

TRATTAMENTO NUMERICO DEI DATI

Luigi Mussio
Politecnico di Milano – DICA
Piazza L. da Vinci, 32 – 20133 Milano
Tel. 02–2399–6501, Fax. 02–2399–6602
e–mail luigi.mussio@polimi.it

RIASSUNTO

La statistica computazionale offre il suo contributo alla soluzione di importanti problemi della statistica, ove si richieda il calcolo della soluzione di sistemi, nonché la derivazione numerica di informazioni complementari sulla precisione e l'affidabilità delle stime effettuate. Questo contributo è da considerarsi indispensabile e fondamentale, in tutti i problemi di statistica applicata, perché i risultati numerici sono, proprio in questi casi, l'essenza stessa della soluzione dei suddetti problemi.

A tal fine, una presentazione dei principali metodi della statistica computazionale si sviluppa, dopo un'opportuna introduzione, nei paragrafi a seguire. Essa si compone di quattro parti distinte e comprende i metodi diretti, i metodi iterativi, gli algoritmi sequenziali e metodi "ad hoc" per dati regolari (ovvero per le cosiddette strutture grigliate. Avendo già detto della naturale destinazione dell'ultima classe di algoritmi, i metodi diretti sono da destinarsi principalmente alla soluzione di strutture reticolari (o ad esse semplicemente riconducibili), mentre i metodi iterativi alla soluzione di problemi d'interpolazione e/o approssimazione per campi irregolari di dati (ovvero i cosiddetti seminati di punti).

Ribadendo la assoluta non – rigidità della sopraccitata classificazione, resta da segnalare che gli algoritmi sequenziali sono da destinarsi alla modifica di soluzioni, trovate inizialmente con i metodi diretti, e possono dare qualche contributo anche alla modifica di soluzioni, trovate inizialmente con i metodi iterativi. La regione della vastità della statistica computazionale sta nella necessità di fornire, di volta in volta, gli algoritmi più appropriati alla soluzione dello specifico problema in esame.

PREMESSA¹

Nulla esprime meglio la rivoluzione scientifica e tecnologica, vissuta nel secondo dopoguerra ed ancora in corso, della trasformazione subita dal settore del calcolo, fatto che ha portato anche a rivoluzionare integralmente le metodologie e le procedure. Questo è vero soprattutto nel settore dei calcoli geodetici, storicamente sempre visto come uno dei due settori (l'altro è l'astronomia) in cui il calcolo presentava problemi di grande importanza per un corretto trattamento delle osservazioni sempre molto precise. In questo contesto storico, va considerato questo lavoro.

Si potrebbe chiamarlo, mutuando un termine assai frequente nel campo dei calcolatori, l'interfaccia fra la tecnica del calcolo e le applicazioni alla geodesia ed alla geomatica. Questo lavoro ha un duplice scopo: innanzitutto informare di quelle invenzioni e quei perfezionamenti, cercando di presentarli nel modo più facile da comprendere; successivamente fornire indicazioni sulle procedure da seguire, sui condizionamenti, sui

¹ Liberamente tratta da: Cuniatti M. (1984): Applicazione di procedimenti di calcolo automatico nel trattamento di dati geodetici. In: M. Cuniatti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 1–4.

vincoli, su ciò che occorre pagare come libertà di azione, per aprirsi alla vastissima possibilità di impiego dei calcolatori.

Alcune premesse sono fondamentali per leggere con profitto questo lavoro. L'automazione del calcolo è lo scopo fondamentale. Quando il calcolo si fa a mano con pochi dati, è possibile affidarsi alla memoria personale, alla abilità manuale, ad un ordine approssimativo, ma quando i dati divengono veramente tanti, allora è necessario automatizzare le procedure. L'automazione del calcolo sgrava di un lavoro redazionale e preparatorio l'operatore, ma impone severi vincoli procedurali e prevede che tutti i casi siano contemplati con le differenti posizioni operative. Questa generalità di applicazione è uno strumento che permette di partire dai dati bruti per giungere ai risultati solo mediante ingressi adeguati. Tuttavia giungere ai risultati non basta, bisogna anche fare velocemente ed occorre adottare tutti gli artifici necessari.

PARTE I – METODI DIRETTI

Introduzione²

I metodi diretti raggruppano tutti quegli algoritmi della statistica computazionale capaci di pervenire, in modo esatto, al calcolo della soluzione di sistemi in un solo passo. I più noti e comunemente impiegati fra questi, sono gli algoritmi di Gauss³, quelli Cholesky e di Householder. Nel prosieguo, si illustrano gli algoritmi di Cholesky, perché maggiormente flessibili e passibili di generalizzazioni ed estensioni, mentre gli algoritmi di Householder sono rimandati alla parte dedicata agli algoritmi sequenziali, in quanto ad essi propedeutici.

1. Gli algoritmi di Cholesky (algoritmi di base)

Le compensazioni ai minimi quadrati connesse a molti problemi geodetici e geomatici richiedono la costruzione e la soluzione di un sistema lineare, il sistema normale. Il metodo di Cholesky si applica alla soluzione di tale sistema: $Cx + d = 0$.

² Questo paragrafo ed i seguenti contengono una versione riveduta e corretta della prima parte dell'articolo: G.B., Mussio L. (1984): Algoritmi esatti per la risoluzione di grandi sistemi. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 5-46, a sua volta, ripreso nell'articolo: Crespi M., Mussio L. (1989): Problemi di calcolo. In: F. Crosilla, L. Mussio (Ed's) *Progettazione ed ottimizzazione del rilievo topografico e fotogrammetrico di controllo*. CISM, Udine, p. 255-282.

³ Il metodo di Gauss elimina, una alla volta, tutte le incognite dalle righe successive del sistema normale, a partire dalla prima riga dopo quella di volta in volta in esame. Pertanto la matrice normale C, eliminazione dopo eliminazione, si trasforma in una matrice fattore avente forma triangolare superiore:

$$c'_{jk} = c_{jk} - c_{ik} \cdot \frac{c_{ji}}{c_{ii}} \quad \forall j, k$$

$$d'_j = - \left(d_j - d_i \cdot \frac{c_{ji}}{c_{ii}} \right) \quad \forall j$$

Questo procedimento è chiamato: riduzione in avanti. La soluzione del sistema normale si ottiene poi con una sostituzione all'indietro.

$$x_i = d_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} \cdot x_k \quad \forall i$$

Pertanto esso deve essere preceduto, in una compensazione, dalla normalizzazione del sistema di m equazioni d'osservazione, con n parametri incogniti⁴:

$$Ax + b = v$$

La costruzione della matrice normale $C = A^T P A$ (Il simbolo T a fianco di una matrice o di un vettore indica l'operazione di trasposizione degli stessi) e del termine noto normale $d = A^T P b$, si ottiene a partire dalla matrice dei pesi delle quantità osservate P (solitamente diagonale) con due semplici prodotti matriciali.

Questo metodo consiste nella fattorizzazione della matrice normale, seguito dalla soluzione del sistema; dalla matrice fattorizzata si può calcolare anche la matrice inversa della matrice normale data.

Fattorizzazione

Data una matrice C , simmetrica e definita positiva⁵, come è ovviamente la matrice normale, si vuole calcolare una matrice T , triangolare superiore⁶, che soddisfi la relazione (fig. 1.1):

$$T^T T = C$$

Esplicitando in termini scalari, si ottiene:

$$\begin{aligned} c_{11} &= t_{11} \cdot t_{11} \\ c_{1j} &= t_{11} \cdot t_{1j} \end{aligned} \quad (j > 1)$$

$$c_{ii} = t_{ii} \cdot t_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} \cdot t_{ki} \quad (i \neq 1)$$

$$c_{ij} = t_{ii} \cdot t_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} \cdot t_{kj} \quad (j > 1)$$

⁴ Nel caso non-lineare di una compensazione a minimi quadrati, è indispensabile procedere, preliminarmente, alla linearizzazione delle equazioni d'osservazione attorno a valori approssimati dei parametri incogniti. Per una strategia di ricerca di questi valori approssimati, si veda: Mussio L. (1984): Il calcolo delle coordinate approssimate dei vertici di reti geodetiche e topografiche. In: M. Cuniatti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 139 –177, ed inoltre: Mussio L. (1984): Il calcolo delle coordinate approssimate dei punti "a terra" e dei parametri approssimati di orientamento esterno dei fotogrammi di un blocco fotogrammetrico ove sia stata eseguita la triangolazione aerea. In: M. Cuniatti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 179–215.

⁵ Si definisce matrice definita positiva una matrice quadrata C che soddisfi le relazioni:

$$\begin{aligned} x^T C x &\geq 0 & \forall x \\ x^T C x &= 0 & \rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

⁶ Si definisce matrice triangolare superiore (inferiore) una matrice che abbia elementi non-nulli solo sopra (sotto) la diagonale principale, oltre che sulla diagonale principale stessa.

Da queste espressioni si ottengono immediatamente quelle effettivamente usate per il calcolo degli elementi di T :

$$t_{11} = \sqrt{c_{11}}$$

$$t_{1j} = \frac{c_{1j}}{t_{11}} \quad (j > 1)$$

$$t_{ii} = \sqrt{c_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \quad (i \neq 1)$$

$$t_{ij} = \frac{\left(c_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} \cdot t_{kj} \right)}{t_{ii}} \quad (j > 1)$$

Si noti che la matrice T può essere calcolata sia per righe che per colonne a partire dall'elemento t_{11} .

Soluzione del sistema

Si vuole risolvere il sistema normale:

$$Cx + d = 0$$

di n equazioni in n incognite, avendo a disposizione la fattorizzazione della matrice C .

Il sistema normale si scompone come segue:

$$T^T T x = -d$$

$$T^T y = -d$$

$$T x = y$$

La risoluzione in successione di questi due sistemi fornisce la soluzione del sistema precedente che, per la l'operazione di fattorizzazione precedentemente eseguita, è equivalente al sistema normale. La soluzione di entrambi i sistemi è immediata, essendo triangolari le matrici T e T^T .

La prima equazione del primo sistema è: $t_{11} y_1 = -d_1$, e si può immediatamente risolvere:

$$y_1 = -\frac{d_1}{t_{11}}$$

La seconda equazione è: $t_{12} y_1 + t_{22} y_2 = -d_2$, e da essa si può ricavare y_2 , essendo noto y_1 :

$$y_2 = -\frac{d_2 + t_{12} y_1}{t_{22}}$$

Proseguendo dalla prima all'ultima incognita si ha in generale:

$$y_1 = -\frac{d_1}{t_{11}}$$

$$y_i = -\frac{d_i + \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}} \quad (i \neq 1)$$

La soluzione del secondo sistema è del tutto analoga, ma si inizia dall'ultima equazione che contiene solo l'ultima incognita:

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n t_{ik} x_k}{t_{ii}} \quad (i \neq n)$$

Pertanto la soluzione del sistema normale si ottiene applicando in successione le espressioni per la fattorizzazione della matrice normale, la sostituzione in avanti e la sostituzione all'indietro.

Inversione⁷

⁷ Sul calcolo di un determinante si veda anche: Benciolini G.B., Mussio L. (1984) Algoritmi esatti per la soluzione di grandi sistemi. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 5-46, da cui sono liberamente tratte le seguenti considerazioni.

- Il determinante di una matrice inversa è l'inverso del determinante della matrice da cui si è ottenuta la suddetta matrice inversa:

$$\det C^{-1} = 1 / \det C$$

- il determinante del prodotto di due o più matrici è dato dal prodotto dei determinati di queste matrici:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

$$\det(ABC) = \det A \det B \det C$$

- in particolare, il prodotto dei determinanti di due matrici triangolari fornisce il determinante della matrice da cui le stesse matrici sono state ottenute:

Si deve calcolare la matrice inversa C^{-1} ⁸ della matrice C , di cui è disponibile una fattorizzazione. Dalla stessa fattorizzazione si ottiene:

$$C^{-1} = (T^T T)^{-1} = T^{-1} (T^T)^{-1} \quad \text{da cui:} \quad T C^{-1} = (T^T)^{-1}$$

ovvero, a gambero, su ogni colonna con una sostituzione all'indietro: $T \text{ col}_i(C^{-1}) = \text{col}_i((T^T)^{-1})$

Queste formule sono entrambe immediatamente operative per il calcolo della matrice inversa.

Nelle figure 1.2 e 1.3 si illustrano gli schemi corrispondenti alle formule. Indicando con τ_{ij} gli elementi di T^{-1} è anch'essa triangolare superiore.

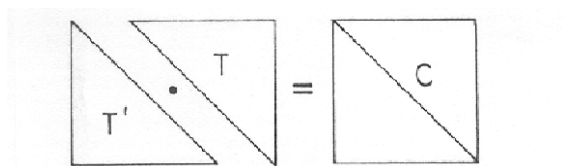


Fig. 1.1

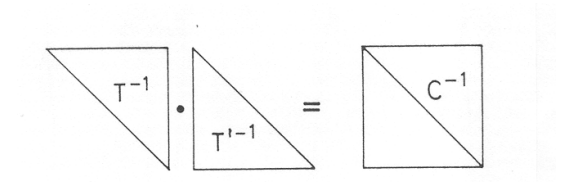


Fig. 1.2

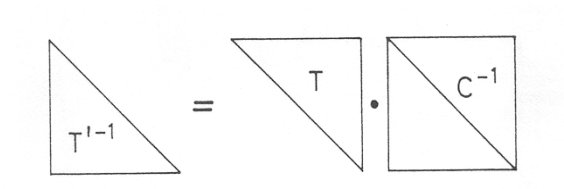


Fig.1.3

Indicando con γ_{ij} gli elementi di C^{-1} , dall'ultima relazione presentata si ottiene:

$$\sum_{k=i}^n t_{ik} \gamma_{ik} = \frac{1}{t_{ii}}$$

$$\sum_{k=i}^n t_{ik} \gamma_{jk} = 0 \quad (j > i)$$

$$\det(T^T T) = \det T^T \det T$$

+il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto dei suoi elementi diagonali principali.

⁸ Si ricordi che nella soluzione a minimi quadrati del sistema di equazioni alle misure la matrice inversa ha significato statistico: essa infatti è proporzionale alla matrice di varianza – covarianza delle incognite, da cui si ricavano immediatamente gli sqm delle incognite.

Si riportano le espressioni per il calcolo della matrice inversa C^{-1} , modificate per operare solo nel triangolo superiore, essendo la matrice inversa, come noto, simmetrica:

$$\gamma_{nn} = \frac{1}{t_{nn}^2}$$

$$\gamma_{ij} = -\frac{\sum_{k=i+1}^n t_{ik} \gamma_{kj} \begin{matrix} (se & j \geq k) \\ jk & (se & j < k) \end{matrix}}{t_{ii}} =$$

$$= -\frac{\sum_{k=i+1}^j t_{ik} \gamma_{kj} + \sum_{k=j+1}^n t_{ik} \gamma_{jk}}{t_{ii}} \quad (j > i)$$

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{t_{ii}} - \frac{\sum_{k=i+1}^n t_{ik} \gamma_{ik}}{t_{ii}} \quad (i \neq n)$$

Si noti che è necessario utilizzare un vettore di servizio che contenga, di volta in volta, gli elementi extradiagonali (γ_{ij}) di una riga della matrice inversa aventi proprio gli stessi indici i, j degli elementi extradiagonali (t_{ij}) di una riga della matrice triangolare superiore, ed entrambe necessarie per il calcolo dell'elemento diagonale (γ_{ii}) della matrice inversa.

2. Considerazioni sull'occupazione di memoria e modalità di memorizzazione compatta delle matrici

Le matrici disegno A e normale C sono in generale matrici sparse, cioè con una piccola quantità di elementi non-nulli rispetto al numero totale di elementi, a causa della struttura topologica dei problemi geodetici e geomatici. Pertanto è opportuno disporre di tecniche per memorizzare in modo compatto le suddette matrici, trattandole poi nel calcolo facendo attenzione a mantenere tale forma.

La matrice disegno A può essere memorizzata compatta registrando:

- per ogni equazione (riga) il numero dei coefficienti non-nulli ed i coefficienti stessi, accompagnati dal numero d'ordine dell'incognita (colonna) cui si riferiscono;
- per ogni incognita (colonna) il numero dei coefficienti non-nulli ed i coefficienti stessi, accompagnati dal numero d'ordine dell'equazione (riga) cui si riferiscono.

