale. Per tener conto delle possibili varietà della struttura ed anche degli effetti del rumore, ciascun nodo è considerato quale risultato di un esperimento casuale e, in una successiva analisi statistica, sono stimati i parametri del nodo stesso, mettendo così in luce la statistica inerente alla struttura. Le tecniche di Apprendimento automatico possono talvolta essere numeriche, ma per lo più sono strutturali, ovvero grammatiche formali, capaci di dare luogo alla generazione di nuove strutture, dove la struttura propria delle osservazioni è rappresentata in forma simbolica.

APPENDICE D – TABELLE MULTITEMPORALI E MULTICRITERIO

La modellazione a varie scala usa spesso strumenti informatici consolidati, quali le banche dati ed i SIT 2D (essendo per lo più la terza dimensione solo un'informazione tematica, seppure metrica). Tuttavia tabelle multi – temporali e multi – criterio possono essere impiegate, per mettere in luce effetti della pianificazione sulla suddetta modellazione, così da studiare linee evolutive e/o di discontinuità di fenomeni e/o processi, come pure per comparare e valutare differenti scenari alternativi, diversi tra loro, a mo' di simulazione / predizione delle suddette linee.

Le tabelle a doppia entrata sono da lungo tempo usate in statistica, per mettere in collegamento tra loro gruppi di variabili uguali o differenti, a seconda che la relazione sia autoriferita od incrociata. In entrambi i casi, è possibile studiare la dipendenza tra le variabili, seppure con diverse modalità, dipendenti dal caso. L'impiego di una semplice tabella a doppia entrata in un SIT permette innanzitutto di mettere in relazione le entità presenti in due diverse epoche, così da studiare un dato passo di certe linee evolutive e/o determinati punti di discontinuità.

Allora è evidente che una sequenza ordinata di tali tabelle permette di studiare, nel suo insieme, proprio le suddette linee evolutive e/o di discontinuità. Dopodichè come proprio della statistica descrittiva delle variabili doppie, anche studi di dipendenza possono essere effettuati. Ovviamente queste tabelle a doppia entrata e questi loro insiemi possono essere costruite per modellare il passato, mettendo in luce le trasformazioni avvenute, come per comparare e valutare differenti scenari alternativi futuri, rispettivamente dando rigore topologico, geometrico e tematico a studi storici, o permettendo simulazioni. Con particolare riferimento alla comparazione e valutazione di differenti scenari alternativi futuri, queste tabelle diventano non solo multi – temporali, ma anche multi – criterio (cosa estensibile anche al passato, quando questo sia così remoto od incerto, da dover ricorrere ad ipotesi). Si noti inoltre come le variabili di queste tabelle siano solitamente le superfici per i SIT 2D, ma nulla vieta che una particolare linea e un particolarissimo punto siano inclusi tra le variabili messe in relazione. Analogamente i corpi sono le entità principe dei SIT 3D, ma facce, spigoli e vertici possono essere chiamati a costituire variabili di cui si vogliono seguire linee evolutive e/o di discontinuità, tenuto conto che nei SIT 3D una tabella a doppia entrata è già necessaria per la matrice di cross-connessione tra facce e spigoli (o viceversa).

La tabella seguente costituisce un esempio di tabella a doppia entrata e mostra un passo di trasformazione. Si osservi come questa tabella doppia entrata sia sparsa e, come tale, possa essere memorizzata in forma vettoriale, nelle sole posizioni non – vuote, facendo uso di indicatori di riga (o di colonna) e di puntatori delle colonne (o della righe), essendo la seconda modalità la trasposta della prima.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
α	•		
β		•	
γ			•
δ	•		
ϵ		•	•

Tabella a doppia entrata per il passaggio da un'epoca ad un'altra

Con specifico riferimento alla rappresentazione schematica di un'area, con una struttura dati vettoriale (già presentata in precedenza, a mo' d'esempio), si stabiliscano le seguenti trasformazioni ad un passo (come riportate in tabella, potendo ovviamente definirne altre nei passi successivi, omessi per motivi di brevità):

- l'area A è suddivisa in due aree più piccole, rispettivamente α e δ ;
- le aree B e C sono parzialmente unite in un'unica area ε ;
- le rimanenti parti delle aree B e C sono conservate nelle aree, più piccole, β e γ ,

dove le trasformazioni proposte rappresentano la totalità delle trasformazioni possibili (cui va aggiunta la conservazione invariata di una qualsiasi altra area), in quanto tanto la suddivisione in tre o più aree, quanto l'unione di tre o più aree sono riconducibili alle operazioni a due. La ragione di questa affermazione sta nell'essere associative entrambe le operazioni per cui, fatta una suddivisione (unione) in due (di due) è possibile suddividere (unire) in due una delle parti (un'altra parte alla precedente unione di due) e così via. Si noti poi che determinate analisi di dipendenza (ad es., il calcolo di contingenze per lo studio della connessione) richiedono di operare anche su celle vuote ed allora è necessario prendere particolari accorgimenti, per evitare di dover ritornare all'intera tabella originaria. Una prima lettura qualitativa di questa tabella a doppia entrata (importante in sé e per successive analisi di dipendenza tra le sue variabili) rileva:

- la conservazione di un'entità, con una corrispondenza uno ad uno, tra variabili in ingresso ed in uscita;
- una suddivisione in due o più entità dell'entità originaria, nel caso di una corrispondenza uno a molti, tra le variabili in ingresso e quelle in uscita, ovvero di colonne che sono riempite in più di una cella;
- un'unione di due o più entità (o di loro parti), nel caso di una corrispondenza molti ad uno (o molti a molti), ovvero di righe che sono riempite in più di una cella.

Si badi tuttavia come, nel caso di suddivisione, occorra accertarsi dell'effettiva compatibilità, perché un'eventuale sovrapposizione produrrebbe esattamente lo stesso risultato. In questo caso specifico, solo un controllo esterno permette di evitare una situazione incompatibile. D'altra parte, situazioni non incompatibili, ma poco idonee, sono date da una riga vuota, dove una destinazione futura non trova collocazione nella realtà presente, come pure in una colonna vuota, ovvero in un'entità che si conserva inutilmente senza alcuna desiderata destinazione. Controlli esterni permettono di evitare queste situazioni poco idonee, seppure non incompatibili, né deve stupire la necessità di tali controlli esterni.

Infatti la tabella a doppia entrata, come ogni strumento matematico ed ogni struttura linguistica, è capace di controllare la correttezza sintattica, ma non la compatibilità semantica. Pertanto nella tabella a doppia entrata, è possibile controllare che la somma della parti non ecceda il tutto, né faccia difetto, e tutto ciò vale anche per le eventuali componenti, grandi o piccole, messe in evidenza al suo interno. Eppure la tabella non può essere mai in grado di controllare, se le sue parti unite siano compatibili o meno tra loro. Del resto, da sempre, è stato insegnato a chiunque che non si possono sommare cose non omogenee, perché l'operazione d'addizione può essere sottoposta ad una verifica formale, ma non può controllare, se gli addendi siano tra loro compatibili.

I numeri 7, 17 e 32 sono propri della descrizione / valutazione di simmetrie, poliedri, regole grammaticali e sintattiche, e determinazioni psico – linguistiche. Pertanto non desta stupore ritrovare i numeri 17 e 32, nelle relazioni topologiche rispettivamente dei SIT 2D e 3D. Infatti questi due numeri sono proprio le dimensioni delle relazioni topologiche tra nodi, archi e regioni (su una superficie) e tra nodi, archi, regioni e corpi (nello spazio 3D) nelle basi di dati vettoriali a referenza spaziale. Tuttavia occorre notare, come le usuali approssimazioni lineari, tendano a nascondere quello che è evidente, se i suddetti sistemi informativi sono

orientati ad oggetti. Analogamente si può mettere il luce il ritornare del numero 7 nelle analisi temporali, per basi di dati dinamiche (anche se certe loro schematizzazioni elementari tendono ancora a nascondere queste evidenze), perché potendo stabilire un parallelismo logico, ad esempio, tra la gradazione dei plurali e lo scorrere del tempo (passato lontano, passato recente, presente e futuro, antecedenza, contemporaneità e conseguenza), i 7 casi di dati / eventi si dispongono nel tempo e/o chiedono una comparazione temporale, così come i plurali si articolano in base alla loro numerosità e/o chiedono una comparazione quantitativa. Precisi argomenti della statistica caratterizzano queste analisi temporali. Pertanto lo studio delle serie temporali prende in considerazione tendenze di lungo periodo e serie storiche (anche di un passato lontano), mentre le operazioni di filtraggio e predizione sono solitamente riferite a periodi più brevi, rispettivamente all'indietro ed in avanti, e prendono in considerazione stagionalità, volatilità ed altre forme di variabilità. Lo stato di fatto (considerando presente una data epoca, scelta e fissata) è un punto di riferimento essenziale per qualsiasi comparazione antecedente o conseguente, nonché per le analisi spaziali (lineari, bidimensionali e tridimensionali), solitamente contemporanee, dove tutte le suddette comparazioni si svolgono con metodologie e procedure proprie dell'inferenza statistica.

APPENDICE E – NUMERI CHE SI RINCORRONO

Desta curiosità e merita pertanto di essere messo in evidenza come molte considerazioni che permettono di effettuare scelte veloci, evitando il calcolo booleano di tutte le combinazioni possibili tra cui scegliere quelle geometricamente ammissibili ¹⁵, facciano uso dei numeri 7, 17 e 32. Infatti gli ultimi tre numeri sono insieme le dimensioni dei gruppi di simmetrie monodimensionali (come nei fregi), bidimensionali (come nei mosaici) e tridimensionali (come nei cristalli, dove opera la cosiddetta restrizione cristallografica sugli angoli ammissibili), e le dimensioni delle relazioni topologiche vettoriali fra nodi ed archi (lungo una linea), fra nodi, archi e regioni (su una superficie) e fra nodi, archi, regioni e corpi (nello spazio 3D).

Alle considerazioni precedenti sulle numerosità dei vari gruppi di simmetrie che si rincorrono, da un caso all'altro, si aggiunga che sono 7 le superfici finite 2D euclidee e sferiche (ovvero il piano, il cilindro, il nastro di Moebius, il toro, la bottiglia di Klein; la sfera ed il piano proiettivo) e 17 le ipersuperfici 3D euclidee (non considerando lo spazio euclideo 3D e lo spazio euclideo con un buco, cioè un toro in un movimento di traslazione). Al contrario, sono infinite tanto le superfici 2D iperboliche, quanto le ipersuperfici 3D sferiche ed iperboliche, mentre gli studi sulle ipersuperfici 4D, di qualsiasi tipo, ancora non sono terminati: forse si potranno trovare 32 o 230 elementi (oppure 4783 come per le simmetrie 4D, studiate di recente).

Ulteriore curiosità desta il fatto che il numero 2 abbia un legame logico con le coppie di opposti, innanzitutto destra – sinistra ¹⁶, ed a partire da questo numero, gli altri numeri distino, l'un l'altro, per multipli crescenti del numero 5, numero pari alle dita della mano ¹⁷: $2 + 5 = 7$; $7 + 10 = 17$; $17 + 15 = 32$. Resta da

¹⁵ Si noti a riguardo l'aborme crescita di tutto quanto coinvolgo espressioni esponenziali e/o numeri fattoriali. Infatti l'elemento base di un raster piano è il quadrato costituito da 4 vertici e le permutazioni su 4 lettere sono $4! = 24$ (di cui l'identità più 7 i movimenti rigidi). Invece l'elemento base di un raster 3D è il cubo costituito da 8 vertici e le permutazioni su 8 lettere sono $8! = 40.320$ (di cui solo l'identità più 17 rotazioni e sei ribaltamenti per un totale di 24 i movimenti rigidi, 32 facendo uso di specularità semplici e 48 anche con specularità composte).

¹⁶ La coppia di opposti destra – sinistra è determinata dalla simmetria fondamentale della persona umana (e non solo).

¹⁷ Questo conteggio è una caratteristica evoluta specifica del linguaggio umano, perché anche alcuni animali sanno contare, ma non oltre il numero 4.

ricordare: $32 + 20 = 52$, e come il numero 52 sia pari al numero delle settimane dell'anno solare del pianeta terra, cosa che aggiunge la dimensione temporale (una quarta dimensione) alle tre dimensioni dello spazio 3D. Da ultimo, si ha: $52 + 25 = 77$, dove $77 = 7 \times 11$, essendo 11 il numero primo successivo 7.