La matrice normale C può essere memorizzata compatta registrando il suo triangolo superiore essendo, come noto, simmetrica:

- in forma rettangolare, se tutti gli elementi non–nulli sono contenuti in una banda⁹, ovvero se sono abbastanza vicini alla diagonale principale;
- "*a elementi isolati*", cioè per ogni colonna il numero dei coefficienti non–nulli ed i coefficienti stessi, accompagnati dal numero di riga;
- "*a profilo*", cioè per ogni colonna il numero di tutti i coefficienti, nulli o non–nulli, a partire dal primo non–nullo, ed i coefficienti stessi.

Si osservi che la memorizzazione della matrice normale "*a elementi isolati*" serve particolarmente quando si vuole eseguire la soluzione del sistema con metodi iterativi, di cui non si occupa la seconda parte del presente lavoro¹⁰, mentre quello "*a profilo*" è utile, quando si vuole utilizzare un metodo esatto che richiede la fattorizzazione della matrice normale prima della soluzione del sistema.

Nelle tre memorizzazioni per colonna sovraesposte, essendo variabile la lunghezza di ogni colonna, è necessario registrare sequenzialmente tutti gli elementi di un vettore; inoltre per facilitare l'accesso ad ogni singola colonna è conveniente sostituire, al numero che rappresenta la lunghezza di una colonna, un puntatore che indirizzi direttamente al primo od all'ultimo elemento della colonna stessa.

Nelle figure 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8 si esemplificano gli schemi di memorizzazione delle matrici disegno e normale.

Un ultimo problema affronta il dimensionamento di queste matrici. Tuttavia, poiché questa operazione richiede nozioni di teoria dei grafi, la soluzione della stessa è rinviata all'ultima parte di questo lavoro, dove si studiano gli algoritmi di numerazione, ordinamento, riordino e dissezione dei grafi. Infatti potendo, in ogni caso, far corrispondere una matrice ad un grafo, è agevole far corrispondere un'incognita (o un certo insieme d'incognite) ad un vertice di un grafo, così come un'equazione (o un dato insieme d'equazioni) ad un lato di un grafo. Da queste corrispondenze e dal fattore di ridondanza del problema in oggetto (numero di equazioni rapportato al numero d'incognite), si ricavano le dimensioni massime di queste matrici la cui riduzione (con innegabili vantaggi sull'occupazione di memoria e sui tempi di calcolo) e le modalità di memorizzazione compatta si ottengono dall'opportuna applicazione dei suddetti algoritmi di numerazione, ordinamento, riordino e dissezione dei grafi¹¹.

⁹ Si noti che, mentre nella memorizzazione in forma rettangolare la banda è la massima differenza tra le posizioni di un elemento diagonale e del corrispondente elemento extradiagonale più lontano, nelle successive memorizzazioni a elementi isolati e a profilo la banda è costituita dalla medesima differenza incognita per incognita; il contesto chiarisce, di volta in volta, il significato della parola.

¹⁰ Si veda, a riguardo, Benciolini G.B., Mussio L. (1984): Un algoritmo iterativo per la soluzione dei grandi sistemi. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 47–89, ed inoltre: Crippa B., Mussio L. (1991): Strumenti di calcolo. In: F. Crosilla, L. Mussio (Ed's) *Il sistema di posizionamento globale satellitare GPS*. CISM, Udine, p. 219–254.

¹¹ Sul dimensionamento di queste tabelle, si veda la parte quarta del presente lavoro e l'appendice di: Benciolini G.B., Mussio L. (1984): Algoritmi di riordino delle incognite nelle compensazioni a minimi quadrati. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 91–137.

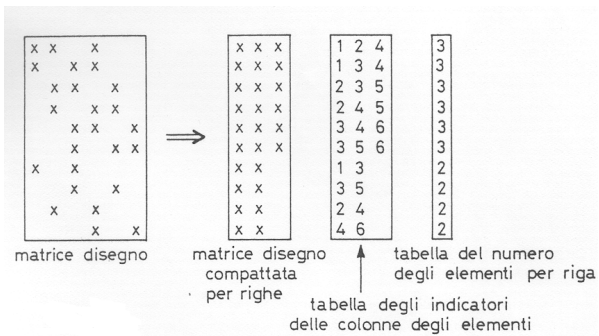


Fig. 1.4

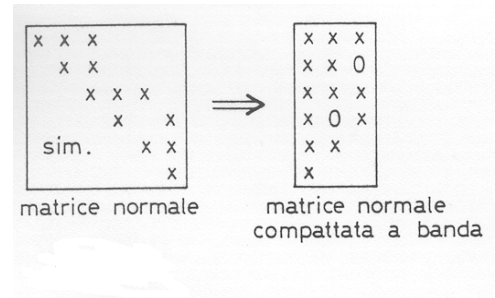


Fig. 1.6

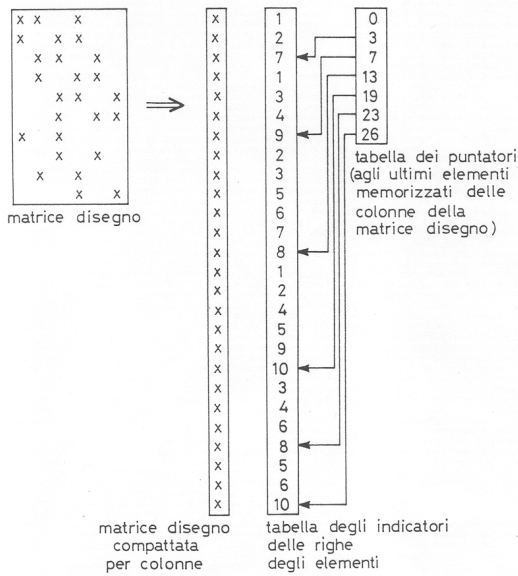


Fig. 1.5

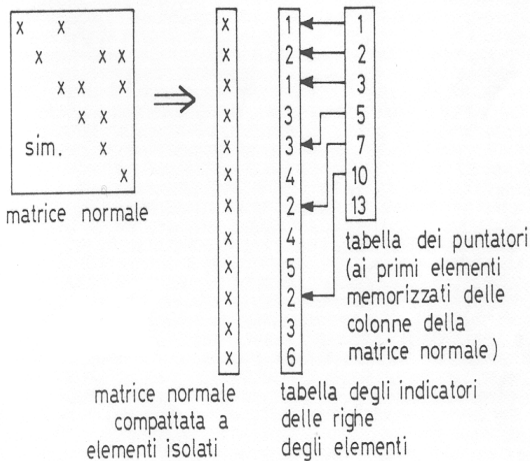


Fig. 1.7

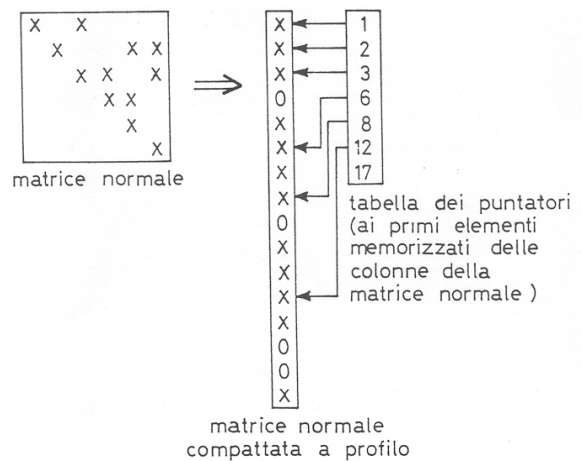


Fig. 1.8

Infine resta da osservare come gli algoritmi diretti a seguire (a banda ed a profilo) ed inoltre gli algoritmi iterativi di cui alla seconda parte del presente lavoro, così come gli algoritmi sequenziali di cui alla terza parte, traggano fondamento proprio dai vantaggi delle memorizzazioni compatte, evitando inutili somme di addendi nulli, a loro volta, derivati da inutili prodotti nulli, senza perdere troppo tempo in lunghe ricerche tabellari, grazie proprio all'accortezza insita nelle memorizzazioni compatte proposte.

3. Algoritmi a banda

Normalizzazione

A partire dalla matrice disegno memorizzata per righe è immediato il calcolo della matrice normale a banda, come pure del termine noto normale, purché si ribalti l'abituale ordine nella successione dei cicli per il calcolo di un prodotto matriciale, in modo da non dover effettuare alcuna ricerca tabellare per indirizzare gli elementi normali via, via calcolati¹²:

$$k = 1, l$$

$$i = 1, m$$

$$j = 1, n$$

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^l f_{ik} g_{kj} := e_{ij} + f_{ik} g_{kj} \quad \forall i, j$$

avendo le rispettive matrici le seguenti dimensioni: $F(m, l); G(l, n); E(m, n)$

Ricordando l'ordine abituale nella successione dei cicli per il calcolo di un prodotto matriciale:

$$i = 1, m$$

$$j = 1, n$$

$$k = 1, l$$

risulta evidente il senso del ribaltamento.

Il numero l di coefficienti non-nulli di un'equazione, ovvero la lunghezza di una riga della matrice disegno, è spesso molto piccolo rispetto al numero n delle incognite, pertanto, effettuato il ribaltamento richiesto, il numero dei prodotti da eseguire nella normalizzazione è dato dall'insieme dei cicli così limitati:

$$k = 1, m$$

$$\tilde{i} = 1, l \quad \text{anzichè } i = 1, n$$

$$\tilde{j} = 1, l \quad \text{anzichè } j = 1, n$$

Indicata con i_a la tabella degli indicatori delle colonne degli elementi della matrice disegno, l'operazione di normalizzazione si esegue utilizzando le solite formule ($C=A^T P A$, $d=A^T P b$) modificate per consentire una memorizzazione in forma rettangolare:

¹² L'espressione $\alpha := \alpha + \beta$ (con α e β scalari qualsiasi) significa eseguire l'addizione ed assegnare la somma ad α .

$$C_{\min(i,j),|j-i|+1} = C_{\min(ia(k,\tilde{i}),ia(k,\tilde{j})),|ia(k,\tilde{j})-ia(k,\tilde{i})|+1} := a_{k,\tilde{i}} p_k a_{k,\tilde{j}}$$

$\forall k$

$$d_i = d_{ia(k,\tilde{i})} := + a_{k,\tilde{i}} p_k b_k$$

Si noti che gli indicatori delle colonne degli elementi della matrice disegno funzionano come puntatori agli elementi della matrice normale. Infatti proprio questa duplicità consente indirizzamenti diretti senza dover effettuare alcuna ricerca.

L'ampiezza di banda della matrice normale è facilmente calcolabile con l'espressione:

$$n_b = \max \left(|ia(k,\tilde{j}) - ia(k,\tilde{i})| + 1 \right)$$

$$k = 1, m$$

$$\tilde{i} = 1, l$$

$$\tilde{j} = 1, l$$

Un test sul valore di n_b segnala quando non è conveniente memorizzare a banda la matrice normale; ciò avviene se $n_b > n/2$. In tal caso infatti l'occupazione di memoria richiesta dalla forma rettangolare non è inferiore a quella necessaria per memorizzare l'intera matrice (triangolo superiore). In pratica, la memorizzare a banda è veramente conveniente solo se $n_b \ll n$.

Fattorizzazione

L'operazione di fattorizzazione si esegue all'interno della banda con le stesse espressioni degli algoritmi di base, modificate per consentire una memorizzazione in forma rettangolare. Infatti la matrice fattorizzata conserva la stessa struttura a banda della matrice normale:

$$t_{i,1} = \sqrt{c_{i,1} - \sum_{k=\max(1, i-n_b+1)}^{i-1} t_{k,i-k+1}^2}$$

$$t_{i,j-i+1} = c_{i,j-i+1} - \sum_{k=\max(1, i-n_b+1)}^{i-1} \frac{t_{k,i-k+1} t_{k,j-k+1}}{t_{i,1}} \quad (j > i)$$

Soluzione

L'operazione di soluzione del sistema si esegue all'interno della banda con le stesse espressioni degli algoritmi di base, modificate per procedere con una memorizzazione in forma rettangolare.

$$y_i = - \frac{d_i + \sum_{k=\max(1, i-n_b+1)}^{i-1} t_{k, i-k+1} y_k}{t_{i,1}}$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{k=\min(n, i+n_b+1)} t_{i, k-i+1} x_k}{t_{i,1}}$$

Inversione

La matrice inversa della matrice normale è piena e non sta all'interno della banda delle matrici normale e fattorizzata. Tuttavia è possibile calcolare tutti gli elementi all'interno della banda (infatti in molti casi pratici è utile conoscere solo gli elementi diagonali dell'inversa e pochi altri) senza dover calcolare alcun elemento fuori di essa (lemma di Erismann – Tinney). L'operazione di inversione si esegue con le stesse espressioni degli algoritmi di base, modificate per consentire una memorizzazione in forma rettangolare:

$$\mathcal{Y}_{i,1} = \frac{1}{t_{i,1}} - \frac{\sum_{k=i+1}^{\min(n, i+n_b-1)} t_{i, k-i+1} \mathcal{Y}_{i, k-i+1}}{t_{i,1}}$$

$$\mathcal{Y}_{i,1} = \frac{- \sum_{k=i+1}^{\min(n, i+n_b-1)} t_{i, k-i+1} \mathcal{Y}_{k, j-k+1} \begin{matrix} (se & j \geq k) \\ j, k-j+1 & (se & j < k) \end{matrix}}{t_{i,1}} =$$

$$= \frac{- \sum_{k=i+1}^j t_{i, k-i+1} \mathcal{Y}_{k, j-k+1} + \sum_{k=j+1}^{\min(n, i+n_b-1)} t_{i, k-i+1} \mathcal{Y}_{j, k-j+1}}{t_{i,1}} \quad (j > i)$$

Anche in questo caso, è necessario un vettore di servizio che contenga, volta a volta, gli elementi extradiagonali, interni alla banda, di una riga della matrice inversa.

4. Algoritmi a profilo

Normalizzazione

A partire dalla matrice disegno memorizzata per righe non è difficile il calcolo della matrice normale a profilo, come pure del termine noto normale, anche in questo caso, purché si ribalti l'abituale ordine nella successione dei cicli per il calcolo di un prodotto matriciale, in modo da non dover effettuare alcuna ricerca tabellare per indirizzare gli elementi normali via, via calcolati.

Dapprima è utile calcolare per ogni incognita l'ampiezza di banda indietro bi_i , ovvero la distanza massima tra le distanze con le incognite precedenti collegate da un'equazione¹³ :

$$bi_i = bi_{ia(k, \tilde{i})} = \max_{\substack{k=1, m \\ \tilde{j}=1, l}} (ia(k, \tilde{i}) - ia(k, \tilde{j})) \quad \forall i$$

Questa coincide con la lunghezza di ciascuna delle colonne della matrice normale, a meno dell'elemento della diagonale principale, e da essa si passa immediatamente ai puntatori:

$$\begin{aligned} lc_1 &= 1 \\ lc_i &= lc_{i-1} + bi_{i-1} + 1 \quad (i > 1) \end{aligned}$$

Inoltre si noti come, dato il puntatore lc_{i+1} all'inizio della generica colonna $i+1$, l'elemento diagonale principale della colonna i (appena precedente) del vettore contenente il profilo della matrice normale è sito in posizione $lc_{i+1}-1$ e gli elementi extradiagonali della stessa colonna del suddetto vettore siano situati in posizione $lc_{i+1}-1-(i-j)$, essendo $j < i$.

Gli elementi normali sono calcolati, eseguendo le operazioni nello stesso ordine della normalizzazione a banda¹⁴:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= c_{ia(k, \tilde{i}), ia(k, \tilde{j})} := + a_{k\tilde{i}} p_k a_{k\tilde{j}} \\ d_i &= d_{ia(k, \tilde{j})} := + a_{k\tilde{i}} p_k b_k \end{aligned} \quad \forall k$$

L'indirizzo dell'elemento (i,j) nel vettore contenente il profilo della matrice normale è calcolato dall'espressione:

$$lc_{\max(i,j)} - 1 - |i - j| = lc_{\max(ia(k, \tilde{i}), ia(k, \tilde{j}))} - 1 - |ia(k, \tilde{i}) - ia(k, \tilde{j})|$$

Fattorizzazione

L'operazione di fattorizzazione si esegue con le stesse espressioni degli algoritmi di base, all'interno del profilo, verificando l'intersezione fra le colonne corrispondenti agli indici di ogni elemento della matrice fattorizzata:

¹³ In modo analogo si definisce l'ampiezza di banda avanti, ovvero la distanza massima tra le distanze con le incognite seguenti collegate da un'equazione, tuttavia l'uso diretto di questa è superfluo nei calcoli successivi.