Certi numeri non arrivano mai per caso; pertanto è interessante constatare quanto segue. Innanzitutto sono 5 i **poliedri regolari** cosiddetti platonici, ma già pitagorici, 13 più 4 **poliedri semi – regolari** e **regolari ma concavi**, rispettivamente archimedeei 18 e di Keplero – Poincot, per un totale di 17, come di seguito riportato:

Poliedri regolari:

1. tetraedro
2. ottaedro

3. cubo
4. dodecaedro
5. icosaedro

Poliedri semi – regolari:

1. cubo – ottaedro
4. cubo troncato
5. ottaedro troncato
6. dodecaedro troncato
7. icosaedro troncato
8. rombi – cubo ottaedro
9. cubo – ottaedro troncato
10. rombi – icosi – dodecaedro
11. icosi – dodecaedro troncato
12. cubo camuso

2. icosi – dodecaedro
3. tetraedro trocato
13. dodecaedro camuso

Poliedri concavi di Keplero:

14. piccolo dodecaedro stellato
15. grande dodecaedro stellato

Poliedri concavi di Poincot:

- grande dodecaedro
grande icosaedro


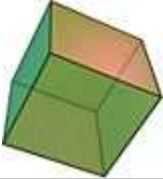
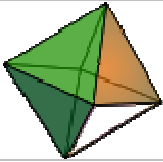
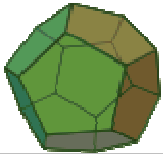
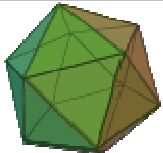
Inoltre recentemente è stato definito un insieme di ben 92 solidi convessi (dimostrato completo da Zalgaller), detti **solidi di Johnson**, le cui facce sono tutte costituite da poligoni regolari, senza essere alcuno dei poliedri precedenti, né prismi od antiprismi 19. Di essi, oltre a piramidi, cupole e rotunde, come pure piramidi, cupole e rotunde modificate, ed inoltre prismi aumentati, si trovano 7 poliedri platonici modificati, 19 poliedri archimedeei modificati ed alcuni solidi misti (di cui solo 3 denominati sfeno – corona semplice, aumentata e mega). La penultima classe e gli elementi selezionati dell'ultima, con altri 3 poliedri concavi 20 più complessi (ottenuti estendendo le condizioni gruppali) e 7 poliedri concavi troncati (ricavati da questi ultimi e dai quattro precedenti poliedri concavi di Keplero e Poincot), formano una super – classe di 32 elementi 21:

18 Altri 13 poliedri semi – regolari di Catalan sono costruiti a partire da quelli di Archimede, applicando la relazione di dualità tra vertici e facce. Pertanto poiché i poliedri archimedeei hanno regolari i vertici, ma non le facce, quelli di Catalan hanno omogenee le facce, ma non i vertici. Si noti inoltre come gli ultimi due poliedri archimedeei e di Catalan abbiano una loro copia chirale, non essendo equivalente la loro immagine riflessa, e come questi altri 4 solidi, comunque addizionati ai precedenti, diano ancora un totale di 17 elementi.

19 L'antiprisma è una figura simile al prisma, dove le facce laterali sono triangoli, anziché parallelogrammi, perché le due basi sono ruotate di mezzo lato, una rispetto all'altra.

20 Con specifico riferimento a tutti i poliedri concavi, presi in considerazione, occorre osservare come ciascuno di essi sia stellato, ovvero capace di contenere al suo interno un convesso le cui normali intersecano, senza fuoriuscire, tutti i punti del poliedro concavo stesso.

21 Come già detto in precedenza, più volte, ogni classificazione è sempre relativamente arbitraria e costituisce solo un utile strumento, per interpretare e comprendere la realtà nella sua grande complessità e variabilità.

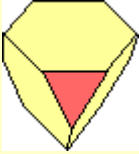
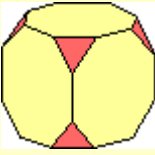
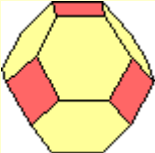
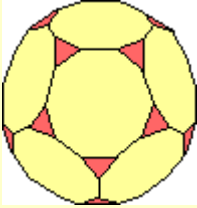
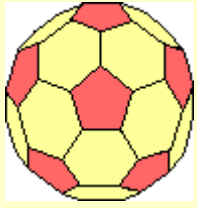
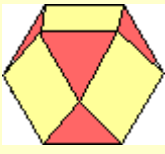
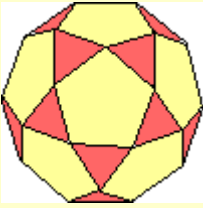
I cinque poliedri convessi regolari (solidi Platonici)						
Nome	Immagine	Facce		Spigoli	Vertici	Incidenza dei vertici
tetraedro		4	triangoli	6	4	3
esaedro o cubo		6	quadrati	12	8	3
ottaedro		8	triangoli	12	6	4
dodecaedro		12	pentagoni	30	20	3
Icosaedro		20	triangoli	30	12	5

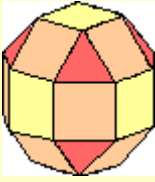
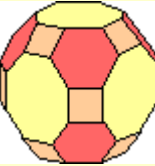
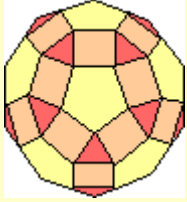
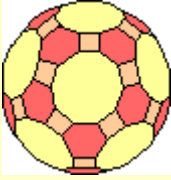
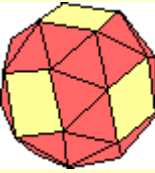
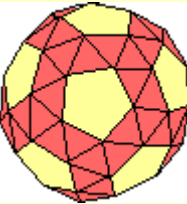
A mo' di digressione: la realtà od almeno la sua concezione, interpretazione e rappresentazioni sono raramente fenomeni lineari e normali, ma al contrario, spesso altamente non – lineari e qualsivoglia distribuiti. Pertanto anche i casi notevoli della geomatica (dall'analisi di immagini ai sistemi informativi a referenza spaziale, passando per le rappresentazioni dell'informatica grafica) presentano notevoli difficoltà, ad es., nel riconoscimento di differenti topologie e complessità geometriche.



In questi casi, l'ingegneria della conoscenza può mettersi alla prova, ben sapendo che è certamente lontano il momento di una soluzione automatica, forse addirittura non esistente. Infatti quando i concetti di aggregato entrano in gioco, ad un alto livello, si può osservare l'impiego di simboli, per fare un modello di una data situazione.

Di conseguenza, l'attivazione di entità simboliche rinvia ai loro significati, stabilendo una connessione arbitraria, ma definitiva significante – significato, molto simile al comportamento di un essere umano di fronte ad un dilemma complicato. Allora la suddetta branca dell'informatica, detta ingegneria della conoscenza (che è un'espressione meno ampollosa, rispetto alla precedente dizione di intelligenza artificiale) deve saper riconoscere gli errori.

Infatti un decisore (algoritmo e/o procedura), un programma che lo implementa ed una macchina automatica che lo esegue possono compiere errori (seppure diversi per numero e natura) come gli esseri umani, perché la conoscenza è quasi sempre incompleta, le ipotesi sono spesso labili ed i casi specifici assai diversi uno dagli altri, cosa che rende difficile il trasferimento delle esperienze.

Poliedri archimedei	Facce		Spigoli	Vertici	Incidenza dei vertici
tetraedro troncato 	8	4 triangoli 4 esagoni	18	12	3,6,6
cubo troncato o esaedro troncato 	14	8 triangoli 6 ottagoni	36	24	3,8,8
ottaedro troncato 	14	6 quadrati 8 esagoni	36	24	4,6,6
dodecaedro troncato 	32	20 triangoli 12 decagoni	90	60	3,10,10
icosaedro troncato 	32	12 pentagoni 20 esagoni	90	60	5,6,6
cubottaedro 	14	8 triangoli 6 quadrati	24	12	3,4,3,4
icosidodecaedro 	32	20 triangoli 12 pentagoni	60	30	3,5,3,5

Poliedri archimedei	Facce		Spigoli	Vertici	Incidenza dei vertici
rombicubottaedro 	26	8 triangoli 18 quadrati	48	24	3,4,4,4
cubottaedro troncato 	26	12 quadrati 8 esagoni 6 ottagoni	72	48	4,6,8
rombicosidodecaedro 	62	20 triangoli 30 quadrati 12 pentagoni	120	60	3,4,5,4
icosidodecaedro troncato 	62	30 quadrati 20 esagoni 12 decagoni	180	120	4,6,10
cubo camuso cubottaedro camuso (2 forme chirali) 	38	32 triangoli 6 quadrati	60	24	3,3,3,3,4
dodecaedro camuso icosidodecaedro camuso (2 forme chirali) 	92	80 triangoli 12 pentagoni	150	60	3,3,3,3,5

Poliedri concavi di Keplero - Poinot			
			
<u>Piccolo dodecaedro stellato</u>	<u>Grande dodecaedro</u>	<u>Grande dodecaedro stellato</u>	<u>Grande icosaedro</u>
(12,30,12) (5,5)	(12,30,12) (5,5)	(12,30,20) (5,3)	(20,30,12) (3,5)

Dopodiché la **gradazione qualitativa dei plurali**:

1. 2. 3. 4. pochi, alcuni, parecchi, tanti;
5. 6. 7. meno di, tanti quanti, più di,

è una caratteristica evoluta specifica del linguaggio umano e presenta un insieme di possibilità in numero di 7, come quanto riferito ad un ordine lineare. Inoltre **gli avverbi e le circonlocuzioni avverbiali di tempo**:

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| 1. ora; | 4. 5. spesso – raramente; |
| 2. 3. prima – dopo; | 6. 7. in breve – a lungo, |

come pure quelli **di luogo**:

- | | |
|------------------------------|--------------------------------------------|
| 1. qui; | 10. 11. dentro – fuori; |
| 2. 3. vicino – lontano; | 12. 13. accanto – a contatto; |
| 4. 5. davanti – dietro; | 14. 15. lungo – attraverso; |
| 6. 7. a destra – a sinistra; | 16. 17. in modo concentrato – estesamente. |
| 8. 9. sopra – sotto; | |

sono raggruppati in modo da rappresentare ed interpretare fenomeni e processi rispettivamente tempo – varianti, cioè dinamici, e georeferenziati (principalmente a referenza spaziale bidimensionale o 2D e ½). Si noti allora come 7 e 17 siano numeri ricorrenti negli ambiti lineare e planare, ad esempio: simmetrie di fregi e mosaici, relazioni topologiche 1D e 2D. Successivamente la tabella di casi locativi, in numero di nove:

Casi locativi:	<u>stato in luogo</u>	<u>moto da luogo</u>	<u>moto a luogo</u>
<u>interiorità</u>	inessivo	elativo	illativo
<u>superficialità</u>	superessivo	delativo	sublativo
<u>aderenza</u>	adessivo	ablativo	allativo

(il numero massimo presente in alcune lingue indoeuropee: le uniche per le quali esiste una classificazione completa e studi comparativi) può essere estesa a sedici, aggiungendo il moto per luogo circoscritto (anche

se non è mai riferito ad un caso proprio specifico) e comprendendo fra le posizioni anche l'esteriorità, ovvero a 32 tenendo conto di oggetti composti, oltreché semplici. Si noti altresì come lo stesso numero sia un numero ricorrente nell'analisi spaziale, ad esempio: simmetrie dei cristalli, relazioni topologiche 3D.

In aggiunta, un'analisi estensiva delle relazioni geometriche 3D porta a considerare 230 casi, ovvero un numero pari alle simmetrie 3D senza restrizione cristallografica (d'altra parte le relazioni geometriche 1D e 2D sono rispettivamente 10 e 32, numeri rispettivamente pari alle simmetrie 2D e 3D senza restrizione cristallografica, ovvero numeri che curiosamente ritornano, pur con lo slittamento in avanti di una dimensione).

Infine si constata come alcune **determinazioni psico – linguistiche** abbiamo fornito (presumibilmente in modo indipendente) come gli stessi numeri 7 (con un intervallo: 5 – 9), 17 e 32 rappresentino:

- ❑ il numero massimo di informazioni che possono essere facilmente memorizzati nella memoria a breve;
- ❑ il numero massimo di informazioni che possono essere facilmente memorizzati nella memoria a lungo termine (tramite reiterazione);
- ❑ il numero massimo di informazioni che possono essere memorizzate nella memoria a lungo termine tramite il cosiddetto metodo dei *loci*, noto già nel mondo antico greco – romano per gli studi di retorica e ripreso come arte della memoria, fra umanesimo e rinascimento, ovvero associazioni con altre informazioni più familiari e, di conseguenza, più facili da ricordare 22.