¹⁴ L'espressione $\alpha := \alpha + \beta$ (con α . e β scalari qualsiasi) significa eseguire l'addizione $\alpha + \beta$ ed assegnare la somma ad α

$$t_{ii} = \sqrt{c_{ii} - \sum_{k=i-b_i}^{i-1} t_{ki}^2}$$

$$t_{ij} = \frac{c_{ij} - \sum_{k=i-\min(b_i, b_j-(j-i))}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}} \quad (j > i)$$

Come detto in precedenza, gli indirizzi dell'elemento diagonale principale (i,i) e di un elemento extradiagonale (i,j) nel vettore contenente il profilo della matrice normale e della matrice fattorizzata sono calcolati dalle espressioni rispettivamente:

$$lc_i - 1$$

$$lc_j - 1 - (j - i)$$

In modo analogo, si calcolano, qui ed altrove, gli indirizzi degli elementi (k,i) , (k,j) , ecc.

Infatti la fattorizzazione genera una nuova matrice con lo stesso profilo della matrice normale. Inoltre poiché, in generale, le matrici normali sono dense attorno alla diagonale principale, la matrice generata dalla fattorizzazione risulta molto densa all'interno del profilo.

Soluzione

L'operazione di soluzione del sistema si esegue con le stesse espressioni degli algoritmi di base, all'interno del profilo (essendo ba_i l'ampiezza di banda avanti, ovvero la distanza massima tra le distanze con le incognite seguenti collegate da un'equazione):

$$y_i = - \frac{d_i + \sum_{k=i-b_i}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}}$$

$$x_i = \frac{y_i - t_{ik} x_k}{t_{ii}} \quad k = i + 1, \quad i + ba_i$$

Come detto in precedenza, gli indirizzi del generico elemento diagonale principale (i,i) e di ogni elemento extradiagonale (i,j) nel vettore contenente della matrice fattorizzata sono calcolati da espressioni elementari che, a partire da un elemento diagonale principale, tengono conto dell'ampiezza di banda indietro, ovvero della lunghezza di ciascuna delle colonne della matrice normale. Si noti che, nella sostituzione all'indietro, è utile cambiare l'ordine di esecuzione dei calcoli, per evitare lunghe ricerche tabellari, come accadrebbe se si accedesse alla matrice fattorizzata per righe, essendo questa invece memorizzata per colonne.

Inversione

Come detto in precedenza, la matrice inversa della matrice normale è piena e non sta all'interno del profilo della matrice fattorizzata. Tuttavia è possibile calcolare tutti gli elementi all'interno del profilo (infatti in molti casi pratici, come già detto, è utile conoscere solo gli elementi diagonali dell'inversa e pochi altri) senza dover calcolare alcun elemento fuori di esso (lemma di Erismann – Tinney). L'operazione di inversione si esegue con le stesse espressioni degli algoritmi di base, all'interno del profilo:

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{t_{ii}} - \frac{\sum_{k=i+1}^{i+ba_i} t_{ik} \gamma_{ik}}{t_{ii}}$$

$$\gamma_{ij} = - \frac{\sum_{k=i+1}^j t_{ik} \gamma_{kj} : + t_{ik} \gamma_{jk}}{t_{ii}} \quad k = j + 1, \quad i + ba_i \quad (j > i)$$

Come detto in precedenza, gli indirizzi del generico elemento diagonale principale (i,i) e di ogni elemento extradiagonale (i,j) nel vettore contenente della matrice fattorizzata sono calcolati da espressioni elementari che, a partire da un elemento diagonale principale, tengono conto dell'ampiezza di banda indietro, ovvero della lunghezza di ciascuna delle colonne della matrice normale. Si noti che durante il calcolo è necessario accedere alla matrice fattorizzata anche per righe, ed essendo questa memorizzata per colonne è necessario selezionare, riga per riga gli elementi all'interno del profilo.

La selezione, riga per riga, degli elementi interni al profilo diventa agevole tenendo ben presenti le seguenti considerazioni. Innanzitutto il profilo, per quanto frastagliato, è sempre unito. Pertanto, causa l'impossibilità di trovare elementi isolati, solo le colonne interessate dal profilo in una data riga potranno esserne ancora interessate nella riga appena sovrastante. A ciò fa eccezione solo il primo elemento extradiagonale, la cui eventuale presenza dovrà essere verificata a parte. Inoltre se il numero di elementi di una data riga eccede di una unità il numero di elementi della riga appena sottostante, allora le due righe hanno il medesimo profilo e l'elemento in più è il primo elemento extradiagonale.

Si noti poi che è utile cambiare l'ordine di esecuzione di una parte dei calcoli, per evitare lunghe ricerche tabellari necessarie se si accedesse alla matrice fattorizzata per righe, essendo questa invece memorizzata per colonne. Anche in questo caso, è necessario un vettore di servizio che contenga, volta a volta, gli elementi extradiagonali, interni al profilo, di una riga della matrice inversa.

Nelle figure 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15 si illustrano graficamente le soluzioni adottate per risolvere alcuni problemi che occorrono nelle operazioni di normalizzazione, fattorizzazione ed inversione, facendo particolare riferimento alla verifica della connessione / disgiunzione fra le colonne della matrice disegno e dell'intersezione fra due colonne della matrice fattorizzata, nonché al coinvolgimento di elementi delle matrici inversa e fattorizzata nel calcolo di elementi extradiagonali della matrice inversa.

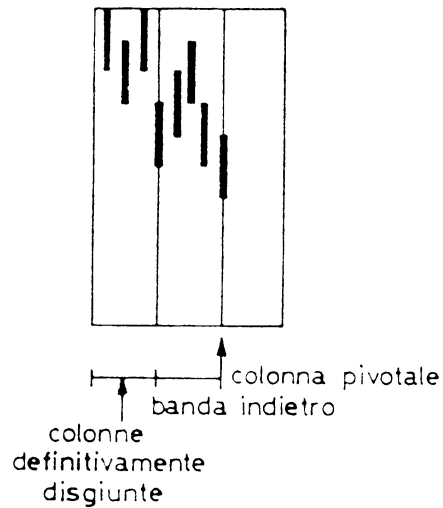


Fig. 1.9

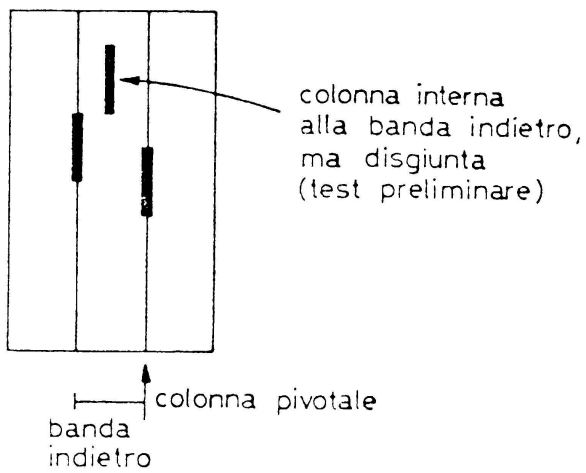


Fig. 1.10

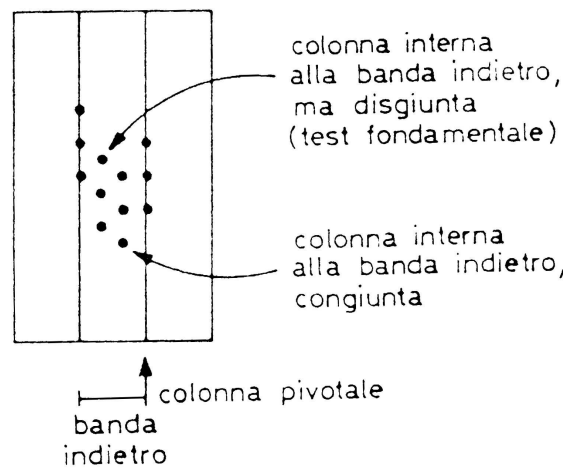


Fig. 1.11

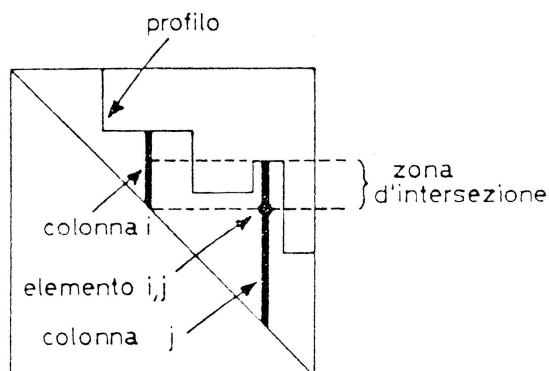


Fig. 1.12

Nella normalizzazione, tutte le colonne a sinistra della banda indietro sono definitivamente disgiunte dalla colonna pivotale, mentre in quelle a destra occorre distinguere quelle il cui termine o inizio è rispettivamente superiore od inferiore alla colonna pivotale da quelle frammiste. Nella fattorizzazione, l'individuazione della zona d'intersezione, fra due colonne, è molto conveniente per accelerare l'esecuzione dell'algoritmo; resta

da notare come la fattorizzazione modifichi la banda avanti della matrice normale. Infine per accelerare l'esecuzione dell'algoritmo d'inversione, è necessario non solo cercare gli elementi, di volta in volta, coinvolti nelle matrici fattorizzata ed inversa, ma anche fare uso opportuno degli elementi già calcolati di questa¹⁵.

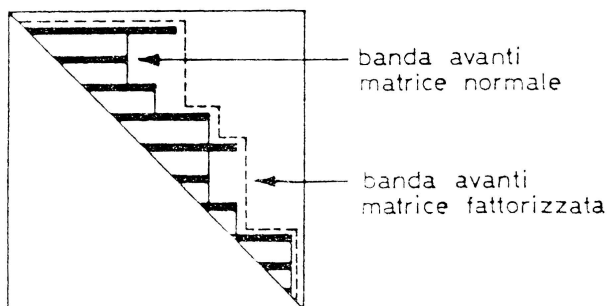


Fig. 1.13

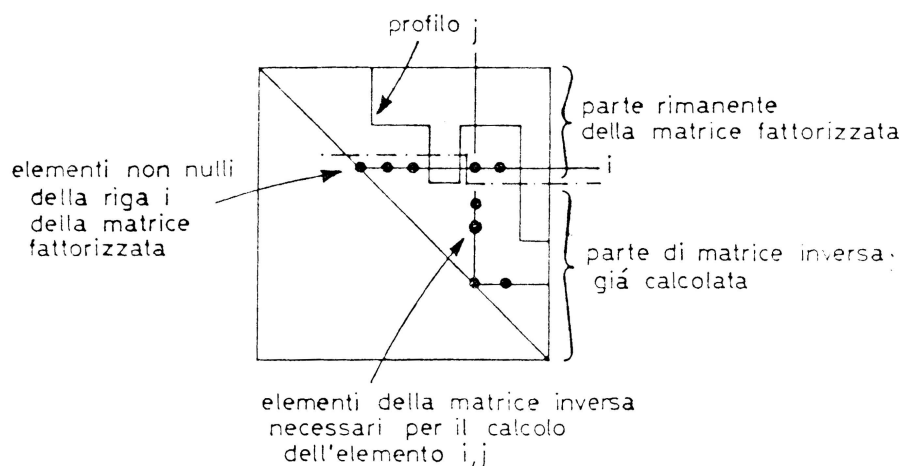
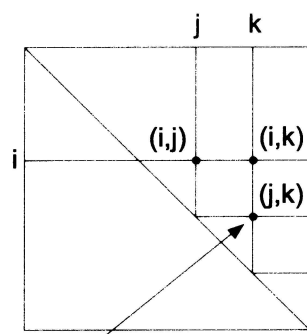


Fig. 1.14



l'elemento (j,k) della matrice inversa (a prodotto con l'elemento (i,k) della matrice fattorizzata) contribuisce al calcolo degli elementi della prima matrice:

- (i,j) insieme ad altri elementi della riga j della stessa matrice
- (i,k) insieme ad altri elementi della colonna k della stessa matrice

Fig. 1.15

¹⁵ Ogni elemento già calcolato della matrice inversa serve due volte e, poiché la sua ricerca per colonne non è immediata, è preferibile accumulare i prodotti necessari al calcolo degli elementi della matrice inversa, mentre si scorre sequenzialmente la stessa per righe.

5. Riordino delle incognite

La matrice normale, come detto in precedenza, è in generale sparsa a causa della topologia di molti problemi. Le matrici sparse possono avere gli elementi non-nulli raggruppati attorno alla diagonale principale, oppure altrimenti distribuiti. Le strutture reticolari, soprattutto quando si intersecano ordini diversi, hanno matrici normali sparse con elementi non-nulli generalmente distribuiti.

Soprattutto per la soluzione con un metodo esatto (ad es., Cholesky), ma anche per l'applicazione di qualche metodo iterativo (ad es., ICCG: gradiente coniugato preconditionato con matrice fattorizzata di Cholesky incompleta), è conveniente operare con una matrice normale i cui elementi non-nulli siano raggruppati il più possibile.

Il raggruppamento degli elementi non-nulli può essere migliorato cambiando l'ordine delle incognite. Tale riordino può avvenire durante la soluzione del sistema, oppure prima di iniziare la soluzione stessa. Si noti che, poiché la matrice normale è simmetrica e definita positiva, il riordino non è necessario per il suo buon condizionamento e ha il solo scopo di migliorare il raggruppamento. Inoltre per la rapidità di esecuzione dello stesso è conveniente eseguire il riordino a priori.

Il riordino a priori delle incognite può essere effettuato con alcuni algoritmi basati su differenti strategie. Uno dei più vecchi è l'algoritmo di Rosen, fondato su concetti abbastanza intuitivi; un altro, ormai classico, è quello di Cuthill–McKee che fa uso della teoria dei grafi; altri algoritmi sono stati proposti come dirette evoluzioni dell'algoritmo di Cuthill – McKee: uno di questi è l'algoritmo di Gibbs Poole e Stockmeyer¹⁶

6. Funzionali delle incognite

Al termine di una compensazione, accade spesso di dover calcolare alcuni funzionali lineari delle incognite, valutandone anche la loro attendibilità¹⁷. In tal caso, dato il seguente funzionale lineare:

$$y = \sum_{i=1}^l a_i x_i$$

la legge di propagazione della varianza fornisce la varianza del funzionale, nota la matrice di varianza-covarianza delle incognite:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^l a_i^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^l \sum_{j=i+1}^l a_i a_j \sigma_{x_i x_j} = \sum_{i=1}^l \left(2 \sum_{j=i}^l a_i a_j \sigma_{x_i x_j} - a_i^2 \sigma_{x_i}^2 \right)$$

¹⁶ Si veda, a riguardo, Benciolini G.B., Mussio L. (1984): Algoritmi di riordino delle incognite nelle compensazioni a minimi quadrati. In: M. Cuniatti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 91–137, ed inoltre: Crespi M., Mussio L. (1990): Trattamenti matematici avanzati. In: F. Crosilla, L. Mussio (Ed's) *Dall'analitico al digitale: nuovi sviluppi della fotogrammetria applicata all'ingegneria*. CISM, Udine, p. 71–104.

¹⁷ Si osservi che in una compensazione sono importanti funzionali lineari delle incognite gli scarti-residui delle equazioni d'osservazione e/o pseudo-osservazione, ed i valori compensati delle stesse. Inoltre nel caso in cui le incognite abbiano una certa legge (lineare) di evoluzione nel tempo (e/o di distribuzione nello spazio), i valori aggiornati di queste ad un dato istante (e/o in punti prefissati, ad es., di una griglia regolare).

Quest'ultima formula è immediatamente operativa con matrice piena. Invece, quando si opera con matrice memorizzata in forma compatta a banda (od a profilo), la stessa formula può essere utilizzata solo in determinate condizioni, in generale, di frequente attuazione. Innanzitutto le l incognite coinvolte dal funzionale devono essere tali che la loro sottomatrice di varianza-covarianza sia completamente interna alla banda (od al profilo). Successivamente occorre calcolare l'indirizzo di un qualsiasi elemento $\sigma_{x_i x_j}$, nel caso di memorizzazione in forma compatta a banda, con l'espressione:

$$\min(i, j), |j-i|+1$$

e, nel caso di memorizzazione in forma compatta a profilo, con l'espressione:

$$l_{c_{max}}(i, j)-1-|j-i|$$

entrambe illustrate in precedenza, per l'operazione di normalizzazione.

PARTE II – I METODI ITERATIVI

1. Generalità¹⁸

Il metodo del Gradiente Coniugato (CG) è un metodo per la soluzione di sistemi lineari, particolarmente vantaggioso nella sua variante detta Cholesky Incompleto – Gradiente Coniugato (ICCG). Il punto di forza di tale metodo è il notevole risparmio di memoria, rispetto ai metodi diretti più comunemente usati. Infatti a differenza di essi, esso opera iterativamente sulla matrice normale e non produce una fattorizzazione che richiede una ben maggiore occupazione di memoria.¹⁹

Inoltre quando il numero delle incognite è piuttosto elevato e soprattutto la matrice normale è molto sparsa, ovvero ha fuori diagonale pochi elementi non-nulli, anche il numero di operazioni da eseguire con questo algoritmo, benché iterativo, diventa inferiore al numero di operazioni da eseguire con un metodo diretto.

Il limite di questo metodo è che non è possibile calcolare in modo esatto la matrice inversa. Tuttavia, come sarà illustrato nel seguito, un algoritmo appositamente studiato permette di calcolare, anche se in modo approssimato, gli elementi più importanti della matrice inversa.

E' necessario specificare preliminarmente dove tale metodo si collochi nel generale procedimento di compensazione. In base ai dati ed al modello funzionale, si scrivono le equazioni d'osservazione e/o

¹⁸ Questo paragrafo ed i seguenti contengono una versione riveduta e corretta dell'articolo: Benciolini G.B., Mussio L. (1984): Un algoritmo iterativo per la soluzione dei grandi sistemi. In: M. Cuniatti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 47–89, a sua volta, ripreso nell'articolo: Crippa B., Mussio L. (1991): Strumenti di calcolo. In: F. Crosilla, L. Mussio (Ed's) *Il sistema di posizionamento globale satellitare GPS*. CISM, Udine, p. 219–254.

¹⁹ Si veda, a riguardo, la parte quarta del presente lavoro e l'appendice di: Benciolini G.B., Mussio L. (1984): Algoritmi di riordino delle incognite nelle compensazioni a minimi quadrati. In: M. Cuniatti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 91–137.

pseudo-osservazione; dal sistema di dette equazioni, con il principio dei minimi quadrati, si genera il sistema normale che, una volta risolto, fornisce la soluzione del problema. E' proprio per risolvere il sistema normale che si può usare il metodo CG. Nel prosieguo, si illustra dapprima il metodo CG, mettendone in luce le caratteristiche, e successivamente la sua variante ICCG, fornendo i dettagli necessari per l'esecuzione dello stesso.

Il calcolo della matrice e del termine noto normali e le operazioni preliminari alla compensazione non cambiano se si usa questo metodo, oppure un qualsiasi metodo diretto o altro ancora²⁰. Come nel caso in cui si voglia risolvere un sistema normale con un metodo diretto, anche nel caso in cui si voglia risolvere lo stesso problema con un metodo iterativo, la matrice normale deve essere non-singolare. Si consideri il sistema lineare:

$$C x + d = 0$$

dove C è una matrice (n, n) simmetrica e definita positiva²¹ d è il vettore dei termini noti ed x è un vettore qualsiasi; sia poi \tilde{x} la soluzione del sistema.

Un metodo di soluzione del sistema dato si dice diretto, se permette di ottenere \tilde{x} con un numero finito di operazioni; si chiama invece iterativo, se consiste nel costruire una successione infinita di vettori: x_0, x_1, x_2, \dots , tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i = \tilde{x}$$

Il metodo CG si può chiamare pseudo-iterativo: esso consiste infatti nel calcolare una successione finita: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{\tilde{n}}$ tale che: $\tilde{x}_{\tilde{n}} = x$, essendo \tilde{n} un numero minore o uguale ad n (numero di incognite). Inoltre si cerca di costruire questa successione in modo tale che risulti: $x = \tilde{x} \quad \forall i \geq \tilde{i}$ opportuno (essendo comunque: $\tilde{i} \leq n$) ed arrestando così il procedimento al passo \tilde{i} .

Il campo di applicazione elettivo dei metodi iterativi è costituito dai grandi sistemi con matrice molto sparsa. I metodi diretti, infatti, sono basati su una fattorizzazione della matrice del sistema dato o su operazioni equivalenti. Questa operazione, come detto in precedenza, produce una nuova matrice, molto più piena di quella data. Ciò non avviene, invece, per i metodi iterativi che operano con la matrice data, oppure con un piccolo numero (due per l'ICCG) di matrici aventi la stessa sparsità di quella data.

²⁰ Per i dettagli su queste operazioni, si rimanda alla parte prima del presente lavoro ed inoltre agli articoli: Benciolini G.B., Mussio L. (1984): Algoritmi esatti per la risoluzione di grandi sistemi. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 5-46, e: Crespi M., Mussio L. (1989): Problemi di calcolo. In: F. Crosilla, L. Mussio (Ed's) *Progettazione ed ottimizzazione del rilievo topografico e fotogrammetrico di controllo*. CISM, Udine, p. 255-282.

²¹ Si definisce matrice definita positiva una matrice quadrata che soddisfa le relazioni:

$$\begin{aligned} x^T C x &\geq 0 & \forall x \\ x^T C x &= 0 & \rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

2. Il metodo del Gradiente Coniugato

Si consideri la differenza tra il vettore generico x ed il vettore \tilde{x} soluzione del sistema dato:

$$x - \tilde{x}$$

il numero:

$$\rho(x) = (\tilde{x} - x)^T C (\tilde{x} - x)$$

è una misura della distanza di x da \tilde{x} e può essere considerato come misura della bontà di x quale approssimazione di \tilde{x} , risultando tanto più piccolo quanto più x approssima bene \tilde{x} . L'espressione di $\rho(x)$ indica che lo scalare ρ è funzione del vettore x . La funzione $\rho(x)$ ha le seguenti proprietà:

a) $\rho(x) \geq 0 \quad \forall x$

b) $\rho(x) = 0$ se e solo se: $x = \tilde{x}$

c) la rappresentazione geometrica della funzione $\rho(x)$ è una superficie nello spazio R^{n+1} : in particolare, si tratta di iper-paraboloide ellittico.

Le prime due proprietà derivano dal fatto che la matrice C è simmetrica e definita positiva; la terza proprietà è la generalizzazione, in $n+1$ dimensioni, di quanto risulta geometricamente evidente in due dimensioni: allora la superficie è un paraboloide ellittico. Le curve di livello di questo paraboloide nel piano sono delle ellissi con centro nel vertice del paraboloide stesso. In generale, le superfici di livello di $\rho(x)$ sono degli iper-ellissoidi nello spazio R^n , con centro in \tilde{x} . Questi iper-ellissoidi, da ora in poi detti semplicemente ellissi (generalizzando il termine), hanno in generale l'equazione:

$$\rho(x) = \tau \quad \text{con: } \tau \geq 0$$

Per $\tau = 0$, l'ellisse si riduce al punto x . Gli assi delle ellissi sono diretti come gli autovettori di C e sono proporzionali all'inverso delle radici quadrate degli autovalori²².

²² Sia A una matrice quadrata qualsiasi di ordine n . I valori del parametro scalare λ per cui l'equazione in x : $Ax = \lambda x$, ammette soluzioni non identicamente nulle sono dette autovalori di A . I vettori x , soluzione della equazione data si chiamano autovettori di A . L'insieme degli autovettori corrispondenti ad uno stesso autovalore formano uno spazio detto autospazio di A . Il numero degli autovettori linearmente indipendenti, corrispondenti ad uno stesso autovalore, si chiama molteplicità geometrica di quell'autovalore. In ogni caso, gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione algebrica:

Dalle proprietà precedenti, si appare chiaro che cercare la soluzione \tilde{x} del sistema dato equivale a cercare, nello spazio delle x , il punto di minimo della funzione $\rho(x)$. Se si dispone di un procedimento che, dato un vettore x_i , permetta di costruire un vettore x_{i+1} , tale che sia soddisfatto il vincolo: $\rho(x_{i+1}) < \rho(x_i)$, questo procedimento può essere utilizzato per costruire una successione: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, sicuramente convergente a \tilde{x} .

Esistono vari procedimenti per costruire la successione richiesta, rispettando tale vincolo; nel metodo CG, il vettore della nuova approssimazione si ottiene sommando, ad ogni passo, al vettore dell'approssimazione precedente x_{i-1} , un'opportuna correzione nella forma:

$$x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_i$$

dove α_i e p_i sono rispettivamente uno scalare ed un vettore opportunamente calcolati. Il procedimento si innesca scegliendo un vettore di partenza x_0 arbitrario.

Dalle ripetute applicazioni della suddetta espressione, risulta ovviamente:

$$x_i = x_0 + \sum_{k=1}^i \alpha_k p_k$$

Per ogni approssimazione x_{i-1} di \tilde{x} , si definisce il corrispondente vettore resto:

$$r_i = -C(x_{i-1} - \tilde{x}) = -(Cx_{i-1} + d)$$

essendo: $\tilde{x} = -C^{-1}d$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Si noti che, se A ed x sono reali, interessano di solito solo le soluzioni reali di tale equazione.

Se A è simmetrica e definita positiva, tutti i suoi autovalori sono positivi, la somma delle loro molteplicità geometriche è uguale ad n ed è possibile scegliere gli autovettori, in modo tale che formino una base ortogonale in R^n .

In corrispondenza ad ogni autovalore, il calcolo dei suoi autovettori, come soluzione dell'equazione:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

si effettua imponendo un opportuno vincolo aggiuntivo negli elementi degli autovettori stessi; ad es., si può imporre la condizione detta di normalizzazione:

$$\|x\| = 1$$

Infatti ad un autovalore semplice corrisponde non un singolo autovettore, ma una infinità di autovettori che differiscono solo per un fattore di proporzionalità e che formano perciò un autospazio di dimensione uno. Se poi l'autovalore è multiplo gli corrisponde una molteplice infinità di autovettori, cioè un autospazio a più di una dimensione all'interno del quale conviene scegliere, come autovettori, una base opportuna. Tale scelta si effettua imponendo, oltre alla condizione di normalizzazione, ulteriori opportuni vincoli.

Dal resto r_i , si calcola, ad ogni passo, il vettore p_i . Al primo passo, si pone: $p_1 = r_1$, da cui si ottiene:

$$x_1 = x_0 + \alpha_1 p_1 = x_0 + \alpha_1 r_1$$

Al secondo passo, calcolato r_2 , si sceglie come p_2 la componente di r_2 C -ortogonale²³ al vettore p_1 . Ad ogni passo successivo, calcolato r_i , si sceglie come p_i la componente di r_i C -ortogonale a tutti gli $i-1$ vettori p_k (p_1, p_2, \dots, p_{i-1}), già calcolati, applicando così, passo dopo passo, ai vettori r_i il procedimento di C -ortogonalizzazione di Graham-Schmidt²⁴; ovvero un procedimento che, a partire da un insieme di vettori, costruisce un altro insieme, avente lo stesso spazio spannato e mutuamente C -ortogonali, essendo C una matrice simmetrica e definita positiva.

$$p_i = r_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{r_i^T C p_k}{p_k^T C p_k} p_k$$

$$= r_i - \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_{ik} p_k \quad i = 2, \dots, n$$

²³ Dato un insieme di vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, essi si dicono linearmente indipendenti, se la relazione:

$$\sum_i a_i x_i = 0$$

è verificata solo per: $a_1, a_2, \dots, a_n = 0$; in caso contrario i vettori dati si dicono linearmente dipendenti l'uno dagli altri.

Un insieme di vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ appartenenti ad uno spazio X , si chiama: base di X , se tutti gli elementi di X sono esprimibili, in modo univoco, come combinazione lineare dei vettori: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Dato un insieme di vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, si chiama spazio spannato da tali vettori e si indica con: $sp\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, l'insieme di tutti i vettori esprimibili come combinazione lineare dei vettori dati.

Dati due vettori $x, y \in R^n$, si dice che essi sono ortogonali, se risulta:

$$x^T y = y^T x = 0$$

Si dice che essi sono C -ortogonali se, data una matrice $C(n, n)$ simmetrica e definita positiva, risulta:

$$x^T C y = y^T C x = 0$$

²⁴ Il procedimento di Graham-Schmidt permette di costruire, a partire da un insieme di vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, un altro insieme di vettori $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, tale che: $sp\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = sp\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e che i vettori $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ siano mutuamente C -ortogonali, essendo C una matrice (n, n) simmetrica e definita positiva. Le espressioni dei vettori y_i sono le seguenti:

$$y_1 = x_1$$

$$y_i = x_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{x_i^T C y_k}{y_k^T C y_k} y_k \quad i = 2, \dots, n$$

In seguito, si mostrerà che il numero di vettori p_i che si possono costruire nel corso del procedimento CG è, in generale, $\tilde{n} \leq n$.

L'opportunità che ogni p_i sia C -ortogonale agli $i-1$ precedenti vettori p_k sta nel fatto che, in tale caso, i coefficienti α_i sono facili da calcolare e indipendenti l'uno dall'altro. Invece se le direzioni dello sviluppo della soluzione non fossero C -ortogonali, non sarebbe possibile, al passo i -esimo, determinare α_i , oppure sarebbe necessario compiere più di n passi, come si fa nei metodi propriamente iterativi.

E' poi evidente che il metodo CG sarebbe di interesse pratico quasi nullo, se dovesse basarsi sulla effettiva applicazione del procedimento di Graham-Schmidt completo, ovvero se si dovessero calcolare, per ogni p_i , tutti gli addendi della sommatoria contenuta nell'espressione

Si osservi innanzitutto come non possono esistere più di n vettori C -ortogonali tra loro e non nulli, e perciò come la soluzione debba essere ottenuta al massimo in n passi²⁵. Ciò significa che la differenza $\tilde{x} - x_0$ può essere espressa come combinazione lineare dei vettori (p_1, p_2, \dots, p_n) :

$$\tilde{x} - x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$$

e che ciò è possibile con un'unica scelta dei coefficienti α_i . In questa espressione, è facile mettere in evidenza la generica approssimazione x_{i-1} e suddividere, in corrispondenza, la sommatoria posta al secondo membro:

$$(\tilde{x} - x_{i-1}) + (x_{i-1} - x_0) = \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k p_k + \sum_{j=i}^n \alpha_j p_j$$

si ha così, tenuto conto dell'espressione (riferita alla generica approssimazione x_{i-1} , anziché x_i):

$$x_{i-1} - x_0 = \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k p_k$$

$$\tilde{x} - x_{i-1} = \sum_{j=i}^n \alpha_j p_j$$

²⁵ Si supponga infatti che esistano $n+1$ vettori C -ortogonali; in tal caso si potrebbe scrivere:

$$p_i^T C p_{n+1} = 0 \quad i=1, \dots, n$$

ma, essendo questo un sistema di n equazioni omogenee indipendenti nell'incognita p_{n+1} , risulta sicuramente: $p_{n+1} = 0$

Quest'ultima espressione sostituita nell'espressione del vettore resto, presentata in precedenza, fornisce un'altra espressione dello stesso vettore:

$$r_i = \sum_{j=i}^n \alpha_j C p_j$$

Moltiplicando a destra per p_i entrambi i membri di questa espressione, si ha ²⁶:

$$r_i^T p_i = \sum_{j=i}^n \alpha_j p_j^T C p_i = \alpha_i p_i^T C p_i + \sum_{j=i+1}^n \alpha_j p_j^T C p_i = \alpha_i p_i^T C p_i$$

espressione che, risolta rispetto ad α_i , risulta:

$$\alpha_i = \frac{r_i^T p_i}{p_i^T C p_i}$$

Dalla stessa espressione, sostituendo al primo membro dapprima p_i con l'espressione del procedimento di C -ortogonalizzazione di Graham-Schmidt:

$$r_i^T r_i - \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_{ik} r_i^T p_k = \alpha_i p_i^T C p_i$$

e poi r_i^T (nel secondo addendo) con l'ultima espressione del vettore resto, ovvero: $r_i = \sum_{j=i}^n \alpha_j C p_j$

$$r_i^T r_i - \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=i}^n \alpha_j \gamma_{ik} p_j^T C p_k = \alpha_i p_i^T C p_i$$

si ricava un'altra espressione, utile per il calcolo effettivo degli scalari α_i :

$$\alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{p_i^T C p_i}$$

²⁶ In questa espressione, come in altre nel seguito, si ha che, per ogni $j \neq i$, il prodotto scalare: $p_j^T C p_i$, risulta identicamente nullo, in quanto tutti i vettori p_i ($i=1, \dots, n$) sono scelti C -ortogonali fra loro.