Qualche altra curiosità è nota già da tempi ormai antichi come la corrispondenza fra l'ordine dei 12 = 5 + 7 mesi di 30 e 28 (o 29 nell'anno bisestile, comunque stabilito solo con il calendario giuliano) giorni alternati a quelli di 31: (a partire dal mese successivo all'equinozio di primavera o punto d'ariete) e la successione armonica delle note, come confermato dagli studi seicenteschi d'acustica sul clavicembalo ben temperato:

Mesi	Giorni	Note musicali	Tasti della tastiera
1. Aprile	30 gg.	la be molle	tasto nero
2. Maggio	31 gg.	la	tasto bianco
3. Giugno	30 gg.	si be molle	tasto nero
4. Luglio	31 gg.	si	tasto bianco
5. Agosto	31 gg.	do	tasto bianco
6. Settembre	30 gg.	re be molle	tasto nero
7. Ottobre	31 gg.	re	tasto bianco
8. Novembre	30 gg.	mi be molle	tasto nero
9. Dicembre	31 gg.	mi	tasto bianco
10. Gennaio	31 gg.	fa	tasto bianco
11. Febbraio	28 o 29 gg.	sol be molle	tasto nero
12. Marzo	31 gg.	sol	tasto bianco

22 Chi scrive non ha tentazioni cabalistiche, né crede a disegni intelligenti, ma riconosce volentieri come una piacevole interazione fra la realtà biologica degli esseri umani (e forse non solo) e la realtà fisica nella quale sono immersi abbia prodotto, nel corso delle varie tappe dell'evoluzione fisica e sociale, determinate strutture mentali dalle quali è derivata anche la costruzione di una semplice teoria ingenua della matematica, come i primi passi dell'aritmetica.

ed un giovane e povero matematico indiano (Ramanujan, 1887 – 1920), oltre ad occuparsi di successioni, serie ed altro ancora, in campo numerico, ha esteso la collezione delle suddette curiosità notando, ad es.:

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

$$1089 \times 9 = 33^2 \times 3^2 = 9801 \qquad 2178 \times 4 = 2 \times 1089 \times 2^2 = 8712$$

ovvero nessun numero più piccolo può essere espresso come doppia somma di due cubi; inoltre nessun altro numero minore di 10.000 può essere scomposto in due fattori di cui uno è se stesso scritto a rovescio. La teoria dei numeri risale a Pitagora, Euclide ed Eratostene, ha avuto alcuni cultori medioevali, come Fibonacci, e nuovi sviluppi fra il '600 ed il '700, con Fermat e Mersenne, poi con Eulero e Legendre. Dall'800, dopo Gauss, molti studiosi l'hanno ancora approcciata: essa è un gioco proprio affascinante e sorprendente (ad es., le quaterne cubiche sono più delle terne pitagoriche, numeri collegati al cosiddetto ultimo teorema di Fermat, solo recentemente dimostrato: $a^n + b^n = c^n$ con $n \leq 2$ ed a, b, c interi).

Resta da dimostrare, fra l'altro, perché i numeri perfetti, cioè i numeri pari alla somma di tutti i loro divisori, compreso l'uno e tranne se stessi (ad es., 6, 28, 496, 8128, ecc.: ormai se ne conoscono una cinquantina) siano tutti pari. Per pura curiosità e per la spontanea simpatia del nome, in tempi odierni così difficili e travagliati, dove il mondo e questo paese sono così poco normali, si aggiunge che sono detti amichevoli due numeri che vicendevolmente si scambiano il gioco della somma dei propri divisori come ad es., 220 e 284, 1184 e 1210, 2620 e 2924, 5020 e 5564, 6232 e 6368, ecc., dove la prima coppia dispari è 12285 e 14595, mentre una coppia mista, teoricamente possibile, non è presente per numeri inferiori ad un milione.



Pablo R. Picasso (Parigi, 1949): "Colomba della pace",
disegnata per il manifesto del Congresso della Pace Mondiale.

Forse siamo destinati a rimanere nelle nuvole: meglio le nuvole che la melma! (Gaetano Salvemini, nato nel 1873 e scomparso nel 1957, purtroppo interventista prima dell'inutile strage costituita dalla prima guerra mondiale, professore universitario in esilio volontario dal 1925, per duplice delusione politica, ugualmente critico dopo, rientra solo nel 1947, alla vigilia di essere nominato professore emerito).

E' noto a tutti il paradosso filosofico della scuola eleatica greca che afferma come il piè veloce Achille non possa raggiungere la tartaruga ed altri paradossi simili della stessa scuola filosofica girano attorno a concetti analoghi, aventi come centro d'interesse lo zero e l'infinito. Oggi lo zero è un numero, completamente acquisito, e si sa benissimo che l'infinito è il limite cui tende una divisione impossibile tra un numeratore finito ed un denominatore nullo. Tuttavia lo zero arriva in Europa solo nel medioevo, con gli arabi che l'hanno imparato dai persiani i quali, a loro volta, l'hanno imparato dagli indiani che sono forse gli unici, tra i popoli antichi, ad aver costruito un'aritmetica attenta al problema del calcolo

Di conseguenza, la mancanza del numero zero costringe a concepire l'infinito per paradossi. Si noti comunque come tutto il mondo occidentale antico (medio – orientale, nord – africano ed europeo – mediterraneo) abbia chiari i concetti di assenza, vuoto e nulla, ma questi concetti logici non danno vita al numero zero. Così il primo secolo va dall'anno uno all'anno cento e, a tutt'oggi, non esiste lo zero ordinale 23. Resta da osservare che, pur arrivando lo zero in Europa nel medioevo, il concetto di limite si forma solo tra il settecento ed il primo ottocento, con Leibniz, Newton, Eulero, Lagrange, Laplace e Cauchy. Naturale conseguenza della scoperta del limite è la formulazione rigorosa, da un punto di vista matematico, anche del concetto d'infinito. Esso non è certamente un numero 24, ma uno strumento matematico utilissimo 25, per completare studi elementari o più complessi.

Un atteggiamento laico è saper pensare e scrivere di cose religiose, nel pieno rispetto di chi le considera parti importanti del proprio essere, ma nella pretesa dell'altrettanto pieno rispetto di tutti quanti si sentono più lontani, lontani o disinteressati: qualsiasi altro atteggiamento è oscurantista e/o fondamentalista, forse errato e certamente pericoloso. In quest'ottica, sono presi in considerazione alcuni numeri ricorrenti nelle religioni occidentali (Ebraismo, Cristianesimo ed Islam) e messi a confronto con altri numeri ricorrenti in quelle orientali (tra le quali Induismo, Buddismo, Confucianesimo, Taoismo e Shintoismo sono tra le maggiori).

Il numero 7 è anche il numero dei giorni della creazione come raccontato dal libro della Genesi nella Bibbia da cui deriva innegabilmente l'attuale calendario settimanale 26, ed è altrettanto noto che il decalogo elenca 10 comandamenti, suddivisi in numero 3 (numero complementare tra 2 e 5) più 7, come raccontato dal libro dell'Esodo. Gli stessi numeri tornano poi, abbastanza frequentemente, in altri libri dello stesso testo. Forse meno noto, ma comunque d'interesse, è il numero 5 dei precetti dell'Islam come raccontati nel Corano verso cui chi scrive deve riconoscere una certa ignoranza. D'altra parte, l'occasione di citare la religione musulmana ed il suo libro sacro fornisce anche la gradita occasione per ricordare un ex – allievo del dottorato di ricerca, profugo somalo ed ora esule a Londra, con la sua voglia tenace e le sue piene capacità di essere uno studioso di valore, alla pari tra tutti, perché l'intelligenza non ha colore.

Chi scrive non ha una conoscenza approfondita anche delle religioni orientali e si rifà pertanto a poche nozioni di carattere generale. Eppure i 4 cicli della vita, i 4 scopi della vita e le 4 classi della società dell'Induismo, come pure le 4 nobili verità ed il nobile ottuplice sentiero (aggettivo numerale derivato dal numero 8) del Buddismo (cui si sono collegate, nel tempo, anche più antiche religioni cinesi e giapponesi) mettono in luce giochi numerici diversi. Infatti 4 ed 8 sono le prime due potenze di 2, prescindono dal numero 5, non fanno uso del numero differenza 3, né del numero somma 7. Lo sviluppo dell'agricoltura e

23 Lo zero è conosciuto anche dai Maya, ma sono una popolazione dell'America Centrale, senza contatti noti con il mondo europeo ed asiatico.

24 Il riconoscimento linguistico dei primi numeri, fino a quattro, come numeri è abbastanza lento e controverso; in particolare, l'uno non è considerato un numero, ma solo un articolo indeterminativo (ed alcuni nomi lo sostituiscono: integro, intero, singolo, solitario, ecc.), piuttosto a lungo, ed anche il due ha difficoltà ad essere riconosciuto come un numero, soprattutto dove rimangono forme duali (e parecchi nomi lo sostituiscono: ambo, coppia, doppio, paio, ecc.).

25 Oggi giorno gli infiniti sono tanti, a partire dall'infinità numerabile (tipica dei numeri naturali e razionali) e da quella della continuità (tipica dei numeri reali), passando per il concetto di infinitesimo, fino a giungere agli infiniti transfiniti.

26 Il calendario romano, benché più volte riformato, è strutturato su tre giornate, a cadenza mensile, dette: calende (all'inizio), none (il giorno 5 del mese) ed idi (a metà mese). Tutte e tre i giorni sono preceduti e seguiti da un giorno denominato precedente e seguente, inoltre la mancanza dello zero fa coincidere il giorno uno con il giorno stesso. Tutti gli altri giorni sono calcolati come giorni mancanti ad

l'addomesticamento degli animali ha formato una grande continuità dalle pianure della Cina al bacino del Mediterraneo 27, il tortuoso cammino della storia ha poi favorito lo sviluppo di percorsi culturali distinti e diversi, tra oriente ed occidente 28. L'augurio sincero è che questa differenziazione sia sempre ricchezza e complementarità, e mai conflitto.



Caspar David Friedrich (1818): "Il viandante sul mare di nebbia", Kunsthalle – Amburgo 29.

La conclusione serena di un qualsiasi discorso, serio, serio o divertente, non può che essere un discorso aperto. I numeri 7, 17 e 32 sono certamente importanti : 7 è un numero che ricorre in molte fiabe scritte dal romanticismo, 17 in storie zingane, fruite da quel grande miscuglio di popoli e lingue, sito tra il Baltico ed il Mediterraneo, e 32 è un numero ricorrente nella cabala ebraica. Eppure corre ancora il dovere di ripetere che ogni numerazione è sempre arbitraria e costituisce solo un utile strumento, per interpretare e comprendere la realtà nella sua grande complessità e variabilità. Così una semplice ricerca porta a trovare altre fiabe basate non solo sui numeri primi 13, 19 e 23, forse perché all'interno delle ventiquattro ore del giorno, ma anche sui successivi numeri primi 29 e 31, forse perché all'interno dei giorni dei mesi (od almeno di quelli più lunghi). Altre fiabe sono comunque raccontate per i numeri 91 che non è neppure primo, 93 e 97 che invece lo sono, ma sono anche abbastanza grandi: viva insieme rigore e fantasia!

Fondare biblioteche, per poter sempre leggere, è come costruire ancora granai pubblici,
per ammassare riserve contro un inverno dello spirito (Marguerite Yourcenar, Memorie di Adriano) ³⁰.

una delle tre suddette giornate. Resta da segnalare come siano sempre 7 i giorni mancanti alle idi e 17 quelli mancanti alle calende del mese successivo, per tutti i mesi di trenta giorni.

27 La stessa continuità non si trova invece nelle due Americhe, nell'Africa sub – sahariana e tra le isole dell'Oceania.

28 Un possibile punto di passaggio è forse dato dall'antica religione persiana dello zoroastrismo che si basa su un principio dualista (aggettivo numerale derivato dal numero 2), insegnando 3 motti principali, e prevede 8 concetti maggiori.

29 Il dipinto presentato fa riferimento al tema della vastità compresa tra lo zero e l'infinito. Si vedono sette colline, tra roccia e nebbia, di cui cinque più evidenti, chi scrive ha avuto il piacere di contare diciassette nuvole e forse trentadue flutti tra tutti i marosi. Del resto il mito del viandante, in bilico tra il rischio del nulla e la brama dell'infinito, è antichissimo in tutto il pensiero occidentale: dall'Ulisse omerico e l'Enea virgiliano, passando per la Commedia dantesca ed l'Orlando ariosteo, fino al Pastore asiatico errante leopardiano, al romanticismo ed oltre ancora (ad esempio, con l'Ulisse di Joyce).

APPENDICE F – SPATIAL DECISION SUPPORT SYSTEM (SDSS)

Caratteristiche di un SDSS

L'SDSS è un sistema di gestione del SIT che permette, sfruttando le sue capacità di analisi ed integrato con motori di calcolo, di essere a supporto delle decisioni. Essenzialmente tale sistema deriva da applicazioni in campo economico, basate sul concetto dell'analisi multicriteriale. In tale settore, si ha un DSS (Decision Support System), dove i dati analizzati non sono di tipo spaziale e di conseguenza anche la risposta (decisione) non lo è. Con l'introduzione dei SIT, applicazioni capaci di georeferenziare, gestire ed analizzare i dati spaziali, i principi dell'analisi multicriteriale sono stati acquisiti dagli stessi, per cercare di risolvere svariate problematiche nel settore dell'analisi dei rischi e della gestione dell'ambiente e del territorio.

Soluzione di un problema decisionale spaziale con tecnologia SIT

La soluzione di un problema decisionale spaziale per mezzo della tecnologia SIT non significa aver costruito un SDSS: questo può solo essere l'inizio di un progetto di SDSS. Per illustrare tale concetto è necessario fare una panoramica sulle principali caratteristiche dei due modi di trovare una soluzione ad un problema decisionale spaziale. Nella maggior parte dei casi, risolvere un problema di decisione spaziale con tecnologia SIT presenta difficoltà di diverso genere, aventi a che fare proprio con i concetti di tipo spaziale; occorre infatti che siano soddisfatte le seguenti caratteristiche:

- disponibilità di un largo numero di decisioni alternative;
- le conseguenze di ciascuna delle soluzioni alternative esprimibili come variabili spaziali;
- ogni decisione valutabile sulla base di un'analisi multicriteriale;
- criteri nell'analisi multicriteriale qualitativi e quantitativi;
- più soggetti che si occupano della decisione, da qui la necessità di disporre di un insieme di scelte;
- il soggetto o i soggetti autori della decisione con una scaletta di priorità nella valutazione delle conseguenze di una decisione (osservando che una decisione può essere anche non intervenire)
- le decisioni spesso incerte, ossia dove è difficile dire se e meglio operare in un modo piuttosto che in un altro (infatti la presa di una decisione comporterà vantaggi, sotto certi aspetti, e svantaggi, sotto altri; pertanto la scelta dipende sempre dalla sensibilità del decisore).

Tre sono le fasi principali in un processo decisionale (si veda, a riguardo, la fig. B.1):

- intelligenza, perché bisogna individuare innanzitutto, se c'è un problema decisionale da risolvere, e capire, se c'è la possibilità di disporre di un insieme di soluzioni alternative;
- progetto che consiste nel predisporre tutte le possibili soluzioni alternative del problema;
- scelta, perché occorre valutare quale, tra le scelte predisposte, risulti essere la migliore.

Si può intravedere il concetto di analisi multicriteriale; infatti per la valutazione della migliore scelta possibile, il decisore fa una sorta di analisi costi benefici (tipico concetto economico), valutando i vantaggi e gli svantaggi di una determinata scelta. Un SIT può essere da supporto in tutte e tre le fasi.

30 Un'altra ed ulteriore conferma delle particolarità aritmetiche nel pensiero occidentale è data dalle 32 consonanti dell'indoeuropeo classificate in 7 gruppi: labiali, dentali, palatali, velari, uvulari, faringali e glottidali, di cui 17 presenti nell'italiano standard: *b c ch d f g*

- ❑ La prima fase (intelligenza), si avvale della tecnologia SIT nello scrutare il territorio, cercare le zone afflitte da problematiche e studiare la possibilità di disporre di soluzioni. In tale fase, il SIT può essere determinante, in quanto consente l'esplorazione l'analisi e l'interrogazione di ampie basi di dati georeferenziate che, con l'ausilio di un'appropriata cartografia (anch'essa georeferenzata) della zona in esame, può indicare dove sussistano problemi e se esistano possibili soluzioni. Tutto ciò avviene attraverso visualizzazioni, ben comprensibili al soggetto autore della futura decisione.
- ❑ Nella seconda fase (progetto), il SIT può provvedere alla predisposizione di un insieme di possibili decisioni, al fine di risolvere il problema identificato nella fase precedente. Questo può essere risolto avvalendosi di un SIT, come visualizzatore e analizzatore del territorio, o possedendo un motore generatore di decisioni alternative, incorporato nel SIT stesso (spesso non è già contenuto, ma può essere richiesto o progettato, secondo il problema da risolvere). Si osservi tuttavia come disporre di un generatore di alternative possa indurre il decisore a non esprimere le sue capacità professionali.
- ❑ La terza fase (scelta) si presta meno all'utilizzazione di un SIT per la difficoltà d'inglobare nel sistema le preferenze ed i criteri di valutazione del decisore; comunque il SIT è d'ausilio, perché restituisce le conseguenze di ogni decisione che possono essere valutate dal soggetto autore della scelta finale.

Si capisce così che, nonostante le capacità di un SIT possano essere messe a disposizione in tutte le fasi, lo svolgimento della procedura risulta essere statico, in quanto il SIT, in sé, assiste il decisore, ma non esercita azioni di retro – azione.

Definizione di SDSS

Un SDSS è un sistema per predisporre velocemente, a supporto di un decisore (o di un gruppo di decisori), la soluzione migliore ad un problema semi – strutturato. Sono i tre concetti sottolineati che distinguono un SDSS dal dover semplicemente risolvere un problema decisionale spaziale con l'ausilio di tecnologia SIT. Infatti esiste la necessità di progettare un SDSS, quando altre tre problematiche fondamentali si aggiungono a quelle tipiche di un problema decisionale spaziale.

- ❑ Il problema decisionale è semi – strutturato:
- ❑ un problema è completamente strutturato (e, di conseguenza, programmabile), quando può essere organizzato o seguendo una rilevante teoria di base o seguendo i criteri dettati dal decisore;
- ❑ un problema è non – strutturato, quando non può essere organizzato attraverso una teoria di base, né il decisore è in grado di dettare i criteri di scelta;
- ❑ nel mezzo, si pone la definizione di problema semi – strutturato che raccoglie tutte quelle problematiche per le quali esiste una parte programmabile ed una non – programmabile.
- ❑ La decisione deve seguire un processo rapido (velocità di decisione); infatti lo scopo per cui si progetta un SDSS non è riuscire a prendere la decisione migliore, ma a prenderla nel più breve tempo possibile.
- ❑ La soluzione deve essere di supporto ad uno od più decisori: ciò significa che il soggetto od i soggetti autori della decisione devono poter analizzare e controllare le diverse fasi del processo decisionale e devono poter interagire con il sistema per poter eventualmente modificare le condizioni al contorno che determinano la soluzione. In pratica, occorre poter intervenire, se variano i dati alla base della decisione

e, in questo contesto, si inserisce la necessità di avere un sistema di calcolo reiterativo, cioè in grado di ripetere il processo decisionale, quando cambiano i dati di base.

La tecnologia necessaria per un DSS si condensa nell'acronimo DDM: dialog, data, modeling, la cui comprensione è ovviamente immediata (Fig. II.74.B).

- Data Base Management System (DBMS) è la parte software che si occupa di gestire i dati geografici di base (data); al suo interno risiedono funzionalità su tipi di dati (posizione, topologia ed attributi) sulla loro logica (relazioni, gerarchie e reti DBMS, ecc.) e sul loro controllo (acquisizione, memorizzazione, modifica, integrazione, ecc.).
- Model Base Management System (MBMS) è il motore che genera decisioni, dotato di funzionalità di analisi statistiche (riconoscimento del problema, simulazione, ottimizzazione e valutazione delle conseguenze di una scelta), di previsione (analisi spaziale dei dati, analisi multicriteriale dei risultati) e di modellazione delle preferenze del decisore (gerarchie tra gli obiettivi con valutazione dei criteri di scelta) e dell'incertezza (dei dati e dei ruoli di chi concorre alla decisione).
- Dialog Generation and Management System (DGMS) è l'interfaccia tra il decisore ed i vari componenti software utilizzati le cui funzionalità vanno dalla semplicità di utilizzo (commenti, messaggi d'errore e d'aiuto), allo stile (interfaccia grafica, menù e comandi) ed alla visualizzazione grafica tridimensionale o bidimensionale (risoluzione delle immagini e stampa delle soluzioni).

Principali caratteristiche di un SDSS

La progettazione e realizzazione di un SDSS richiede un chiaro obiettivo, per risolvere un problema semi-strutturato, ed un facile utilizzo dell'interfaccia da parte dell'utente. Tutto ciò si attua mediante:

- snellezza e potenza del procedimento di combinazione tra i dati ed il motore di calcolo;
- capacità di mettere a confronto soluzioni diverse;
- capacità di utilizzare diversi stili di decisione;
- capacità di risolvere problemi reiterativi;
- trasformazione della decisione in un dato spaziale;
- analisi geografica e sua rappresentazione;
- restituzione spaziale (creazione di mappe).

Pertanto le difficoltà di realizzazione di un SDSS stanno nel considerare le seguenti problematiche:

- l'SDSS fornisce svariate soluzioni e, in generale, ogni decisione è incerta, per costruzione stessa;
- ogni decisione alternativa è una variabile spaziale;
- ogni soluzione ha come fondamento un'analisi multicriteriale;
- i criteri usati possono essere sia qualitativi che quantitativi;
- spesso più persone, con diverse visioni, sono chiamate a prendere la stessa decisione.

Di conseguenza, per realizzare un SDSS occorre lavorare su una moltitudine di dati. Tipici esempi sono le analisi di rischio ambientale dove, utilizzando algoritmi specifici per tipo di analisi, si incrociano diversi tipi di dati (tipologie di zona, emissioni inquinanti, popolazione residente, presenza di particolari beni storici ed ambientali) per ottenere una carta del rischio. Pertanto è evidente l'effettiva complessità di un sistema a

supporto delle decisioni: come espresso dalla definizione stessa, un SDSS non prende decisioni, ma deve poter offrire valide basi a chi è proposto per farlo (fig. II.75). Poiché non esiste la soluzione valida in assoluto, è compito di un SDSS fornire scenari alternativi e pertanto avere, al suo interno, tutta una serie di informazioni. Il presente lavoro, per quanto complesso, rappresenta solo una parte di un progetto di analisi di rischio, in quanto cerca di stabilire uno dei dati fondamentali dell'analisi multicriteriale spazio – temporale: la diffusione nel tempo e nello spazio di alcuni tra i principali fenomeni e/o processi naturali ed antropici.

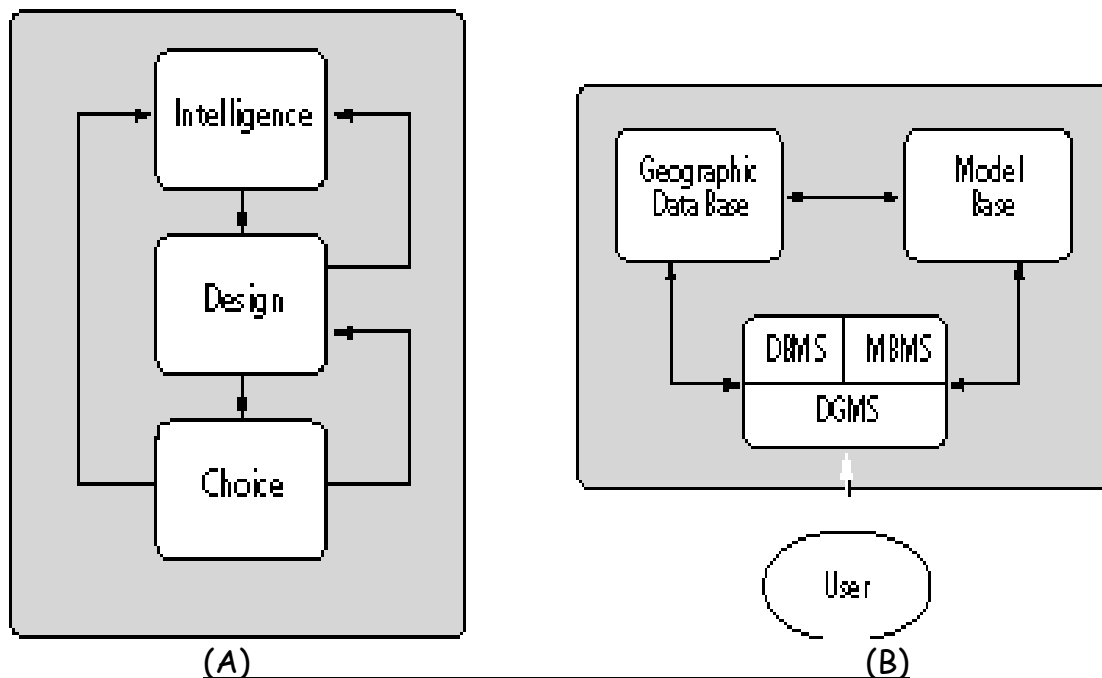


Fig. G.1 – (A) Relazione tra le fasi di un SDSS

(B) Relazione tra i componenti fondamentali

SDSS

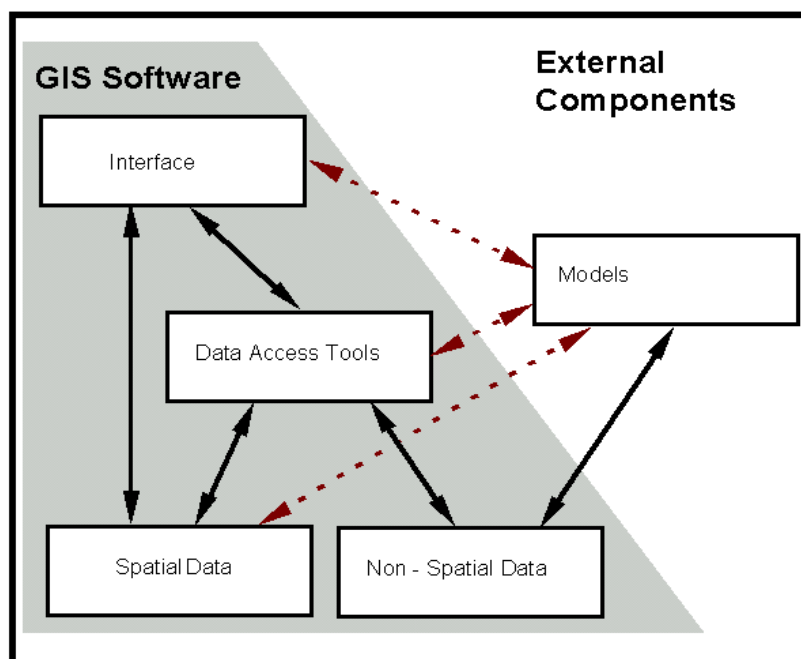


Fig. G.2 – Architettura di un SDSS

APPENDICE G – SERVIZI E SIMULAZIONE ³¹

Gran parte dei programmi scientifici esistenti richiedono, in ingresso, dati organizzati secondo regole e forme ben precise predefinite all'interno di un determinato programma. Se il file dati non è nella forma richiesta, si pone il problema di una sua riorganizzazione: talvolta semplicemente un cambio di formato, in altri casi un'operazione più complessa. Due sono strade seguite per portare un file dati, da una forma ad un'altra:

- La prima, classica soprattutto un tempo, è la costruzione di un programma od una macro – istruzione, solitamente di poche istruzioni, atti a svolgere l'azione formale richiesta; esaurito il suo compito, questi sono abbandonati ³².
- La seconda strada è l'avere a disposizione un foglio elettronico, dove diverse operazioni (qui e nel prosieguo, dette programmi di utilità) possono svolgere ciascuna una differente azione elementare, tutte provviste della capacità d'identificare la struttura dati in ingresso tramite valori assegnati ad opportuni parametri (per esempio: lunghezza dei record, campi in cui è suddiviso ciascun record, estremi inferiori e superiori di tali campi, ecc.).