Si deve ora verificare quali coefficienti della sommatoria contenuta nell'espressione del procedimento di C -ortogonalizzazione di Graham–Schmidt siano identicamente nulli e contemporaneamente ricavare alcuni legami tra le grandezze in considerazione (in particolare tra i vettori p_i ed r_i , e gli scalari α_i).

Dalle espressioni del vettore resto r_i e della approssimazione della soluzione x_i (in funzione dell'approssimazione precedente x_{i-1}) si ricava l'espressione del nuovo vettore resto:

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= -(C x_i + d) = \\ &= -(C(x_{i-1} + \alpha_i p_i) + d) = \\ &= -(C x_{i-1} + d) - \alpha_i C p_i = \\ &= r_i - \alpha_i C p_i \end{aligned}$$

che, risolta rispetto a $C p_i$, risulta:

$$C p_i = -\frac{r_{i+1} - r_i}{\alpha_i}$$

Il procedimento di C -ortogonalizzazione di Graham–Schmidt (riscritto con riferimento al calcolo del vettore p_{i+1} , anziché del vettore p_i come nell'espressione precedente), tenuto conto, nell'ordine, dell'ultima espressione e di quella che fornisce il calcolo degli scalari α_i , diviene:

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= r_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{r_{i+1}^T C p_k}{p_k^T C p_k} p_k = \\ &= r_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{r_{i+1}^T (r_{k+1} - r_k)}{\alpha_k p_k^T C p_k} p_k = \\ &= r_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{r_{i+1}^T (r_{k+1} - r_k)}{r_k^T r_k} p_k = \\ &= r_{i+1} + \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i} p_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{r_{k+1}^T r_{i+1}}{r_k^T r_k} p_k - \sum_{k=1}^i \frac{r_k^T r_{i+1}}{r_k^T r_k} p_k \end{aligned}$$

e, risultando identicamente nulli tutti gli addendi di entrambe le sommatorie (in proposito si veda, appena oltre, la verifica):

$$p_{i+1} = r_{i+1} + \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i} p_i = r_{i+1} + \beta_i p_i$$

dove gli scalari β_i sono calcolati con l'espressione:

$$\beta_i = \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i}$$

La verifica dell'affermazione, fatta poco sopra, per cui risulta:

$$r_{k+1}^T r_{i+1} = 0 \quad \forall \quad k \leq i-1$$

e

$$r_k^T r_{i+1} = 0 \quad \forall \quad k \leq i$$

è agevole, tenuto conto insieme dell'espressione del procedimento di C -ortogonalizzazione di Graham-

Schmidt (risolta rispetto a r_i) e dell'espressione del vettore resto: $r_i = \sum_{j=i}^n \alpha_j C p_j$. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} r_{k+1}^T r_{i+1} &= \left(p_{k+1}^T + \sum_{l=1}^k \gamma_{(k+1)l} p_l^T \right) \sum_{j=i+1}^n \alpha_j C p_j = \\ &= \sum_{j=i+1}^n \alpha_j p_{k+1}^T C p_j + \sum_{l=1}^k \sum_{j=i+1}^n \alpha_j \gamma_{(k+1)l} p_l^T C p_j = 0 \end{aligned}$$

come pure:

$$\begin{aligned} r_k^T r_{i+1} &= \left(p_k^T + \sum_{l=1}^{k-1} \gamma_{kl} p_l^T \right) \sum_{j=i+1}^n \alpha_j C p_j = \\ &= \sum_{j=i+1}^n \alpha_j p_k^T C p_j + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_j \gamma_{kl} p_l^T C p_j = 0 \end{aligned}$$

Si riportano, riassunte in un unico schema ricorsivo, le espressioni effettivamente usate per il calcolo con il metodo del gradiente coniugato:

$$p_1 = r_1 = - (Cx_o + d)$$

$$\alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{p_i^T C p_i}$$

$$x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i C p_i \quad i = 1, 2, \dots, \tilde{n}$$

$$\beta_i = \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i}$$

$$p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i p_i$$

$$\tilde{x} = x_{\tilde{n}}$$

rimanendo necessario dimostrare la convergenza esatta del metodo, cioè verificare che esiste un numero $\tilde{n} \leq n$ tale che: $x_{\tilde{n}} = \tilde{x}$. Inoltre deve essere analizzata anche la convergenza numerica, ovvero riconoscere da quale fattore dipende la possibilità di considerare: $x_{\tilde{i}} = \tilde{x}$, nella approssimazione voluta, con \tilde{i} il più piccolo possibile.

La convergenza è assicurata dal fatto che il vincolo: $\rho(x_{i+1}) < \rho(x_i)$, è di disuguaglianza in senso stretto, tranne nel caso in cui risulti: $x_{\tilde{i}} = \tilde{x}$. Infatti l'espressione del seguente funzionale:

$$\rho(x_{i+1}) = (x_{i+1} - \tilde{x})^T C (x_{i+1} - \tilde{x})$$

si può riscrivere:

$$\begin{aligned} \rho(x_{i+1}) &= \rho(x_i + \alpha_{i+1} p_{i+1}) = \\ &= (x_i + \alpha_{i+1} p_{i+1} - \tilde{x})^T C (x_i + \alpha_{i+1} p_{i+1} - \tilde{x}) = \\ &= (x_i - \tilde{x})^T C (x_i - \tilde{x}) + 2\alpha_{i+1} p_{i+1}^T C (x_i - \tilde{x}) + \alpha_{i+1}^2 p_{i+1}^T C p_{i+1} = \end{aligned}$$

$$= \rho(x_i) - 2\alpha_{i+1} r_{i+1}^T p_{i+1} + \alpha_{i+1}^2 p_{i+1}^T C p_{i+1}$$

Le scelte di α_i che garantiscono la disuguaglianza voluta, sono ovviamente infinite; tuttavia conviene scegliere quello che minimizza $\rho(x_{i+1})$. Pertanto annullando la derivata di $\rho(x_{i+1})$ rispetto ad α_{i+1} , si ottiene:

$$\alpha_{i+1} = \frac{r_{i+1}^T p_{i+1}}{p_{i+1}^T C p_{i+1}} = \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{p_{i+1}^T C p_{i+1}} > 0$$

Si noti come la seconda uguaglianza si giustifichi, ricordando espressioni di α_i già esposte in precedenza. Quest'ultima espressione, sostituita nell'espressione del sopracitato funzionale:

$$\begin{aligned} \rho(x_{i+1}) &= \rho(x_i) - 2\alpha_{i+1} r_{i+1}^T p_{i+1} + \alpha_{i+1} \frac{r_{i+1}^T p_{i+1}}{p_{i+1}^T C p_{i+1}} p_{i+1}^T C p_{i+1} = \\ &= \rho(x_i) - \alpha_{i+1} r_{i+1}^T p_{i+1} = \\ &= \rho(x_i) - \alpha_{i+1} r_{i+1}^T r_{i+1} < \rho(x_i) \end{aligned}$$

dimostra la convergenza esatta del metodo, essendo oltre: $\alpha_{i+1} > 0$ anche: $r_{i+1}^T p_{i+1} = r_{i+1}^T r_{i+1} > 0$ (l'uguaglianza si giustifica ricordando sempre il numeratore delle espressioni α_i).

Il numero di iterazioni necessarie coincide con il numero di autospazi della matrice C in cui il vettore abbia una componente non nulla, perciò è sempre minore uguale al numero di autovalori distinti della matrice C , come si potrebbe dimostrare in base alla rappresentazione spettrale²⁷ della stessa matrice.

²⁷ Si chiama proiettore P_y , su un sottospazio Y di uno spazio vettoriale X , una matrice tale che il vettore: $y = P_y x$ (con $x \in X$), sia la componente di x in Y .

Una proprietà fondamentale di tutti i generici proiettori è: $P \cdot P = P$; inoltre, in generale, non esiste P^{-1} , tranne nel caso in cui: $P = I$. Siano ora P_1, P_2, \dots, P_n i proiettori di un qualsiasi vettore sugli autospazi, di una matrice C quadrata, simmetrica e definita positiva, corrispondenti rispettivamente agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, la sommatoria: $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$, è una matrice coincidente con la matrice C e viene detta rappresentazione spettrale di C . Si ha infatti:

$$C = U^T \Lambda U = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^T u_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$$

essendo: $P_i^2 = (u_i^T u_i)(u_i^T u_i) = u_i^T (u_i u_i^T) u_i = u_i^T u_i = P_i$

Nelle applicazioni pratiche, in cui \tilde{x} deve essere calcolato con approssimazione finita, non si considera direttamente, cioè il numero di iterazioni necessarie per la convergenza esatta, ma piuttosto il numero di condizione spettrale:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

cioè il rapporto tra gli autovalori massimo e minimo di C . Se $\varepsilon \cong 1$, cioè se lo spettro di C è sufficientemente raccolto, si può ritenere che il numero di autovalori significativamente distinti sia molto minore di n . Si può perciò ottenere: $x_{\tilde{i}} = \tilde{x}$ con $\tilde{i} \ll n$, mentre al crescere di ε la convergenza è in generale sempre più lenta.

In pratica il numero i di iterazioni da effettuare per ottenere la precisione voluta, non può essere mai valutato a priori, ma si determina troncando il procedimento quando risulta: $x_{i+1} = x_i$, secondo una norma opportunamente scelta e con un'approssimazione prefissata.

Infine giova ricordare che, come già detto in precedenza, un limite del metodo del gradiente coniugato è proprio l'impossibilità di calcolare la matrice inversa, benché la conoscenza di alcuni elementi delle matrici inverse di matrici normali di problemi minimi quadrati sia spesso molto importante. Infatti

- gli elementi diagonali principali moltiplicati per il quadrato di sigma zero forniscono le varianze dei parametri incogniti;
- gli elementi extra-diagonali, la cui posizione è vicina alla diagonale principale, forniscono le covarianze, ovvero le correlazioni fra parametri incogniti appartenenti ad uno stesso vertice, oppure a due vertici topologicamente (e spesso anche geometricamente) vicini;
- gli elementi extra-diagonali, la cui posizione corrisponde agli elementi non-nulli della matrice normale, servono per calcolare le varianze delle quantità compensate e degli scarti-residui delle osservazioni.

Considerazioni sulla rappresentazione spettrale di una matrice

Il prodotto matriciale: $y = C x$ si può riscrivere, tenendo conto della rappresentazione spettrale di C , nella forma:

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i x$$

Ciò significa che il prodotto matriciale può essere interpretato come il risultato delle seguenti operazioni:

- a) scomposizione di x nelle sue componenti appartenenti agli autospazi di C ;
- b) moltiplicazione (scalare) di ogni componente di x , ottenuta al passo precedente, per il corrispondente autovalore;
- c) somma dei vettori ottenuti dalle moltiplicazioni di cui al passo appena precedente.

3. Generalità sul pre-condizionamento

La considerazione sulla convergenza numerica, sviluppata verso la fine del paragrafo precedente, è di importanza fondamentale, perché suggerisce come agire per accelerare la convergenza del metodo CG. Occorre cercare di sostituire il sistema dato:

$$C x + d = 0$$

con un altro equivalente meglio condizionato:

$$G z + f = 0$$

Ciò significa che il numero di condizione del nuovo sistema è più vicino all'unità e inoltre che è immediato il passaggio dalla sua soluzione a quella del sistema dato. Questo si ottiene con una operazione, detta precondizionamento, che consiste nel pre- e post-moltiplicare la matrice C con le inverse di due matrici opportune, quadrate e non-singolari: W_1 e W_2 .

La scelta di queste matrici avviene proprio con il criterio di diminuire il numero di condizione spettrale κ , inoltre di non richiedere troppi calcoli e troppa occupazione di memoria, infine di rispettare la simmetria e la definita positività della matrice data. Posto allora:

$$G = W_2^{-1} C W_1^{-1}$$

$$f = W_2^{-1} d$$

$$z = W_1 x$$

il sistema meglio condizionato: $G z + f = 0$, diventa: $(W_2^{-1} C W_1^{-1}) W_1 x + W_2^{-1} d = 0$.

Il metodo ICCG corrisponde ad una particolare scelta delle matrici W_1 e W_2 : $W_1 = W$ e $W_2 = W^T$, per cui essendo:

$$G = (W^T)^{-1} C W^{-1}$$

$$f = (W^T)^{-1} d$$

$$z = W x$$

il sistema meglio condizionato diventa:

$$\left((W^T)^{-1} C W^{-1} \right) W x + (W^T)^{-1} d = 0$$

La matrice W è triangolare superiore, avente la stessa sparsità di C , e tale che ponendo:

$$E = C - W^T W$$

risulti: $e_{ij} = 0$, se $c_{ij} \neq 0$.

La matrice W si ottiene con il procedimento di Cholesky incompleto, cioè applicando le usuali formule della fattorizzazione di Cholesky, facendo correre gli indici solo sulle posizioni degli elementi non-nulli di C , ovvero:

$$w_{ii} = \sqrt{c_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} w_{ki}^2}$$

$$w_{ij} = \frac{\left(c_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} w_{ki} w_{kj} \right)}{w_{ii}} \quad (j > i) \quad \text{se } c_{ij} \neq 0$$

$$w_{ij} = 0 \quad (j > i) \quad \text{se } c_{ij} = 0$$

La matrice esiste con le proprietà richieste, se C è di tipo M ²⁸; si noti tuttavia come questa condizione sia sufficiente, ma non necessaria. L'efficacia del preconditionamento, ottenuto con la fattorizzazione di Cholesky incompleta, è suffragata da moltissime prove numeriche; inoltre è possibile darne una spiegazione intuitiva, se si confronta la matrice W (fattore di Cholesky incompleto) con la matrice T (fattore di Cholesky completo). Infatti, se si potesse porre: $W = T$ e $W^T = T^T$. con: $T^T T = C$, risulterebbe:

$$E = C - T^T T = C - C = 0$$

e:

$$G = I$$

²⁸ Una matrice C quadrata, simmetrica e non-singolare è detta di tipo M , se i suoi elementi extradiagonali sono tutti non-positivi e se tutti gli elementi di C^{-1} sono non-negativi.

Tutti gli autovalori di G sarebbero allora coincidenti tra loro ed uguali ad uno e pertanto la soluzione si otterrebbe immediatamente alla prima iterazione del CG. In questo caso, si sarebbe applicato il metodo di Cholesky al sistema dato. Questo tuttavia non è possibile, senza contraddire la richiesta proprietà di stessa sparsità fra le matrici C e W , in quanto, come già detto più volte, la fattorizzazione di Cholesky genera una matrice T , in generale, più piena della matrice C .

Si può comunque notare che, essendo di solito piccoli gli elementi di T in posizione lontana dagli elementi non-nulli di C , W è in generale una buona approssimazione di T . Allora la matrice G , ottenuta preconditionando la matrice C con W e W^T , è sufficientemente vicina all'identità. Ciò significa che lo spettro dei suoi autovalori è sufficientemente raggruppato e pertanto il suo numero di condizione κ risulta abbastanza vicino all'unità. Queste osservazioni, benché meramente qualitative, sono sufficienti a giustificare la bontà del metodo.