Nel seguito, si utilizzeranno anche le espressioni: riga/he e colonna/e, mutuata dall'algebra lineare, per indicare insiemi di elementi alfanumerici (cioè parole e/o numeri), rispettivamente disposti su tutti i campi di un record e su uno stesso campo di tutti i record di un file. E' necessario innanzitutto definire i parametri e le azioni elementari richieste. Si noti subito la possibilità di compiere azioni anche complesse, per riorganizzare un file dati, utilizzando una catena di azioni elementari ed i risultati intermedi prodotte da queste. Si focalizza l'attenzione su due strutture di file dati, particolarmente comuni:

- file dati di serie temporali;
- file dati a supporto territoriale (o lattici 2D e 3D).

Gli esempi si riferiranno sempre a questi due particolari tipi di file dati; tuttavia non è detto che i programmi di utilità possano trovare applicazione anche per altri tipi di file dati. Le caratteristiche principali di un file dati di una serie temporale o a supporto territoriale sono le seguenti:

- tutti i dati costituiscono un insieme di record disposti sequenzialmente;
- i record hanno solitamente un numero massimo di caratteri, quantomeno per problemi di leggibilità;
- le informazioni contenute in un dato record definiscono un certo punto;
- all'interno di ogni record, sono definiti alcuni campi;
- le quantità alfanumeriche presenti nei campi definiscono grandezze associate al punto;
- tutte le quantità alfanumeriche di un preciso campo sono omogenee fra loro.

³¹ Le osservazioni, contenute in questa parte, sono spesso relegate in note aggiuntive, poste in fondo dopo tutte le conclusioni od addirittura omesse, perché ritenute quasi superflue. Al contrario, la scelta di inserire queste osservazioni significa insieme sottolineare l'importanza pratica delle stesse, nel contesto del Trattamento delle Osservazioni, ovvero e più in generale della Matematica Applicata, nonché ribadire come il suddetto Trattamento delle Osservazioni sia pressoché impossibile senza un'opera paziente di analisi dei dati, attuata con la statistica computazionale, dove i programmi di utilità svolgono un umile, ma indispensabile e fondamentale, compito di supporto, pena l'incapacità pratica d'operare.

³² Questo modo d'operare è estremamente pericoloso e controproducente. E' pericoloso, poiché la possibilità di un errore di analisi nel programma non è mai trascurabile. Infatti riorganizzare un file dati richiede, a volte, azioni complesse e non sempre di facile ed immediata traduzione. Inoltre la presenza di un dato in ingresso, in una forma non precisa, può causare errori nel file dati in uscita, rendendo inattendibili i risultati dell'operazione programmata. E' controproducente, poiché esaurito il suo compito il programma è cancellato od il suo riutilizzo sarà alquanto improbabile per l'azione ristretta, svolta su quel particolare file dati.

Due esempi di una struttura di questo tipo, una serie temporale ed un lattice 2D sono rispettivamente ³³:

- NOME PUNTO TEMPO COMP. U
- NOME PUNTO COORD. X COORD. Y COMP. U

Si elencano di seguito i parametri di uso più frequente per definire la struttura dati:

- lunghezza dei record;
- numero dei campi all'interno di ogni record;
- estremo inferiore e superiore dei campi (riferiti ai dati in ingresso);
- estremi inferiore e superiore dei campi (riferiti ai dati in uscita).

Altri parametri, di uso specifico per alcuni programmi di utilità, sono spiegati nel seguito. La possibilità di specificare la struttura dei file in ingresso ed in uscita, tramite opportuni parametri, rende possibile la concezione dei programmi di utilità molto generali, cosa necessaria anche se, come già detto in precedenza, i programmi di utilità sono, per lo più, operazioni eseguite con un foglio elettronico e non compiute con singoli programmi. Infatti solo la loro comprensione, permette la loro reale conoscenza ed il loro utilizzo e, a riprova, si pensi a quante potenzialità stanno abitualmente dentro grandi sistemi e/o programmi complessi, senza che l'utente comune ne faccia uso. Il loro schema generale comprende quattro fasi.

- La prima fase è l'assegnazione dei parametri necessari per definire la struttura dei file ed eventuali altri parametri, richiesti per compiere l'azione elementare prescelta (una lettura dei parametri, in modalità interattiva, facilita l'uso dei programmi di utilità).
- La seconda fase è la lettura dei record che risiedono su dispositivi di memoria di massa, così non si elabora, né si memorizza l'intero file dati; ma si usa la memoria di massa come memoria esterna da cui prelevare e/o depositare i record.
- La terza fase utilizza i parametri, letti precedentemente, e svolge l'azione elementare richiesta.
- La quarta memorizza sempre sui dispositivi di memoria di massa il record trasformato.

La condizione logica di uscita dal ciclo, comprendente le fasi lettura-azione-scrittura, è un test sulla fine fisica del file dati (EOF). Si noti come la capacità di evitare la memorizzazione dell'intero file dati all'interno del programma e, contemporaneamente, la possibilità di svolgere un'azione elementare, codificabile in poche istruzioni permette l'elaborazione di file dati di grosse dimensioni in tempi relativamente brevi. Quattro classi distinte di operazioni definiscono quattro differenti gruppi di programmi di utilità:

- conversione e controllo;
- trattamento;
- elaborazione;
- calcolo.

³³ Altri esempi possono mostrare serie temporali o lattice 2D che analizzano grandezze vettoriali, come pure lattice 3D che analizzano grandezze scalari o vettoriali. E' altresì possibile prendere in considerazione serie temporali di lattice 2D o 3D, come pure lattice 2D o 3D di serie temporali che, a loro volta, analizzano grandezze scalari o vettoriali, anche se casi completi (come questi) sono relativamente rari. Un caso particolare è dato da un lattice 1D (con grandezze scalari o vettoriali), dove l'essere monodimensionale della dimensione spaziale rende questa formalmente identica ad una serie temporale.

Conversione e controllo

Questo primo gruppo permette il cambio del formato e/o la verifica del corretto inserimento di file dati. Queste operazioni sono di frequente utilizzo nella fase di immissione dei dati, quando i dati sono disponibili solo su supporto cartaceo. L'avere dati solo su carta pone almeno due problemi:

- il primo consiste nel digitare alla tastiera i dati, per trasferirli dal supporto cartaceo ad uno magnetico in tempi ragionevolmente brevi;
- il secondo nel trovare e correggere eventuali errori di trascrizione o posizionamento, dovuti all'operatore.

I due problemi sono strettamente collegati fra loro; infatti una riduzione di tempo nella fase di inserimento comporta un'alta probabilità di errori di trascrizione o posizionamento, cosa che aumenta la già onerosa dose d'attenzione richiesta per la fase di controllo e correzione. Al contrario, un aumento di tempo nella fase di inserimento abbassa la probabilità di errori di trascrizione o posizionamento, senza tuttavia annullare la successiva fase di controllo e correzione. Pertanto è necessario utilizzare un metodo che permetta una facile e veloce digitazione dei dati, e disponga poi di modalità di conversione, per portare i dati in forma più leggibile, e per la ricerca e le eventuali correzioni di errori di trascrizione e posizionamento.

Un metodo suggerito (e qui adottato) è l'inserimento di dati in formato libero. In sostanza si digitano sul record le quantità alfanumeriche utilizzando come carattere separatore fra i campi il carattere virgola. E' facile verificare che il numero di caratteri digitati è ridotto rispetto ad una digitazione contenente i caratteri blank necessari per ottenere un file formattato, ovvero un file ben leggibile e facilmente controllabile. Purtroppo tuttavia, il formato libero, pur riducendo notevolmente i tempi di inserimento, offre come prodotto finale un file dati poco leggibile, con notevole difficoltà per un successivo controllo. Pertanto è necessario avere a disposizione modalità di conversione per poter operare due tipi di trasformazione:

- la prima (obbligatoria) dal formato libero ad un formato specifico;
- la seconda (eventuale, ma frequente) da un formato specifico ad un altro formato, altrettanto specifico.

La fase successiva all'inserimento è il controllo dati. Due errori tipici sono:

- l'errore di posizionamento di uno o più dati all'interno di un record;
- l'errore di trascrizione, cioè aver digitato un carattere alfanumerico diverso da quello letto.

Il primo errore comporta, nel migliore dei casi, un'interruzione nella fase di lettura del generico programma che utilizza i dati inseriti. Il secondo errore invece può introdurre un elemento perturbativo, più o meno evidente, sui risultati finali. Infatti mentre il primo tipo di errore si può ricercare e correggere, con una procedura automatica, il secondo non offre questa possibilità. Per ricercare gli errori di trascrizione è allora necessario un doppio inserimento dei dati; un semplice programma verifica poi, carattere per carattere, i due file mettendo in evidenza le eventuali differenze. Questa procedura si basa su un ragionamento empirico, ma efficace. Infatti considerata piccola la probabilità di commettere un determinato errore, la probabilità di trovare lo stesso errore di trascrizione nella stessa posizione su due file, inseriti da operatori diversi, ovvero in condizioni di indipendenza, è pari al prodotto delle probabilità elementari, ovvero piccolissima e praticamente nulla. Per quanto possa sembrare paradossale, la procedura del duplice inserimento è indicata per file di grosse dimensioni per i quali la fase di controllo risulta onerosa in termini di tempo ed attenzione,

mentre per file di piccole dimensioni è accettabile un singolo inserimento con un successivo controllo visivo. In questo gruppo sono inseriti quattro programmi di utilità:

- FREE_TO_FORM: assegna un formato specifico ad un file scritto in formato libero (dove i campi sono separati, come usuale, dalla virgola);
- FORM_TO_FORM: cambia formato ad un file, ed è conveniente per la preparazione dei dati di ingresso per programmi con formato fisso;
- CONTROL_FILE: verifica record per record l'uguaglianza fra due file e ne segnala le differenze, ed è utilizzato nel caso di duplice inserimento dei dati;
- CONTROL_FORM: controlla il corretto allineamento delle colonne di un file, ed è utilizzato per la ricerca e la correzione automatica degli errori di posizionamento.

Trattamento

Questo secondo gruppo permette di svolgere azioni elementari, quali unire, separare, selezionare, scambiare le colonne o le righe di file di serie temporali od a supporto territoriale. Queste azioni elementari sono particolarmente utilizzate quando si vuole riunire, in un unico file, informazioni presenti su file distinti, oppure quando si vuole sfoltire un file di grosse dimensioni, prelevando i record costituenti i file, in modo cadenzato. I parametri utilizzati per descrivere la struttura dei file in ingresso sono quelli standard. Le possibili combinazioni delle azioni elementari svolte dai programmi di trattamento consentono lo svolgimento di azioni particolarmente complesse. La capacità di individuare, nella azione complessa da effettuare, il numero minimo di azioni elementari è fornita dall'esperienza dell'utente e da un uso intelligente delle modalità di trattamento.

Anche questi programmi di utilità hanno la fase di acquisizione parametri pilotata per consentire all'utente una veloce familiarizzazione all'uso. In aggiunta ai parametri utilizzati per definire la struttura dei file in ingresso, essi richiedono parametri più strettamente legati all'azione elementare da svolgere. Ad es., le modalità GATHER e SPLIT, le cui azioni elementari (opposte) sono rispettivamente unire per righe due file dati in un unico file e separare alternativamente le righe di un file in altri due file, richiedono due parametri che sintetizzano la regola di cadenza da applicare per unire o separare i file od il file. La regola di cadenza è sintetizzata da due numeri interi, così interpretati:

- il primo numero indica il numero di righe da prelevare dal primo file in ingresso (dall'unico file in ingresso) e depositare nell'unico file in uscita (nel primo file in uscita);
- il secondo numero indica il numero di righe da prelevare dal secondo file in ingresso (dall'unico file in ingresso) e depositare nell'unico file di uscita (nel secondo file in uscita).

Un'altra azione elementare operabile sulle righe di due file è il loro accostamento riga per riga (o di porzioni di queste); questa azione elementare è svolta dalla modalità JOIN. I parametri aggiuntivi sono due coppie di numeri interi che specificano gli estremi delle due particolari porzioni delle righe da unire. Dopo la fase di acquisizione dei parametri, due record sono letti nei due file in ingresso, dopodiché si accostano le due porzioni, formando un unico record, avendo selezionato in entrambi i record le posizioni specificate nella fase iniziale, e si scarica il record così ottenuto nel file in uscita.

L'azione elementare opposta a quella effettuata dalla modalità JOIN è svolta dalla modalità SELECT che permette di selezionare particolari colonne di un file. Pertanto richiesto il numero delle colonne da estrarre, un record è letto e, in base ai valori dei parametri assegnati, si estrae da quel record le porzioni specificate che sono successivamente scaricate nel file in uscita. Questo programma è indicato per estrarre particolari informazioni da un file che presenta su ogni record altre informazioni aggiuntive di nessun interesse per le successive elaborazioni.

Un'altra azione elementare, svolta dalla modalità MIX che consente di cambiare la disposizione delle colonne di un file. I parametri richiesti sintetizzano la regola per la nuova disposizione delle colonne:

- ordine di output riferito all'input (o viceversa);
- posizioni delle colonne nei file in ingresso ed in uscita.

Una particolare situazione di frequente impiego di questa azione elementare si ha quando si leggono coppie di numeri reali e si interpretano queste coppie come coordinate cartesiane: x e y . Se il file dati contiene le coordinate nell'ordine inverso, cioè y e x , essendo solitamente impossibile modificare l'istruzione di lettura di un determinato programma che le richiede (spesso usato a scatola chiusa), occorre scambiare preliminarmente le due colonne del file in ingresso.

Altre due modalità di trattamento INSERT e REPLACE permettono rispettivamente di inserire fra le colonne di un file o di sostituire ad una di esse una nuova colonna prelevata da un secondo file. In entrambi i casi i parametri addizionati sono simili a quelli della modalità SELECT.

Si noti come, ad ogni azione elementare svolta da una qualsiasi modalità di trattamento, corrisponda sempre un'altra modalità di trattamento che svolge l'azione inversa. Infatti l'azione inversa della modalità GATHER è svolta dalla modalità SPLIT, l'azione inversa della modalità JOIN, come pure delle modalità INSERT e REPLACE, è svolta dalla modalità SELECT, con l'eventuale impiego della modalità MIX, mentre l'azione inversa della modalità MIX è svolta ancora dalla stessa modalità MIX.

L'esperienza ha mostrato l'applicabilità di queste modalità di trattamento anche a file dati, non strettamente corrispondenti a serie temporali od a supporto territoriale. Pertanto si può affermare che i programmi di utilità costituiscono un valido strumento d'ausilio per tutta una vasta categoria di problemi inerenti, in generale, l'organizzazione di file dati qualsiasi, specie se di grosse dimensioni. In questo gruppo sono inseriti sette programmi di utilità

- GATHER: preleva alternativamente le righe di due file impilandole in un unico file;
- INSERT: inserisce una colonna (posta su un file di servizio) in un file;
- JOIN: unisce riga per riga due file in un unico file;
- MIX: cambia la disposizione alle colonne di un file;
- REPLACE: sostituisce una colonna (posta su un file di servizio) in un file;
- SELECT: seleziona particolari colonne di un file;
- SPLIT: separa alternativamente le righe di un file su altri due files.

Elaborazione

Questo terzo gruppo permette di svolgere azioni elementari di ordinamento e ricerca. Questi algoritmi, prevalentemente utilizzati nella costruzione e gestione di strutture dati tipo archivio, possono trovare impiego

e talvolta rivestono notevole importanza anche nel trattamento di file dati di serie temporali od a supporto territoriale. Ognuna di queste azioni elementari è compiuta, secondo valori assegnati ad opportuni parametri. Nella seguente tabella si elencano singole azioni elementari:

- ❑ CROSS: estrae da un file ordinato le righe secondo valori letti da un altro file ordinato (chiave);
- ❑ MERGE: unisce due files ordinati in un unico file;
- ❑ PACK: compatta le righe di un file ordinato;
- ❑ SORT: ordina un file (ordinamento ascendente / discendente);
- ❑ ZONE: estrae da un file tutte le righe secondo valori, compresi entro limiti predefiniti.

Fulcro di questo gruppo è ovviamente la modalità SORT, dove l'algoritmo utilizzato è l'ordinamento ad interscambi, cosiddetto dividi e migliora. Si descrivono i punti salienti per l'uso dell'algoritmo, senza entrare nel merito di un'accurata analisi della sua complessità computazionale. L'algoritmo SORT è in grado di effettuare l'ordinamento ascendente di un file, utilizzando come parametro ordinatore una porzione di record predefinita. Si noti poi come, per effettuare l'ordinamento discendente, basti moltiplicare per meno uno lo stesso parametro ordinatore (nel caso di numeri interi o reali).

I tipi previsti sono un insieme di caratteri alfanumerici, oppure un numero intero o reale. E' necessario introdurre la specifica tipo, poiché l'utilizzo del solo tipo carattere potrebbe essere causa di inconvenienti quando si ordinano numeri interi o reali. Ad es., un ordinamento ascendente di tipo carattere ordinerebbe i caratteri -1000 e 1000, mettendo 1000 al primo posto e -1000 al secondo, in quanto nella tabella ASCII il carattere *blank* viene prima del carattere meno). Queste situazioni anormali sono ancora più frequenti quando si ordinano numeri reali, come noto, allineati a destra, anziché a sinistra come le parole, dove il punto (o la virgola) danno il vero allineamento, se il numero di decimali non è costante.

Come per tutti gli altri programmi di utilità i dati risiedono sulle unità di memoria. Questo permette di prelevare e memorizzare solo coppie di record che dopo il confronto sono depositate, a seconda del risultato ottenuto, nei file in uscita. I dispositivi di memoria di massa utilizzati sono quattro file che si alternano nel compito di file in ingresso ed in uscita, per i vari passaggi intermedi. Il file da ordinare risiede inizialmente nel primo file, mentre il file ordinato si trova, ad operazione completata, nel secondo file.

La modalità MERGE unisce due file ordinati secondo un unico file ordinato. Questo tipo d'azione elementare è impiegata quando si vuole inserire nuovi record in un file ordinato ed ottenere, alla fine dell'operazione, ancora un file ordinato. Dopo la fase iniziale d'acquisizione parametri (lunghezza record, tipo di ordinamento e porzione di record utilizzata per l'ordinamento), si leggono due record (il primo dal primo file in ingresso ed il secondo dal secondo file in ingresso) che sono confrontati: il più piccolo fra i due è depositato nel file in uscita. Successivamente si legge un altro record, dal file associato al record scaricato precedentemente nel file in uscita, e si procede nuovamente al confronto ed allo scarico. Tutte queste operazioni sono eseguite ciclicamente fino all'esaurimento di uno dei file in ingresso. A operazione conclusa, si ottiene un file ordinato in cui fra i record del primo file sono inseriti in modo ordinato tutti i record del secondo file.

L'azione elementare di estrarre uno o più record da un file ordinato è svolta dalla modalità CROSS. Due file ordinati, il primo utilizzato per la ricerca ed il secondo come chiave sono l'informazione che avvia la modalità. A tal fine, occorre specificare la porzione di record ed il tipo di ordinamento presente sul primo file, e la porzione di record riferita ai record chiave presenti sul secondo file. Dopo l'acquisizione dei parametri, dapprima si legge dal secondo file un record e si estrae da esso la porzione contenente la chiave da

ricercare, e successivamente si inizia la ricerca sequenziale sul primo file. Allora una volta trovato il record corrispondente alla chiave, questo è depositato nel file in uscita. Dopodiché si legge un altro record dal secondo file e si riprende la ricerca nel primo file laddove era stata precedentemente interrotta. Tutte queste operazioni sono eseguite ciclicamente fino all'esaurimento del secondo file in ingresso.

Si badi che bisogna porre particolare attenzione alla preparazione del file chiave. Infatti la ricerca di un record non presente sul primo file farebbe terminare il ciclo di ricerca (lettura dal primo file e confronto). Di conseguenza, è necessario essere sicuri che tutti i record da ricercare (nel secondo file) siano effettivamente presenti nel primo file. Inoltre nel caso si debbano ricercare più record, con porzioni identiche, il numero di record da mettere nel secondo file con tale porzione deve essere minore o tutta al più uguale a quelli presenti nel primo file.

La presenza in un file ordinato di record che presentano porzioni identiche ha indotto a concepire una modalità atta a svolgere il compattamento di un file. Essa prende un file ordinato e genera un file in uscita, ancora ordinato, di dimensioni minori o uguali al file in ingresso. L'azione elementare svolta dalla modalità PACK consiste nello scorrere sequenzialmente il file in ingresso, confrontando coppie di record adiacenti, nel caso di uguaglianza il secondo record ed eventuali successivi record uguali sono scartati. Al termine del ciclo delle operazioni si ha il file ordinato senza record che presentano, nella posizione prescelta per l'ordinamento, valori uguali del parametro ordinatore.

La modalità ZONE è utilizzata per estrarre da un file, non necessariamente ordinato, record che presentano valori del parametro/i contenuti entro limiti predefiniti dall'utente. Come esempio di applicazione ad una serie temporale, si pensi di dover estrarre da un file dati tutti i record che presentano valori di tempo compresi fra i due limiti prefissati. In questo caso, dopo la lettura dei parametri, si legge un record dal file in ingresso e si stabilisce se il valore tempo è compreso entro i limiti prefissati. In caso affermativo, prima si deposita il record nel file in uscita e poi si legge un nuovo record dal file in ingresso, mentre in caso negativo, passa direttamente alla lettura di un nuovo record dal file in ingresso.

Nel caso monodimensionale, l'estrazione avviene in base a tre tipi: caratteri alfanumerici contigui, numeri interi e reali. Tuttavia la modalità ZONE prevede anche la selezione di dati a supporto territoriale, eseguendo doppi o tripli confronti d'intervalli, rispettivamente per il caso 2D od il caso 3D. A riguardo, si osservi che la ricerca nel piano e nello spazio sono di grande utilità per la gestione di file dati a referenza spaziale. Si noti tuttavia come gestioni più sofisticate, quali la ricerca di una linea e di una figura (nel piano e/o nello spazio 3D), come pure di un oggetto (limitatamente allo spazio 3D) siano operazioni ben più complesse (note come *line following* e *region growing*, tipiche della *cluster analysis* applicata a dati a supporto territoriale), tali da non poter essere eseguite con le azioni elementari dei programmi di utilità, in quanto richiedono di contenere in memoria più di uno o due record per volta.

Si noti che un primo passo compie l'azione elementare di ricerca dei valori massimi e minimi, cosicché la ricerca dei limiti possa essere sensatamente fissata. In ogni caso, la flessibilità mostrata durante l'utilizzo delle modalità di elaborazione, su file non strettamente attinenti a serie temporali od a supporto territoriale, può costituire un valido incentivo per estendere ulteriormente il campo di impiego di queste modalità.

Calcolo

Questo quarto gruppo permette di svolgere azioni elementari di calcolo. E' forse questo il campo, dove i fogli elettronici sono capaci di esprimere, al massimo, le loro potenzialità. Infatti le comuni operazioni

matematiche: aritmetiche, algebriche, trigonometriche, numeriche, matriciali, probabilistiche, statistiche, ecc. sono comunemente possibili, scrivendo facili o più complesse, formule in una barra di lettura. Si noti poi come il loro uso congiunto permetta di eseguire, un'operazione numerica elementare alla volta, anche operazioni sempre più complesse, ad es., in geometria, rototraslazioni nel piano e nello spazio, affinità, omografie, ecc., oppure in statistica, istogrammi, tabelle a doppia entrata, test statistici, ecc.

Un'osservazione conclusiva, comune anche ai gruppi precedenti ed al problema della simulazione rileva come i cosiddetti programmi di utilità abbiano anche la funzione didattica di invitare a riflettere prima di compiere un'operazione, evitando di cliccare, a caso, nella ricerca spasmodica di una qualsiasi via, per risolvere un problema, fortuitamente accaduto. Infatti non sono gli strumenti che determinano il risultato quanto la scelta e l'uso di questi. Tutto ciò suona a gentile condanna di un modo di procedere attuale, purtroppo in voga, dove è richiesto un qualsiasi risultato, indipendentemente dal come si raggiunge e dalla sua veridicità

Simulazione

Anche la simulazione è calcolo, ma essa riveste particolare importanza, nell'ambito della statistica e, di conseguenza, è preferibile trattarla separatamente. Due sono le finalità cui può essere rivolta:

- studio di precisione ed affidabilità, in relazione alla forma di una rete geodetica o topografica, oppure di un blocco fotogrammetrico, ai pesi delle quantità osservate eseguite per lo stesso rilievo ed ai vari errori commessi durante le operazioni di misura;
- sperimentazione di nuovi metodi statistici e nuove tecniche numeriche, in relazione agli stessi argomenti.

Pertanto si tratta di effettuare una simulazione, rispettivamente per il progetto e l'ottimizzazione di una struttura reticolare o per la prova di un algoritmo.

- Nel primo caso, agli effetti della simulazione sono dati sia il modello funzionale che il modello stocastico (cioè i pesi, delle equazioni d'osservazione) e devono essere simulati solo gli errori commessi.
- Nel secondo caso invece, sempre agli effetti della simulazione, devono essere simulati modelli ed errori.