In pratica, esso si realizza calcolando la matrice W con le espressioni date e utilizzando poi il seguente schema ricorsivo, al posto dello schema CG del paragrafo precedente:

$$r_1 = -(Cx_0 + d)$$

$$p_1 = (W^T W)^{-1} r_1$$

$$\alpha_i = \frac{r_i^T (W^T W)^{-1} r_i}{p_i^T C p_i}$$

$$x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i C p_i \quad i = 1, 2, \dots, \tilde{n}$$

$$\beta_i = \frac{r_{i+1}^T (W^T W)^{-1} r_{i+1}}{r_i^T (W^T W)^{-1} r_i}$$

$$p_{i+1} = (W^T W)^{-1} r_{i+1} + \beta_i p_i$$

$$\tilde{x} = x_{\tilde{n}}$$

Se C non è tipo M , è possibile che risulti per qualche i : $w_{ii}^2 \leq 0$. In tale caso, al posto della fattorizzazione incompleta presentata, si può usare la seguente fattorizzazione incompleta:

$$E = C - W^T R W$$

con il vincolo:

$$R = \text{diag} \left(\frac{1}{w_{11}}, \frac{1}{w_{22}}, \dots, \frac{1}{w_{mm}} \right)$$

sostituendo gli eventuali valori negativi con un valore positivo piccolo opportunamente scelto. In tal caso, tuttavia non è possibile soddisfare l'annullamento prescritto della matrice d'errore E , dove sono non-nulli gli elementi della matrice C . Si riportano di seguito le espressioni con cui calcolare gli elementi delle matrici W ed R :

$$w_{ij} = c_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} v_{ki} r_{kk} w_{kj} \quad \text{se } c_{ij} \neq 0$$

$$w_{ij} = 0 \quad \text{se } c_{ij} = 0$$

Per quanto riguarda l'utilizzo dello schema ICCG, se si usa la seconda fattorizzazione incompleta, invece della prima fattorizzazione incompleta, basta porre $(W^T R W)^{-1}$ al posto di $(W^T W)^{-1}$.

Si osservi che lo schema ICCG, applicato al sistema originale, è proprio uguale allo schema CG, applicato al sistema preconditionato: $G z + f = 0$, ovvero:

$$\left((W^T)^{-1} C W^{-1} \right) (W x) + (W^T)^{-1} d = 0$$

Infatti indicando con r_i^* , p_i^* , α_i^* e β_i^* i vettori r_i e p_i e gli scalari α_i e β_i dello schema CG, applicato al sistema preconditionato, e supponendo inoltre: $z_o = W x_o$, valgono le seguenti corrispondenze:

$$x_i = W^{-1} z_i$$

$$r_i = W^T r_i^*$$

$$p_i = W^{-1} p_i^*$$

$$\alpha_i = \alpha_i^*$$

$$\beta_i = \beta_i^*$$

Infine è ben evidente il vantaggio ottenuto con il preconditionamento, se si ricorda che proprio da ε dipende la velocità di convergenza del metodo.

4. Interpretazioni geometriche

La figura 2.1a mostra un paraboloide ellittico nello spazio 3D, corrispondente ad un funzionale quadratico di cui si voglia cercare il minimo, disposto in uno spazio qualsiasi, le cui sezioni piane orizzontali sono ellissi concentriche (Fig. 2.1b), corrispondenti ad una matrice quadrata, simmetrica e definita positiva (in questo caso specifico, di ordine due), se le sezioni sono determinate da iperpiani del suddetto spazio.

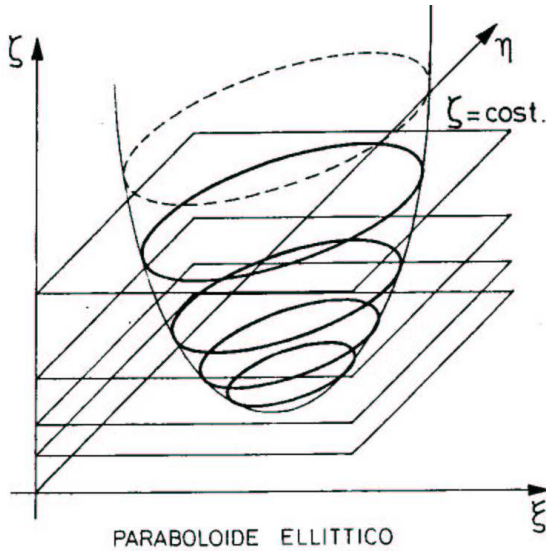


Fig. 2.1a

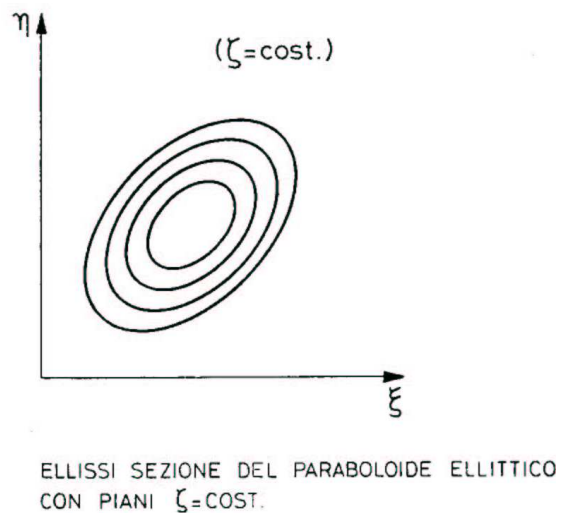


Fig. 2.1b

La figura 2.2 mostra due vettori e la loro differenza, come potrebbero essere un qualsiasi vettore di partenza arbitrario e la soluzione cercata di un sistema lineare, ottenuta con l'applicazione del metodo del gradiente coniugato. La figura 2.3 mostra (nei limiti grafici delle due dimensioni) la proprietà fondamentale del metodo del gradiente coniugato, ovvero il suo operare per componenti ortogonali tra loro, nella norma espressa dalla matrice del sistema lineare da risolvere. Pertanto essendo finito il numero d'incognite del suddetto sistema lineare, tutto ciò dà la sicurezza che il metodo proposto converga alla soluzione cercata, dopo un numero finito di passi.

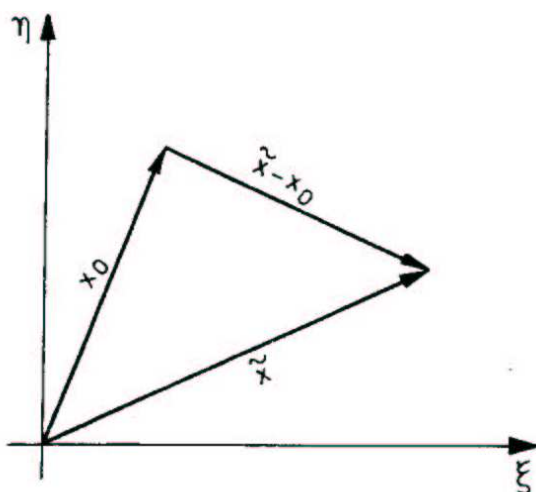


Fig. 2.2

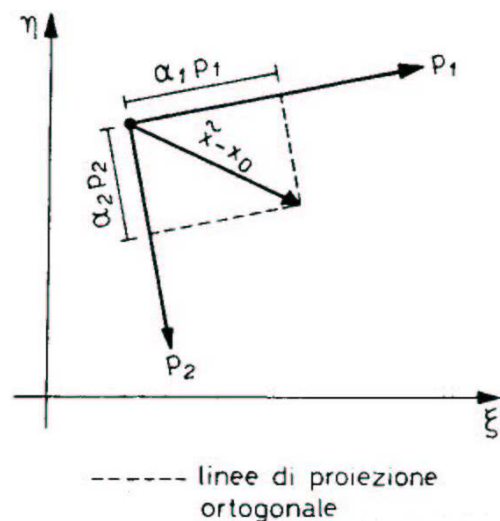


Fig. 2.3

Le figure 2.4 e 2.5 mostrano come il numero non possa invece essere ben determinato, nel caso in cui le proiezioni effettuate non siano ortogonali tra loro, nella norma espressa dalla matrice del sistema lineare da risolvere, ma oblique (secondo direzioni qualsiasi). In tal caso infatti, dopo due iterazioni (rifacendosi all'esempio bidimensionale proposto)), è ancora presente un residuo che richiede successive iterazioni per poter essere eliminato, giungendo alla soluzione cercata.

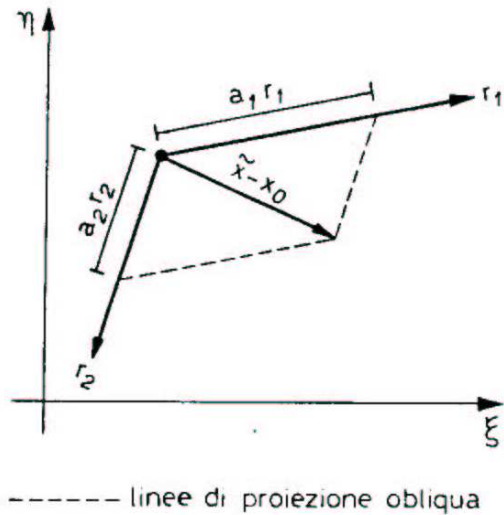


Fig. 2.4

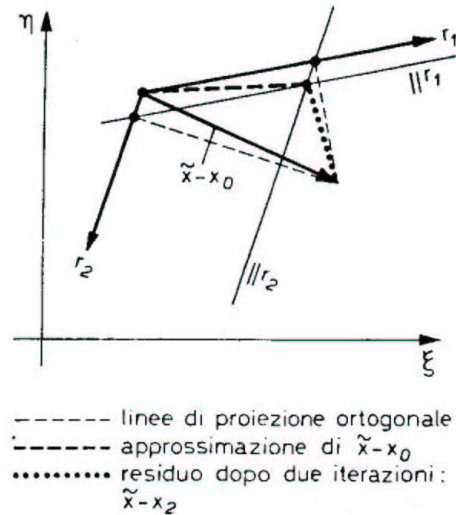


Fig. 2.5

La figura 2.6 suppone due autovalori distinti degli autospazi monodimensionali della matrice del sistema lineare da risolvere e mostra (nei limiti grafici delle due dimensioni) la costruzione del primo residuo, del metodo del gradiente coniugato, a partire dal sopraccitato vettore differenza, utilizzando la rappresentazione spettrale della suddetta matrice. Dopodiché la figura 2.7 suppone una sola componente non – nulla del sopraccitato vettore differenza in uno dei due autospazi monodimensionali, cosa che riduce il numero d'iterazioni necessarie per il calcolo della soluzione cercata, essendo il primo residuo parallelo al vettore differenza. Inoltre la figura 2.8 suppone di avere un autovalore di molteplicità due ed allora tutti i vettori di uno spazio bidimensionale sono autovettori della matrice del sistema lineare da risolvere ed uno di essi coincide con il sopraccitato vettore differenza, cosa che riduce ancora il numero d'iterazioni necessarie per il calcolo della soluzione cercata, essendo il primo residuo parallelo al vettore differenza.

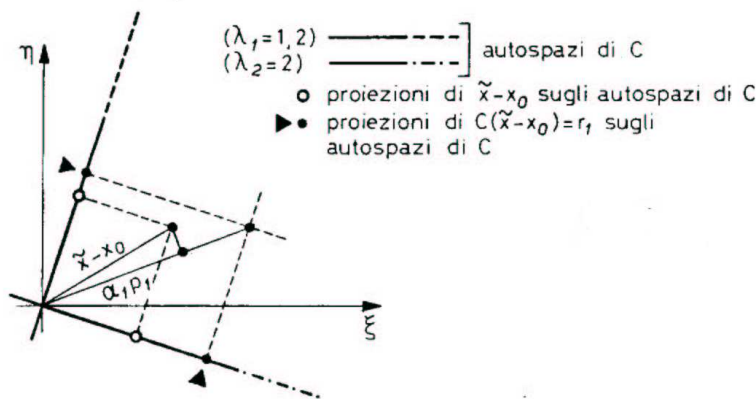


Fig. 2.6

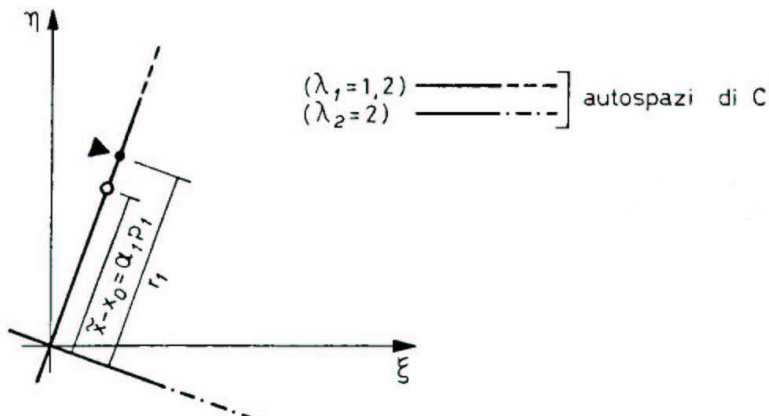


Fig. 2.7

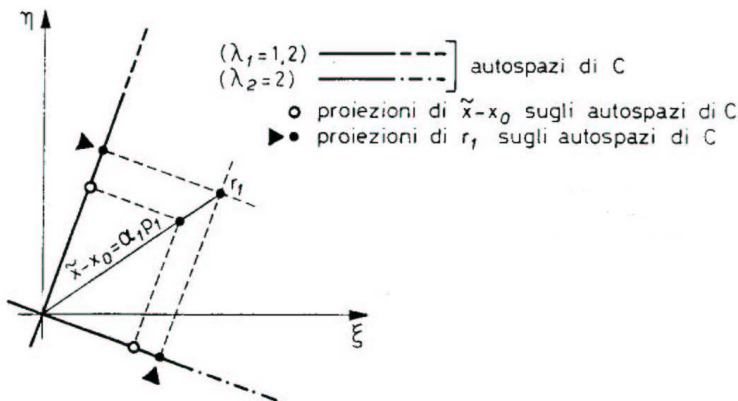


Fig. 2.8

Come già detto in precedenza, nelle applicazioni pratiche, la soluzione cercata deve essere calcolata con un'approssimazione finita. Di conseguenza, non è necessario conoscere il numero di autovalori distinti, ma il numero di iterazioni necessarie, per ottenere la convergenza (numericamente) esatta del metodo del gradiente coniugato alla soluzione cercata del sistema lineare dato. Come noto, essa è determinata del numero di condizione spettrale (ovvero dal rapporto tra l'autovalore massimo e quello minimo del sistema dato) e, se lo spettro degli autovalori è sufficientemente raccolto, allora il numero di autovalori realmente distinti è significativamente minore del numero di autovalori non coincidenti tra loro. In tal caso, l'angolo tra un residuo e la soluzione cercata è abbastanza piccolo e le iterazioni possono essere interrotte. Le figure 2.9 e 2.10 mostrano (nei limiti grafici delle due dimensioni), quando il primo residuo non è sufficientemente prossimo al vettore differenze e quando invece lo è.

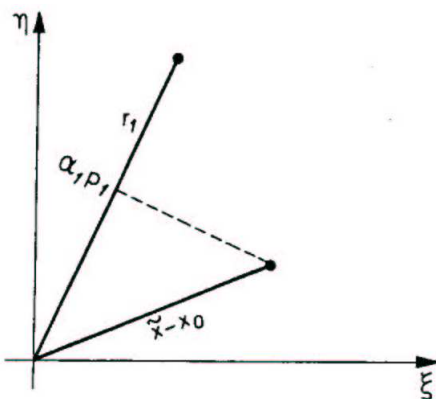


Fig. 2.9

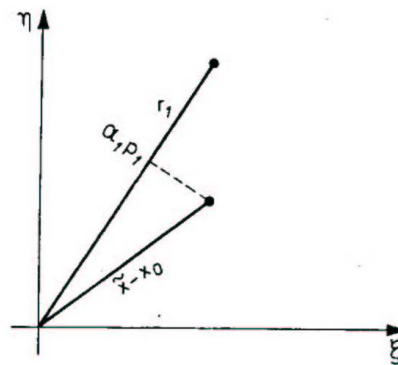


Fig. 2.10

Dalle considerazioni precedenti, si evince che un paraboloido circolare ha sezioni orizzontali a forma di circonferenze, è invariante per rotazione e qualsiasi direzione coordinata coincide con una direzione di massima pendenza, cosa che permette il raggiungimento del suo minimo in un solo passaggio. Allora è altrettanto evidente che, quanto più un parabolide ellittico si avvicina ad uno circolare e le sue sezioni sono ellissi prossime a circonferenze, tanto più rapidamente sarà possibile raggiungere il suo vertice. Compito specifico del preconditionamento è proprio trasformare il sistema dato in un altro meglio condizionato la cui rappresentazione geometrica sia più prossima a quella di forma circolare (o ipersferica, se a più dimensioni).