Gli errori commessi durante le operazioni di misura si distinguono in errori accidentali, errori grossolani ed errori sistematici. Per generare errori accidentali, considerati al solito normalmente distribuiti, basta compiere estrazioni da una popolazione uniformemente distribuita su un intervallo finito (ad es., quali i millesimi di secondo della CPU di un calcolatore) ed effettuare poi, sul campione estratto, la trasformazione di variabile casuale da rettangolare a normale.

Come noto, la suddetta funzione di trasformazione è la funzione inversa della funzione *erf*. Pertanto data un'estrazione *r* da una popolazione uniformemente distribuita è possibile ottenere un numero casuale *z*, operando con il seguente procedimento iterativo:

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= 0.5 \\ z &= 0 \\ \delta r &= r - \tilde{r} && \leftarrow \\ \text{se } |\delta r| < \varepsilon & \Rightarrow \text{stop} \end{aligned}$$

$$\delta z = \frac{\delta r}{N(z)} \quad \uparrow$$

$$z = a + \delta z$$

$$\tilde{r} = erf(z) \quad \Rightarrow$$

essendo ε un numero, opportunamente piccolo, in base al quale eseguire il test d'arresto.

- Per generare errori grossolani, basta avere un campione normale, con varianza maggiore di quella del campione usato per gli errori accidentali, e moltiplicare ogni suo elemento per una variabile binaria (ovvero un indicatore logico: *sì no* o 01), associata ad una seconda estrazione da una popolazione uniformemente distribuita su un intervallo finito, in relazione, alla frequenza (solitamente qualche percentile), scelta a priori, degli errori grossolani nell'insieme delle misure eseguite. Infatti poiché la presenza di errori grossolani modifica l'indice di curtosi della distribuzione campionaria degli errori di misura, mentre non ne modifica, in generale, l'indice di asimmetria, questo effetto può essere facilmente ottenuto, utilizzando due distribuzioni normali, aventi la stessa media ma diversa varianza.
- Per generare errori sistematici, basta avere un campione normale, definire una matrice di covarianza del segnale stocastico, costituito dagli errori sistematici, in relazione a una funzione di covarianza, scelta a priori, eseguire una qualsiasi radice di questa matrice (ad es. la fattorizzazione di Cholesky) ed effettuare il prodotto matriciale fra la radice della matrice di covarianza e il vettore contenente gli elementi del campione normale. Infatti sia z un vettore contenente gli elementi del campione normale, s il vettore del segnale stocastico e C_{ss} la sua matrice di covarianza, si verifica facilmente:

$$E(ss^T) = T^T E(zz^T) T = T^T T = C_{ss}$$

dove T è una matrice triangolare superiore, ottenuta eseguendo, ad es., la fattorizzazione di Cholesky della matrice C_{ss} ; pertanto vale la relazione per generare un segnale stocastico, ovvero errori sistematici:

$$s = T^T z$$

La simulazione di una struttura reticolare deve essere condotta avendo cura di evitare uno schema molto regolare, per non inficiare la generalità della sperimentazione. Innanzitutto i punti di una griglia piana regolare a maglia quadrata devono essere resi irregolari:

- nella frequenza, associandoli con una variabile binaria;
- nella posizione planimetrica, con estrazioni casuali normali;
- nell'altimetria, con estrazioni casuali log-normali ed utilizzando un qualsiasi segnale stocastico.

Successivamente anche i lati fra i punti più vicini, appartenenti alla prima e seconda fascia circostante, devono essere resi irregolari, nella frequenza, associandoli con una variabile binaria. In questa fase, la simulazione del modello stocastico non è disgiunta da quella della simulazione degli errori di misura. Infine test topologici verificano le connessioni e, in caso di fallimento, opportune correzioni sono apportate.

Geometria differenziale e cartografia

Questo argomento non è certamente solo una questione di servizio; anzi un lavoro classico sulla cartografia inizia solitamente con richiami, più o meno estesi (e meglio se estesi, a parere di chi scrive) di geometria differenziale, per poi trattare della geodesia geometrica e della cartografia, intesa come rappresentazione su un piano dell'ellissoide terrestre o di una sua porzione, più o meno ampia. Tuttavia questo lavoro ha scelto di presentare esclusivamente problemi di cartografia informatica e conseguentemente rinvia ad altri lavori per tutto quanto attiene alla geometria differenziale, alla geodesia geometrica ed alla cartografia (con la segreta speranza di poter, prima o poi, forse riprendere tutti questi argomenti, dedicando loro un altro lavoro che, per l'alta dignità degli stessi, non potrà assolutamente essere leggero ed evasivo).

BIBLIOGRAFIA DI RIFERIMENTO ³⁴

1. Benciolini B., Mussio L. (1981): Test on Reordering Algorithm for Geodetic Network and Photogrammetric Block Adjustment. In: C.C. Tscherning (Ed) *Management of Geodetic Data*. Geodaetisk Institut, Meddelelse, n. 55. Copenhagen, p. 341-354.
2. Benciolini B., Betti B., Mussio L. (1982): A Remark on the Application of the GPS Procedure to Very Irregular Graph. In: K. Borre, W.M. Welsch (Ed's) FIG Study Group 5B *Survey Control Network*. Schriftenreihe HSBw - Heft 7, Munich, p. 97-102.
3. Benciolini B., Mussio L., Sansò F. (1982a): An Approach to Gross Error Detection More Conservative than Baarda Snooping. *Int. Archives of Photogrammetry*, vol. XXIV, part 3. Helsinki, p. 41-59.
4. Benciolini B., Mussio L., Sansò F. (1982b): The Incomplete Cholesky Conjugate Gradient Method in Network Adjustment. In: R. Sigl (Ed) *Geodetic network and Computation*. DGK Reihe B - Heft 258, Munich, p. 89-96.
5. Ammannati F., Benciolini B., Mussio L., Sansò F. (1983): An Experiment of Collocation Applied to Digital Height Model Analysis. In: K. Torlegard (Ed) *Mathematical Aspects of Digital Elevation Models*. Royal Institute of Technology, Stockholm, p. 1.1-1.9.
6. Betti B., Mussio L., Sansò F. (1983): A New Proposal of Sphere Reconstitution in Hipparcos Project. In: P.L. Bernacca (Ed) *Processing of Scientific Data from the ESA Astrometry Satellite Hipparcos*. CNR-PSN, Asiago, p. 281-289.
7. Ammannati F., Betti B., Mussio L. (1984): Statistical Analysis of Relevant Terrain Features through Digital Elevation Models. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXV, part A3a/b. Rio de Janeiro, p. 774-780.
8. Benciolini B., Gasperini P., Mussio L., Sansò F., Zerbini S. (1984): Geoid Computation in the Italian Area. *Boll. di Geodesia e Scienze Affini*, n. 3, 1984.

³⁴ Il presente lavoro è debitore nei confronti di una lunga serie di articoli, dell'autore e di alcuni suoi amici e colleghi, di cui si dà elenco e ragione, nel prosieguo:

- Crippa B., Mussio L. (1992): Modelli digitali del terreno. *Boll. di Geodesia e Scienze Affini*, n. 1/1992.
- Crippa B. (1997): La cartografia numerica a partire dalle basi di dati di GIS ad oggetti dinamici e non. *Rivista del Dipartimento del Territorio*, anno V n. 1, p. 53-94.
- Mussio L., Tucci G. (1999): Modellazione ad oggetti: Topologie 3D. *Atti della Conferenza Informazioni Territoriali e Rischi Ambientali* – 3° Conferenza Nazionale dell'ASITA, vol. 2, p. 995-1000, Napoli;
- Carminati I., Mussio L. (2004): Modellazione ad oggetti. *Atti della Conferenza Standardizzazione, Interoperabilità e Nuove Tecnologie* – 8° Conferenza Nazionale dell'ASITA, vol. 1, p. 649-654, Roma;
- Carminati I., Mussio L. (2005): Simmetrie e topologie. *Atti della 9° Conferenza Nazionale dell'ASITA*, vol. 1, p. 591-599, Catania;
- Pozzoli A. (2006): GIS estensibili e basi di dati spazio-temporali. *Boll. di Geodesia e Scienze Affini*, n. 4/2006.

Inoltre per tutto quanto riguarda le simmetrie, un ringraziamento particolare a Dedò M. (1996): *Trasformazioni Geometriche* – con un'introduzione al modello di Poincaré, e (1999): *Forme – simmetria e topologia*. Decibel / Zanichelli, Padova / Bologna ed a Sacerdote F. che ha utilmente fatto da tramite.

Infine resta da osservare come il presente lavoro sulla Cartografia informatica sia abbia un naturale e fortissimo legame con un precedente lavoro sulla Modellazione di oggetti. D'altra parte, mentre un lavoro di Fotogrammetria numerica fa preciso riferimento a tutto quanto esposto in un lavoro di Modelli ottimali per l'analisi dei dati, ma differisce dallo stesso per la presentazione dei modelli grigi costituiti dalle equazioni fondamentali della fotogrammetria, un lavoro di cartografia informatica che tratta di SIT (sistemi informativi territoriali), DSM (modelli digitali di superficie) e mappe digitali, con le loro trasformazioni di coordinate, fa uso, pressoché esclusivo, di modelli neri e ha, come punto di riferimento indispensabile, proprio quei modelli neri adottati per la Modellazione di oggetti. Ogni altro approccio e/o tentativo di scrittura differente sarebbe un po' fuorviante e potrebbe suscitare l'impressione errata che i modelli neri in gioco non siano comuni, così come invece lo sono effettivamente.

9. Benciolini B., Mussio L., Surace L. (1984): Applications of the Incomplete Cholesky Conjugate Gradient Method in Block Adjustment. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXV, part A3a/B. Rio de Janeiro, p. 803-808.
10. Colombo L., Mussio L. (1984): Experimental Classification of Gross Errors in Aerial Triangulation by Independent Models. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXV, part A3a/b. Rio de Janeiro, p. 781-791.
11. Cunietti M., Fangi G., Mussio L., Radicioni F. (1984): Block Adjustment and Digital Model of Photogrammetric Data in a Control Problem for the Ancona '82 Landslide. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXV, part A3a/b. Rio de Janeiro, p. 792-802.
12. Cunietti M., Mussio L. (1984): High Precision Photogrammetry. In: M. Unguendoli (Ed) *High Precision Geodetic Measurements*. CUSL, Bologna, p. 329-360.
13. Barbarella M., Mussio L. (1985): A Strategy for a Robust Identification of the Outliers in the Geodetic Sciences. In: E.J. Dudewicz, D. Plachky, P.K. Sen (Ed's) *Statistics and Decisions - Supplement Issue n. 2*. R. Oldenbourg-Verlag, Munich, p. 397-405.
14. Betti B., Mussio L., Sansò F. (1985): Experiments with the Arcwise Sphere Reconstitution. In: J. Kovalevsky (Ed) *Processing of Scientific Data from the ESA Astrometry Satellite Hipparcos*. CERGA, Grasse, p. 263-279.
15. Forlani G., Mussio L. (1985): Acceleration of the Inversion Routine for Large Sparse Matrices. In: F. Sansò (Ed) *1st Hotine-Marussi Symp. on Mathematical Geodesy*. Polytechnic of Milan, Milan, p. 317-342.
16. Baldi P., Benciolini B., Gasperini P., Mussio L., Sansò F., Zerbini S. (1986): Simulation for the PDN85 Doppler Campaign. *Boll. di Geodesia e Scienze Affini*, n. 1, 1986.
17. Colombo L., Fangi G., Mussio L., Radicioni F. (1986): Further Development on Digital Models in a Control Problem for the Ancona '82 Landslide. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXVI, part 3.1. Rovaniemi, p. 134-147.
18. Forlani G., Mussio L. (1986a): Test on Joint Adjustment of Geodetic and Photogrammetric Data. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXVI, part 3.1. Rovaniemi, p. 237-251.
19. Forlani G., Mussio L. (1986b): The Kinematic Adjustment of Levelling Network. In: M. Unguendoli (Ed) *Modern Trends in Deformations Measurements*. CUSL, Bologna, p. 265-290.
20. Migliacci A., Mirabella Roberti G., Monti C., Mussio L. (1986): Monitoring of Historical Wall Painting. *Proc. of IABSE Symp. Safety and Quality Assurance of Civil Engineering Structures*. Tokio, p. 283-291.
21. Mussio L., Radicioni F. (1986): High Precision Photogrammetric Measurements to Control the Shape of a Section of the Musone River. In: M. Unguendoli (Ed) *Modern Trends in Deformations Measurements*. CUSL, Bologna, p. 143-163. [24]
22. Colombo L., Fangi G., Mussio L., Radicioni F. (1987): Kinematic Processing and Spatial Analysis of Levelling Control Data of the Ancona '82 Landslide. In: H. Pelzer, W. Niemeier (Ed's) *Determination of Heights and Height Changes*. Duemmler-Verlag, Bonn, p. 703-719.
23. Crippa B., Mussio L. (1987): The New ITM System of the Programs MODEL for Digital Modelling. In: O. Jacoby, P. Frederiksen (Ed's) *Progress in Terrain Modelling*. Technical University of Denmark, Copenhagen, p. 75-87.
24. Barzaghi R., Crippa B., Forlani G., Mussio L. (1988): Digital Modelling by Using the Integrated Geodesy Approach. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXVII, part B3. Kyoto, p. 47-56.
25. Benciolini B., Betti B., Mussio L., Sansò F. (1988): Experiments of Integrated Geodesy in Geodesy and Related Sciences. *Boll. di Geodesia e Scienze Affini*, anno XLVII, n. 3, 1988.
26. Crespi M., Forlani G., Mussio L., Radicioni F. (1988): Terrain Classification by Clustering Analysis. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXVII, part B3. Kyoto, p. 128-137.
27. Crespi M., Crippa B., Mussio L. (1989): An Algorithm for an Approximative Inverse of Large Sparse Matrices. In L. Mussio (Ed) *ISPRS IC-WG III/VI Tutorial on Mathematical Aspects of Data Analysis*. Pisa, p. 185-202.
28. Crespi M., Forlani G., Mussio L. (1989): Optimization of the Reordering Algorithm for Least Squares Problems Relevant to Space Geodesy. In: F. Sansò, R. Rummel (Ed's), *Theory of Satellite Geodesy and Gravity Field Determination*. Springer-Verlag, Berlin, p. 477-491.
29. Crippa B., De Haan A., Mussio L. (1989): The Formal Structure of Geodetic and Photogrammetric Observations. In L. Mussio (Ed) *ISPRS IC-WG III/VI Tutorial on Mathematical Aspects of Data Analysis*. Pisa, p. 9-35.
30. De Haan A., Mussio L. (1989): Kinematic Levelling Adjustments with Polynomials and Polynomial Splines. *Boll. di Geodesia e Scienze Affini*, n. 3, 1989.
31. Barzaghi R., Benciolini B., Betti B., Forlani G., Mussio L., Sansò F. (1990): A Numerical Experiment of Integrated Geodesy. *Bull. Géodésique*, vol. 64, n. 3, 1990.
32. Crespi M., Crippa B., Mussio L. (1990): Integrated Approach to Kinematic Adjustment and Spatial Analysis of Levelling Control Data of the Ancona 82 Landslide. In: P. Vyskocil, C. Reigber, P.A. Cross (Ed's) *Global and Regional Geodynamics*. Springer-Verlag, New York, p. 311-318.

33. Bucciarelli B., Forlani G., Mussio L. (1992): Robust Estimation by Using Linear Sequential Algebra. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXIX, part B2. Washington D.C., p. 328-333.
34. Crippa B., De Haan A., Mussio L. (1992): The Creation of a DEM from SPOT Data. In: T. D. Guyenne, J.J. Hunt (Ed's) *Environment Observation and Climate Modelling through International Space Projects*. ESA ISY-2, ESTEC, Noordwijk, p. 433-438.
35. Crippa B., Maas H.G., Mussio L. (1992): Spatial Analysis of Turbulent Flow Fields by Deterministic and Stochastic Approaches. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXIX, part B5. Washington D.C., p. 380-390.
36. De Haan A., Mussio L. (1992): Mathematical Aspects of Digital Photogrammetry. In: L. Mussio (Ed) *ISPRS IC-WG III/VI Giovanna Togliatti Memorial Tutorial on Modern Trends in Photogrammetry*. Washington D.C., p. 19-33.
37. Crippa B., Forlani G., Mussio L. (1993): Digital Elevation Model of the Torre del Sale (Piombino) Thermal Power Plant Area. In: J. Harts, H.F.L. Ottens, H.J. Scholten (Ed's) *EGIS 93*, vol. I. EGIS Foundation, Utrecht / Amsterdam, p. 246-254.
38. Bellone T., Crippa B., Mussio L. (1994): Mathematical Treatment of Raster Data and Grid Parameters. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXX, part 1.1. Como, p. 224-228.
39. Crippa B., Mussio L., Sharif O. (1994): The Torre del Sale (Piombino) DEM and its Contribution to an Environmental Monitoring Oriented GIS. In: G. Guariso, B. Page (Ed's) *Computer Support for Environmental Impact Assessment*. North Holland, Amsterdam, p. 13-24.
40. Crippa B., Mussio L., Zacco G. (1994): Data Understanding by Form Descriptors on the Way of Compression. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXX, part 1.1. Como, p. 209-216.
41. De Haan A., Maas H.-G., Malik N., Mussio L. (1994): Statistical Analysis of Spatially Referenced Data. IGP - Bericht Nr. 238. ETH, Zurich, 1994.
42. Mussio L., Crippa B., Sharif O. (1994): Distribution-free Inference for Standard Tests. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXX, part 1.1. Como, p. 217-223.
43. Bellone T., Crespi M., Mussio L. (1995): Preprocessing and beyond by Kalman Filtering Techniques. In: B. Benciolini, D. Sguerso (Ed's) *Digital Sensors and Systems*. University of Trento, Trento, p. 23-33.
44. Crippa B., Malinverni E.S., Mussio L. (1995): Dynamic Modelling of Scene Deformation for Crustal Movement Monitoring. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXX, part 5W1. Zurich, p. 138-143.
45. Crippa B., Mussio L. (1995): Data Compression and Evaluation by Cluster Analysis. In: B. Benciolini, D. Sguerso (Ed's) *Digital Sensors and Systems*. University of Trento, Trento, p. 347-359.
46. Bellone T., Crippa B., Mussio L. (1996a): A Recommended Procedure for Image Quality Assessment. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXX, part 1.bis. Como, p. 220-224.
47. Bellone T., Crippa B., Mussio L. (1996b): Restoration and Validation of Image Data. In: L. Mussio, G. Forlani, F. Crosilla (Ed's) *Data Acquisition and Analysis for Multimedia GIS*, CISM - Udine, Courses and Lectures - no. 365. Springer, Wien / New York, p. 161-185. [52]
48. Bellone T., Crippa B., Mussio L. (1996c): Robust Procedures for Data Pre-Processing, Testing and Archiving. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXI, part B1, Vienna, p. 144-149.
49. Bellone T., Crippa B., Mussio L. (1996d): Sequential Algorithms and Iterative Methods with Special Emphasis to Spatially Referenced Data Analysis. *Proc. of the International Workshop In: E. Binaghi, P.A. Brivio, A. Rampini (Ed's) Soft Computing in Remote Sensing Data Analysis - Series in Remote Sensing*, vol. 1. World Scientific, Singapore, p.245-252.
50. Bellone T., Mussio L., Nardinocchi C. (1996a): Data Archiving by Clusters and Graphs. In: L. Mussio, G. Forlani, F. Crosilla (Ed's) *Data Acquisition and Analysis for Multimedia GIS*, CISM - Courses and Lectures - no. 365. Springer, Wien / New York, p. 99-106.
51. Bellone T., Mussio L., Nardinocchi C. (1996b): Strategies and Procedures for Relational Matching. In: M. Unguendoli (Ed) *Reports on Surveying and Geodesy, in memory of Prof. Alberto Gubellini and Prof. Giorgio Folloni*. Nautilus, Bologna, p. 122-135.
52. Brovelli M.A., Migliaccio F., Mussio L., Sharif O. (1996): Robust Techniques for Data Preprocessing. In: L. Mussio, G. Forlani, F. Crosilla (Ed's) *Data Acquisition and Analysis for Multimedia GIS*, CISM - Udine, Courses and Lectures - no. 365. Springer, Wien / New York, p. 59-76.
53. Bellone T., Mussio L., Nardinocchi C. (1997): On Data Processing in Photogrammetry and Cartography. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 6W1. Padua, p. 26-30.
54. Colombo A., Mussio L. (1997): The Statistical Behaviour of Correlated Data. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 6W1. Padua, p. 112-115.
55. Mussio L., Tucci G. (1997): 3D Rigid Transformation. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 6W1. Padua, p. 165-169.
56. Bellone T., Mussio L., Nardinocchi C. (1998): Some Aspects on Data Processing in Remote Sensing and GIS. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 6W4. Bahia Blanca / Perugia, p. 56-59.

57. Crippa B., Crosetto M., Mussio L. (1998): The Use of Interferometric SAR for Surface Reconstruction. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 1. Bangalore, p. 172-177.
58. Mussio L., Nocera R., Poli D. (1998): Numeric Solution Strategies in Data Processing and Spatial Data Analysis. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 3/1. Columbus (OH), p. 138-145.
59. Bellone T., Mussio L., Nardinocchi C. (1999): Data Processing versus Geomatics. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 6W7. Parma / Bandung / Cotonou, p. 67-71.
60. Broglio P., Malinverni E.S., Mussio L. (1999): Validation of an Ancient Perspective in Lecco (Italy). *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 6W7. Parma / Bandung / Cotonou, p. 120-124.
61. Mussio L., Nocera R., Poli D. (1999a): Discrete Mathematics for Spatial Data Classification and Understanding. In S.F. El Hakim, A. Gruen (Ed's) *Videometrics VI - SPIE*, vol. 3641. SPIE, San Jose (CA), p. 217 – 226.
62. Mussio L., Nocera R., Poli D. (1999b): Spatial – Temporal Modeling. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 4W12. Beijing, p. 155-162.
63. Bellone T., Giacobbe L., Mussio L. (2000a): Classification by a Proximity Matrix. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXIII, part B6. Amsterdam, p. 29-36.
64. Bellone T., Giacobbe L., Mussio L. (2000b): Processing of Correlated Information. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXIII, part B6. Amsterdam, p. 215-222.
65. Bellone T., Mussio L., Nardinocchi C. (2000): A Contribution from Linguistics to Geomatics. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 6W8/2. Ljubljana, p. 190-198.
66. Broglio P., Malinverni E.S., Mussio L. (2000a): Comparison between a Camera Lucida Panorama and a Photogrammetric Survey. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 6W8/1. Ljubljana, p. 16-19.
67. Broglio P., Malinverni E.S., Mussio L. (2000b): A Discussion about the Comparison between a Camera Lucida Panorama and a Photogrammetric Survey. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXII, part 6W8/2. Ljubljana, p. 237-238.
68. Bellone T., Mussio L. (2001a): Semantic Ambiguity Questions for Pattern Recognition. In: A. Carosio, H. Kutterer (Ed's) *Robust Statistics and Fuzzy Techniques in Geodesy and GIS*, IGP - Bericht Nr. 295. ETH, Zurich, p. 221-226.
69. Bellone T., Mussio L. (2001b): Examples of Semantic Ambiguity in Pattern Recognition. In: A. Vettore (Ed) *3D Digital Imaging and Modeling Applications of: Heritage, Industry, Medicine & Land*. AGRIPOLIS, Padua, S5_8 p. 8.
70. Mussio L. (2002): Georeferencing and integration of digital images from space with remote sensed data from active sensors and geopotential observations. In: B. Betti, F. Sansò, V. Tornatore (Ed's) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 13. CLUP, Milano, p. 129-136.
71. Pozzoli A., Mussio L. (2003a): Quick Solutions Particularly in Close – range Photogrammetry. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXIV, part 5W12. Ancona, p. 273-278.
72. Pozzoli A., Mussio L. (2003b): Non-linear Problems of Analytical Photogrammetry. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXIV, part 6W11. Zagreb, p. 210-215.
73. Pozzoli A., Mussio L. (2004): Modelling Techniques for Temporal GIS. In: E. Fendel, M. Rumor (Ed's) *Proc. of UDMS'04 – 24th Urban Data Management Symposium*. Chioggia, 7.II.2.
74. Pozzoli A., Mussio L., Scaioni M. (2004a): A Solution for the General Case of Three-image Orientation. *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXV, part B3. Istanbul, p. 992-997.
75. Pozzoli A., Mussio L., Scaioni M. (2004b): A Project for the Survey of a Hydraulic Stream Confluence Model Based on a General Procedure for Three-image Orientation. In: E. Baltsavias (Ed) *Commemorative volume for the 60th birthday of Prof. Dr. Armin Gruen*. Zurich, p. 201-208.
76. Malinverni E.S., Mussio L., Tonelli E. (2005): 3D Multi-Temporal GIS for the Management of Environmental Resources. ICA/ACI International Geographic Conference A Coruña 2005. A Coruña, Theme 5 / S5_2 , p. 10.
77. Mussio L., Poli D., Pozzoli A. (2005): Symmetries and Topology for the Definition of Conceptual Models. In: A. Vettore (Ed) *3D Digital Imaging and Modeling Applications of: Heritage, Industry, Medicine & Land*. AGRIPOLIS, Padua, S1_8 p. 8.
78. Boschetti L., Kunzle A., Brivio P., Mussio L. (2006): Non Parametric Statistical Tests for the Analysis of Multiple-sensor Time Series of Remotely Sensed Data. *Proc. of Geoscience and Remote Sensing Symposium IGARSS 2006 – IEEE International Conference*, p. 200-203.
79. Pozzoli A., Mussio L. (2006): New Tools for Spatial – Temporal Database. In: E. Fendel, M. Rumor (Ed's) *Proc. of UDMS'06 – 25th Urban Data Management Symposium*. Aalborg, 9.I.3.
80. Dante V., Mussio L. (2007/8): Relational Strategies in Statistical Data Analysis: Mapping, Inferences, Clustering, Topologies, Matching. 5th Int. Symposium on Mobile Mapping Technology MMT 07. Padua, p. 8; *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. XXXVI, part 5/C55. Padua, p. 210-216.