5. Nozioni complementari sul metodo ICCG e per il calcolo approssimato della matrice inversa

Il tipo di memorizzazione usato per le matrici C e W è quello ad elementi isolati. L'operazione di fattorizzazione si esegue, come per le matrici memorizzate a profilo, verificando l'intersezione tra le colonne corrispondenti agli indici di ogni elemento della matrice fattorizzata. Inoltre è molto utile impiegare un vettore di servizio in cui disporre, per ogni colonna del fattore incompleto di volta in volta in esame (colonna pivotale), gli elementi w_{ki} man mano che vengono calcolati, a partire dal primo non-nullo fino a quello in diagonale principale, lasciando nulli tutti quegli elementi w_{ki} per i quali sia: $c_{ki} = 0$. Questi ultimi non sono neppure calcolati, in quanto la memorizzazione ad elementi isolati della matrice normale consente proprio di fare correre gli indici dei cicli solo sui suoi elementi non-nulli.

In questo modo, puntando attraverso l'indicatore dell'elemento w_{kj} all'elemento k -esimo del vettore di servizio (dove è memorizzato l'elemento w_{ki}), è possibile calcolare il prodotto $w_{ki} w_{kj}$ senza dover eseguire alcuna ricerca tabellare. Pertanto se per un qualsiasi k , si ha: $c_{ki} = 0$, essendo: $w_{ki} = 0$, allora il calcolo del prodotto $w_{ki} w_{kj}$ è automaticamente nullo.

Il prodotto $(W^T R W)^{-1} r_i$ è calcolato al solito senza dover invertire la matrice $(W^T R W)$, perché essendo la matrice W triangolare e la matrice R diagonale è possibile eseguirlo mediante il noto procedimento di sostituzione prima all'indietro e poi in avanti. L'operazione di sostituzione all'indietro ed in avanti, come il prodotto di una matrice (quadrata e simmetrica, di cui si sia memorizzata ad elementi isolati solo la parte triangolare superiore) per un vettore, ad esempio il prodotto: $C p_i$, si esegue come per le matrici memorizzate a profilo. Si noti che, sia nella sostituzione all'indietro, sia nel sopraccitato prodotto con la parte triangolare superiore di una matrice quadrata e simmetrica, è utile cambiare l'ordine usuale di esecuzione dei calcoli, per evitare lunghe ricerche tabellari.

I vari passaggi del metodo ICCG si realizzano con la seguente struttura di dati :

- due tabelle per memorizzare ad elementi isolati le matrici C e W ;
- una tabella (n elementi) che contiene in successione il vettore d ed il vettore x_i (successive approssimazioni della soluzione);
- tre tabelle (n elementi) per i dati ausiliari.

La conoscenza di alcuni elementi delle matrici inverse di matrici normali di problemi minimi quadrati è spesso molto importante. Un algoritmo, appositamente studiato, permette di calcolare, anche se in modo approssimato, gli elementi più importanti della matrice inversa. L'idea deriva direttamente dalla fattorizzazione incompleta di Cholesky; pertanto il calcolo, in modo approssimato, degli elementi di una matrice inversa è fatto applicando una regola simile a quella adottata nella fattorizzazione incompleta di Cholesky. In pratica, si utilizzano le usuali formule di inversione di una matrice:

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{w_{ii} - \sum_{k=1+1}^n w_{ik} \gamma_{ik}}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{-\left(\sum_{k=i+1}^j w_{ik} \gamma_{kj} + \sum_{k=j+1}^n w_{ik} \gamma_{jk}\right)}{w_{ii}} \quad (j > i)$$

a partire dal fattore incompleto di Cholesky e facendo correre gli indici (i,j) , (i,k) , (k,j) , (j,k) solo sugli elementi non-nulli della matrice normale. Tutto ciò significa che tutti gli elementi γ_{ij} la cui posizione corrisponde ad elementi nulli della matrice normale, vengono arbitrariamente forzati a rimanere nulli. Si noti poi come una procedura conveniente per il calcolo di γ_{ij} è data dalle seguenti espressioni:

$$s_j := + w_{ik} \gamma_{kj} \quad k = i + 1, j$$

$$\gamma_{ij} = \frac{s_j - w_{ij} w_{jj} + \sum_{k=j}^n w_{ik} \gamma_{jk}}{w_{ii}} \quad (j > i)$$

In questo modo, tenuto conto del tipo di memorizzazione ad elementi isolati delle matrici, non sono necessari test per la ricerca degli elementi non-nulli. Infatti l'ordine con cui si effettua il calcolo coincide con l'ordine (per colonne fino all'elemento diagonale principale) della memorizzazione ad elementi isolati.

Un giudizio sulla buona approssimazione degli elementi, così calcolati, confrontati con i corrispondenti esatti, può essere formulato considerando le seguenti osservazioni:

- ❑ gli elementi delle matrici inverse contenuti nel profilo delle corrispondenti matrici normali possono essere calcolati trascurando tutti gli elementi delle matrici inverse non-contenuti nel profilo;
- ❑ le matrici inverse non possono essere calcolate in modo esatto usando il fattore incompleto di Cholesky;

Ciò nonostante pur passando dalla memorizzazione a profilo alla memorizzazione ad elementi isolati, una buona approssimazione delle matrici inverse è raggiunta, quando si ha una delle seguenti condizioni:

- ❑ la sparsità delle matrici normali è abbastanza regolare, cosicché gli elementi non-nulli incontrano solo se stessi nel corso dei calcoli;
- ❑ la dispersione degli elementi non-nulli dalla diagonale principale, dopo il riordino della numerazione delle incognite, è piccola, cosicché un relativamente piccolo numero di elementi è omissivo.

Infatti se gli elementi della matrice d'errore E sono molto piccoli, cosicché la stessa espressione, risolta rispetto a C ed invertita, può essere linearizzata:

$$C^{-1} = (W^T W - E)^{-1} \cong (W^T W)^{-1} - (W^T W)^{-1} E (W^T W)^{-1}$$

allora la seguente approssimazione:

$$C^{-1} = (W^T W)^{-1}$$

è buona e fornisce una risposta corretta al problema dato.

APPENDICE A – ALGORITMI DELLA REGOLARITA'

La possibilità di acquisire facilmente dati grigliati e di adottare modelli matematici costituiti da strutture regolari apre a nuovi e differenti algoritmi, per la soluzione grandi sistemi ed il calcolo di matrici inverse. Infatti con specifico riferimento a problemi geodetici e geomatici:

- ❑ sequenze temporali, come pure sezioni e profili (casi monodimensionali);
- ❑ mappe ed immagini (casi bidimensionali);
- ❑ oggetti e modelli 3D (casi tridimensionali);
- ❑ problemi spazio-temporali (casi dinamici),

possono presentare dati grigliati ed essere analizzati con strutture regolari. Tutto ciò estende la casistica, costituita da esempi tipo ed algoritmi appropriati; infatti:

- ❑ gli algoritmi diretti sono particolarmente indicati per le strutture reticolari;
- ❑ gli algoritmi iterativi per i seminati di punti, cioè per punti irregolarmente distribuiti;
- ❑ gli algoritmi per la regolarità servono solo per i grigliati di punti, cioè per punti regolarmente distribuiti.

L'esclusività è proprio strettamente necessaria: essi non possono essere impiegati per altri tipo di dati e, anche dati quasi grigliati, non possono essere trattati, con gli stessi, essendo solo seminati molto regolari.

D'altra parte, come risulterà evidente, in seguito, la regolarità offre indubbi vantaggi, tanto per l'occupazione di memoria, quanto per i tempi di calcolo, estendendo notevolmente le capacità computazionali, ovvero la gamma dei problemi praticamente computabili, cioè computabili con i mezzi informatici oggi disponibili.

L'algoritmo dei blocchi di Gauss risolve un sistema lineare, prendendo in considerazione una soluzione precedentemente acquisita, da un sottoinsieme di equazioni per un identico sottoinsieme di incognite, ed aggiornando la soluzione con nuova informazione, comunemente detta innovazione. Lo stesso metodo è capace di aggiornare anche la matrice inversa, da far corrispondere alla soluzione del sistema lineare dato. Le seguenti espressioni illustrano brevemente le principali caratteristiche dell'algoritmo, ovvero il sistema dato, la soluzione preliminare, l'aggiornamento della matrice inversa e l'aggiornamento delle soluzioni, entrambe calcolate dall'alto verso il basso:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{essendo:} \quad x_0 = A^{-1} \xi$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \alpha = A^{-1} + A^{-1}B(C - B^T A^{-1}B)^{-1}B^T A^{-1} = \\ \quad = A^{-1} + A^{-1}B\gamma B^T A^{-1} \\ \beta = -A^{-1}B(C - B^T A^{-1}B)^{-1} = -A^{-1}B\gamma \\ \gamma = (C - B^T A^{-1}B)^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}\xi + A^{-1}B(C - B^T A^{-1}B)^{-1}(B^T A^{-1}\xi - \eta) \\ -(C - B^T A^{-1}B)^{-1}(B^T A^{-1}\xi - \eta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1}\xi + A^{-1}B(C - B^T A^{-1}B)^{-1}(B^T A^{-1}\xi - \eta) \\ -(C - B^T A^{-1}B)^{-1}(B^T A^{-1}\xi - \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - A^{-1}B\gamma \\ -(C - B^T A^{-1}B)^{-1}(B^T x_0 - \eta) \end{pmatrix}$$

Le stesse espressioni sono riportate, nel prosieguo, per illustrare aggiornamenti, calcolati dal basso verso l'alto, con una perturbazione di rango uno:

$$\begin{pmatrix} 1 & b^T \\ b & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \quad \text{essendo:} \quad x_0 = C^{-1}\xi$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b^T \\ b & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta^T \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \alpha = 1/(1 - b^T C^{-1}b) \\ \beta = -C^{-1}b/(1 - b^T C^{-1}b) = -\alpha C^{-1}b \\ \gamma = (C^{-1} + C^{-1}bb^T C^{-1})/(1 - b^T C^{-1}b) = \\ \quad = C^{-1} + \alpha C^{-1}bb^T C^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta^T \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\eta - b^T C^{-1}\xi)/(1 - b^T C^{-1}b) \\ x_0 - C^{-1}b(\eta - b^T C^{-1}\xi)/(1 - b^T C^{-1}b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\eta - b^T x_0) \\ x_0 - C^{-1}b\gamma \end{pmatrix}$$

Il tipo di perturbazione è molto importante, perché il prodotto di uno scalare per una matrice (o un vettore) commutativo ed invertibile. Pertanto quest'ultima formulazione dei blocchi di Gauss è molto importante ed alla base degli algoritmi per la regolarità.

Le matrici di Toeplitz sono un particolare tipo di matrici simmetriche e definite positive, dove il valore di un qualsiasi elemento dipende dal valore assoluto della differenza, fra i suoi indici di riga e di colonna:

$$W = [\omega_{ij}] = [\varphi_{|i-j|}] \quad i, j = 1, n$$

La più importante proprietà di una matrice di Toeplitz è la forma della sua matrice inversa. Infatti la matrice inversa di una matrice di Toeplitz è perisimmetrica, cioè i suoi elementi non sono simmetrici solo lungo la diagonale principale: $\omega_{ij} = \omega_{ji} \quad \forall i, j$, (simmetria di Hermite), ma anche lungo la diagonale secondaria (disposta da in alto a destra ad in basso a sinistra): $\omega_{ij} = \omega_{n-j+1, n-i+1} \quad \forall i, j$, (perisimmetria di Wise).

Le matrici di Toeplitz sono utili per rappresentare matrici normali e matrici di covarianza per i problemi dei casi monodimensionali, mentre per i problemi dei casi bidimensionali e tridimensionali è necessario procedere preventivamente ad una loro opportuna decomposizione, in modo tale da ridursi al prodotto di due o tre matrici di Toeplitz. La suddetta decomposizione è data dalla decomposizione di Kronecker, basata sul prodotto di Kronecker che costituisce una generalizzazione del prodotto di uno scalare per una matrice (o un vettore):

$$(U \otimes V) = [u_{ij} V] = [u_{ij} [v_{kl}]] \quad i, j = 1, m \quad k, l = 1, n$$

La più importante proprietà del prodotto di Kronecker è l'applicazione della decomposizione di Kronecker anche alle matrici inverse:

$$(U \otimes V)^{-1} = U^{-1} \otimes V^{-1}$$

Ciò significa che un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti può essere decomposta secondo la decomposizione di Kronecker:

$$(U \otimes V)x = \vartheta \quad \text{ovvero:} \quad x = (U \otimes V)^{-1} \vartheta = U^{-1} \otimes V^{-1} \vartheta$$

può essere risolto in due passi:

$$y_i = V^{-1} \vartheta_i \quad i = 1, m$$

$$x_j = U^{-1} z_j \quad j = 1, n$$

I vettori: $z_j \quad j = 1, n$, contengono gli elementi di vettori intermedi: $y_i \quad i = 1, m$, dopo un riordino dei loro elementi secondo gli indici dei vettori stessi²⁹: $z_j = [y_{ij}] \quad i = 1, m \quad j = 1, n$.

In forma matriciale, la procedura ha le seguenti espressioni:

$$Y = V^{-1}\Theta \qquad X = U^{-1}Z$$

dove:

$$\begin{array}{lll} \Theta = [\vartheta_i] & Y = [y_i] & i = 1, m \\ Z = [z_j] & X = [x_j] & j = 1, n \end{array}$$

e l'operazione di trasposizione determina: $Z = Y^T$. Il prodotto di Kronecker è ovviamente associativo.

L'algoritmo di Trench fornisce un metodo efficiente per risolvere un sistema lineare e calcolare la matrice inversa di una matrice simmetrica e definita positiva, se la matrice del sistema è una matrice di Toeplitz. Un primo passo considera una matrice inversa, calcolata con l'algoritmo dei blocchi di Gauss, dall'alto verso il basso e dal basso verso l'alto, con una perturbazione di rango uno:

$$\begin{pmatrix} 1 & b^T \\ b & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta^T \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} P & t \\ t^T & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \tau \\ \tau^T & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

essendo: $p_{11} = 1$. Mantenendo la notazione precedente, le seguenti espressioni determinano le identità:

$$\begin{array}{ll} \alpha = 1/e & \sigma = 1/e \\ \beta = -f/e & \tau = -d/e \\ \gamma = G + ff^T/e & \rho = H + dd^T/e \end{array}$$

dove:

$$\begin{array}{ll} e = 1 - b^T C^{-1} b & e = s - t^T P^{-1} t \\ f = C^{-1} b & d = P^{-1} t \\ G = C^{-1} & H = P^{-1} \end{array}$$

²⁹ In pratica, il primo vettore riordinato è costituito da tutti i primi elementi dei vettori dati (disposti con lo stesso ordine di numerazione dei vettori stessi), il secondo vettore riordinato è costituito da tutti i secondi elementi dei vettori dati (analogamente disposti) e così via, fino all'ultimo vettore riordinato costituito da tutti gli ultimi elementi dei vettori dati (sempre analogamente disposti).

L'uguaglianza di α e σ deriva dalla proprietà di perisimmetria. Si noti poi come la stessa proprietà determina anche l'uguaglianza dei vettori β e τ (considerando il secondo dal basso verso l'alto), e dei vettori f e d (ancora considerando il secondo dal basso verso l'alto). Sempre la proprietà di perisimmetria determina l'uguaglianza delle matrici γ e ρ (dove i loro elementi sono comuni e considerando la seconda dal basso verso l'alto e da destra verso sinistra). Inoltre le matrici G e H sono uguali per l'unicità di una (data e fissata) matrice di Toeplitz di un dato ordine. L'unicità di α e ρ_{11} permette di scrivere la seguente identità:

$$1/e = h_{11} + d_1^2 / e$$

da cui si ricava:

$$e = (1 - d_1^2) / h_{11}$$

Si noti che d_1 è uguale a f_{n-1} , sempre per la proprietà di perisimmetria, mentre h_{11} è uguale a $1/e$ dell'iterazione precedente. Infatti l'algoritmo dei blocchi di Gauss è un algoritmo a passi che può essere ripetuto più volte, aumentando la dimensione del sistema, passo dopo passo.

Un secondo e conclusivo passo fornisce le regole per calcolare gli elementi del vettore d , lavorando solo con due vettori b e f , ed evitando di scrivere qualsiasi matrice. In questo caso, sempre l'algoritmo dei blocchi di Gauss permette di calcolare il primo elemento del vettore d e poi tutti i suoi altri elementi, aggiornando quelli calcolati nell'iterazione precedente. Pertanto la soluzione del sistema:

$$d = P^{-1}t$$

può essere suddivisa, come segue:

$$\begin{pmatrix} 1/e & -f^T/e \\ -f/e & G + ff^T/e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q - f^T r)/e \\ Gr - (q - f^T r)f/e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix}$$

dove:

$$d = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}$$

$$q = t_1 \qquad \varepsilon = d_1$$

da cui si ricava:

$$d_1 = (q - f^T r) / e$$

$$d_i = (Gr)_i - d_1 f_i \quad i = 2, n-1$$

Si noti ancora che gli elementi del vettore Gr sono gli elementi del vettore d calcolato nell'iterazione precedente. Inoltre grazie alla proprietà di perisimmetria, si possono stabilire le seguenti identità:

$$d_1 = f_{n-1} \qquad q = b_{n-1}$$

$$d_i = f_{n-i} \qquad r = b_{n-i} \qquad i = 2, n-1$$

Le seguenti espressioni presentano l'algoritmo di Trench, avendo sostituito la notazione prodotta applicando l'algoritmo dei blocchi di Gauss, dall'alto verso il basso, nelle espressioni appena ricavate:

$$f_l^{(l)} = \left(b_l - \sum_{i=1}^{l-1} f_i^{(l-1)} b_{l-i} \right) / e^{(l-1)}$$

$$f_i^{(l)} = f_i^{(l-1)} - f_l^{(l)} \cdot f_{l-i}^{(l-1)} \qquad i = 1, l-1 \quad ; \quad l = 2, n-1$$

$$e^{(l)} = (1 - f_l^{2(l)}) \cdot e^{(l-1)}$$

Queste espressioni sono direttamente operative e permettono di risolvere, a passi, un sistema lineare la cui corrispondente matrice sia una matrice di Toeplitz. Al primo passo, l'algoritmo si avvia ponendo le condizioni:

$$e^{(1)} = 1 \qquad f_1^{(1)} = b_1$$

La soluzione del sistema è ottenuta applicando l'algoritmo dei blocchi di Gauss, dal basso verso l'alto, prendo in considerazione, ad ogni passo, i risultati ottenuti con l'algoritmo di Trench:

$$\begin{pmatrix} 1 & b^T \\ b & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\eta - b^T x_0) \\ x_0 - C^{-1} b y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\eta - b^T x_0) / e \\ x_0 - f y \end{pmatrix}$$

Al primo passo, il sistema lineare è costituito solo un'equazione in un'incognita e, essendo: $p_{11} = 1$, risulta ovviamente: $y = \eta$, dove η è l'ultimo elemento del termine noto del sistema lineare (ovvero del termine noto normale per i problemi ai minimi quadrati).

Il sistema è così risolto, passo dopo passo, prendendo in considerazione equazioni ed incognite, rispettivamente, dal basso verso l'alto e da destra verso sinistra. In ogni caso, l'incognita y costituisce un nuovo elemento (ed ovviamente il primo, al primo passo) che si aggiunge alla testa del vettore x_0 ³⁰.

Al termine dell'algoritmo, può essere calcolata anche la matrice inversa della matrice di Toeplitz. Infatti prendendo in considerazione l'algoritmo dei blocchi di Gauss, dall'alto verso il basso e dal basso verso l'alto, gli elementi della matrice inversa della matrice di Toeplitz hanno espressione:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= g_{ij} + f_i f_j / e & i, j &= 1, n-1 \\ \rho_{ij} &= h_{ij} + d_i d_j / e & i, j &= 1, n-1 \end{aligned}$$

Dopodiché sostituendo, nella seconda espressione, la notazione prodotta applicando l'algoritmo dei blocchi di Gauss (tenuto conto della sopraccitata uguaglianza fra G e H), dal basso verso l'alto, ovvero:

$$\gamma_{i-1, j-1} = g_{ij} + f_{n-i} f_{n-j} / e \quad \forall i, j$$

ed uguagliando, elemento ad elemento, si ha:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{i-1, j-1} + (f_i f_j - f_{n-i} f_{n-j}) / e \quad \forall i, j$$

Pertanto la matrice inversa della matrice di Toeplitz può essere facilmente calcolata, come segue:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \alpha = 1 / e \\ \psi_{1,i} &= \beta_{i-1} = -f_{i-1} / e & i &= 2, n \\ \psi_{ij} &= \gamma_{i-1, j-1} = \psi_{i-1, j-1} + (f_{i-1} f_{j-1} - f_{n-i+1} f_{n-j+1}) / e & i, j &= 2, n \end{aligned}$$

Si noti che le stesse espressioni permettono il calcolo della sola diagonale principale, evitando il calcolo di qualsiasi elemento fuori-diagonale:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1 / e \\ \omega_i &= \omega_{i-1} + (f_{i-1}^2 - f_{n-i+1}^2) / e & i &= 2, n \end{aligned}$$

³⁰ Al secondo passo, la soluzione di un sistema di due equazioni in due incognite coincide con la nota soluzione alla Kramer, ovvero con l'avvio dell'algoritmo dei blocchi di Gauss, dal basso verso l'alto:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\eta - f_1^{(1)} \xi_n) / e \\ (-f_1^{(1)} \eta + \xi_n) / e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\eta - b_1 x_0) / e \\ x_0 - f_1^{(1)} y \end{pmatrix} \quad e = 1 - f_1^{(1)2}$$

L'algoritmo di Trench non presenta difficoltà computazionali e, ad ogni passo, richiede due prodotti scalari:

$$\sum_{i=1}^{l-1} f_i^{(l-1)} b_{l-i} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{l-1} b_i x_{0_{n-i+1}}^{(l-1)}$$

Queste sommatorie possono essere accorciate, se gli elementi del vettore b sono tutti identicamente nulli, tranne un piccolo gruppo vicino alla diagonale principale. Allora essendo λ il numero di elementi non-nulli del vettore b , si omettono tutti i prodotti identicamente nulli e pertanto i suddetti prodotti scalari diventano:

$$\sum_{i=\max(1, l-\lambda+1)}^{l-1} f_i^{(l-1)} b_{l-i} \quad \sum_{i=1}^{\max(l-1, l-\lambda+1)} b_i x_{0_{n-i+1}}^{(l-1)} \quad 31$$

L'algoritmo di Trench richiede un numero di operazioni dell'ordine di n^2 , invece di n^3 , come per gli algoritmi diretti, essendo n la dimensione della matrice di Toeplitz. Infatti ad ogni passo, il calcolo degli elementi del vettore f richiede un solo prodotto scalare. In effetti, un secondo prodotto scalare è necessario per il calcolo della soluzione. Inoltre nel caso in cui sono solo λ gli elementi del vettore b , allora il numero di operazioni necessarie si riduce ulteriormente a $n\lambda$, essendo invece $n\lambda^2$ il numero di quelle richieste dagli algoritmi diretti capaci di operare con matrice memorizzate in forma compatta. Infine ricordando i vantaggi, dati dalla decomposizione di Kronecker, i problemi bidimensionali e tridimensionali, se decomposti con matrici di Toeplitz, possono essere risolti applicando due o tre volte l'algoritmo di Trench. Infatti se può essere applicata la decomposizione di Kronecker, il prodotto di due o tre matrici di Toeplitz rappresenta la generalizzazione della stessa a due e tre dimensioni. Allora il numero di operazioni necessarie diventa: $2n^2$ o $3n^2$, per matrici piene, e $2n\lambda$ o $3n\lambda$, per matrici memorizzate in forma compatta.

³¹ Una matrice di Toeplitz può costituire una sottomatrice di una matrice più grande, senza una particolare struttura. Se la dimensione della matrice più grande non eccede di molto la dimensione della matrice di Toeplitz (per ragioni di complessità computazionale), allora il corrispondente sistema lineare può essere facilmente risolto con l'algoritmo dei blocchi di Gauss, dall'alto verso il basso, prendendo in considerazione la sottomatrice di Toeplitz. Allo scopo, si consideri il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

dove essendo A una matrice di Toeplitz, l'algoritmo di Trench bene si presta quanto ad essa relativo. Un interessante caso particolare è costituito da una matrice B i cui coefficienti siano tutti identicamente uguali ad uno: $b_{ij} = 1 \quad \forall i, j$. Ciò significa che tutte le nuove incognite y sono tutte legate, allo stesso modo, con le altre incognite del sistema lineare la cui matrice dei coefficienti è una matrice di Toeplitz. In questo caso, le usuali espressioni dell'algoritmo dei blocchi di Gauss, dall'alto verso il basso, diventano:

$$A^{-1}B = \left[\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \right] \quad B^T A^{-1}B = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \right]$$

dove α sono gli elementi della matrice A^{-1} che può essere calcolata (ma non memorizzata) con le sopraccitate espressioni per il calcolo della matrice inversa della matrice di Toeplitz.

APPENDICE B – SOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI E CALCOLO DI MATRICI INVERSE

Un semplice esempio numerico è dato dalla seguente matrice quadrata, simmetrica e definita positiva, affiancata da un vettore di termini noti:

$$C = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.1 \\ & 1.0 & 0.5 \\ \text{sim.} & & 1.0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

che, con un determinante pari a 0,54, fornisce la seguente soluzione: $x^t = [3.06 \quad -2.5 \quad 1.94]$; dopodiché la matrice inversa C^{-1} e le radici quadrate del vettore della sua diagonale principale σ risultano:

$$C^{-1} = \frac{1}{0.54} \begin{bmatrix} 0.75 & -0.45 & 0.15 \\ & 0.99 & -0.45 \\ \text{sim.} & & 0.75 \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} 1.18 \\ 1.35 \\ 1.18 \end{bmatrix}$$

La stessa soluzione, corredata dalla matrice inversa, è ottenuta facendo uso del **metodo diretto di Cholesky**. Di seguito, è calcolato il fattore triangolare superiore di Cholesky T e la soluzione x , preceduta da un vettore di servizio y (ottenuto dopo una sostituzione in avanti, come noto, essendo poi la suddetta soluzione ottenuta dopo anche una sostituzione all'indietro):

$$T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.86 & 0.52 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.16 \\ 1.62 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 3.06 \\ -2.5 \\ 1.94 \end{bmatrix}$$

Dopodiché la matrice inversa C^{-1} e le radici quadrate σ del vettore della sua diagonale principale risultano:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1.39 & -0.84 & 0.28 \\ & 1.85 & -0.84 \\ \text{sim.} & & 1.39 \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} 1.18 \\ 1.35 \\ 1.18 \end{bmatrix}$$

La stessa soluzione è poi ottenuta facendo uso del **metodo iterativo del gradiente coniugato**. Di seguito, sono calcolati i tre passi del metodo, ogni volta, presentando il vettore dei residui r , quello dei proiettori p e la soluzione x , completate da due scalari di servizio α e β , necessari per il prosieguo dell'algorithm:

$$r_1 = p_1 = -d = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_1 = 0.92 \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1.84 \\ 0 \\ 0.92 \end{bmatrix} \quad \beta_1 = 0.38$$

$$\begin{array}{ccccc}
r_2 = \begin{bmatrix} 0.07 \\ -1.38 \\ -0.10 \end{bmatrix} & p_2 = \begin{bmatrix} 0.83 \\ -1.38 \\ 0.28 \end{bmatrix} & \alpha_2 = 1.03 & x_2 = \begin{bmatrix} 3.19 \\ -2.25 \\ 1.38 \end{bmatrix} & \beta_2 = 0.12 \\
r_3 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.04 \\ 0.44 \end{bmatrix} & p_3 = \begin{bmatrix} -0.11 \\ -0.21 \\ 0.47 \end{bmatrix} & \alpha_3 = 1.26 & x_3 = \begin{bmatrix} 3.06 \\ -2.50 \\ 1.94 \end{bmatrix} &
\end{array}$$

Si osservi come la dimensione della matrice data, estremamente ridotta, non permetta di mettere in evidenza i vantaggi di un preconditionamento del sistema dato, né di confrontare la matrice inversa approssimata \tilde{C}^{-1} (calcolata a partire dal fattore triangolare superiore approssimato di Cholesky \tilde{T}) con la matrice inversa (esatta), già calcolata.

La stessa soluzione, ancora corredata dalla matrice inversa, è infine ottenuta osservando che la matrice data è una **matrice di Toeplitz**, essendo gli elementi di tutte le sue diagonali uguali tra loro. Allora l'**algoritmo per strutture matriciali regolari di Trench** fornisce la soluzione più celermente, calcolando ad ogni passo, l'elemento innovazione $f_i^{(l)}$ di un vettore di servizio che permette il calcolo della soluzione, l'aggiornamento di tutti gli altri elementi $f_i^{(l)}$ dello stesso vettore ed uno scalare per l'evoluzione dal passo corrente al passo successivo $e^{(l+1)}$.

L'algoritmo richiede che la diagonale principale sia composta da numeri 1; tuttavia è agevole ottenere tale condizione, dividendo tutti gli elementi della matrice data per gli elementi della diagonale principale e ricordando, a posteriori, la divisione effettuata. Inoltre l'algoritmo può partire dalla soluzione di Kramer di un sistema di due equazioni in due incognite: $x_2 = -0.66$ e $x_3 = -1.33$, essendo allora: $e^{(1)} = \det^{(2)} = 0.75$, come pure: $f_1^{(1)} = b_1 = 0.5$. Pertanto la seguente inizializzazione: $b^t = [0.5 \quad 0.1]$, ricavata dalla matrice data, permette di passare al passo successivo dell'algoritmo:

$$f_2^{(2)} = -0.2 \quad f_1^{(2)} = 0.6 \quad e^{(2)} = 0.72$$

e di ricavare la stessa soluzione del sistema dato:

$$x_1 = 3.06 \quad x_2 = -2.5 \quad x_3 = 1.94$$

Dopodiché gli elementi del vettore della diagonale principale σ^2 della matrice inversa risultano:

$$\sigma_1^2 = 1.39 \quad \sigma_2^2 = 1.85$$

ricordando che si ha: $\sigma_3^2 = \sigma_1^2$, perché la matrice inversa di una matrice di Toeplitz è una matrice perisimmetrica, ovvero simmetrica anche rispetto alla sua diagonale secondaria.

PARTE III – GLI ALGORITMI SEQUENZIALI

1. Generalità³²

Il calcolo della soluzione di grandi sistemi è un'operazione computazionalmente lunga e complessa; pertanto ogni qualvolta occorre calcolarne una modifica è opportuno procedere in modo sequenziale, ovvero modificare la soluzione già ottenuta in precedenza, invece di ripetere ex-novo il calcolo della soluzione.

Alcune varianti degli algoritmi di Householder, di Givens e di Cholesky consentono il calcolo sequenziale della soluzione, ovvero di aggiungere o togliere da essa una o più equazioni alle misure oppure una o più incognite. Queste operazioni sono utili, ad es., rispettivamente, per l'eliminazione delle equazioni alle misure corrispondenti ad osservazioni affette da errori grossolani e per l'aggiornamento nel modello funzionale dei parametri (aggiuntivi) incogniti correttivi di alcuni errori sistematici o pseudo-sistematici, la cui presenza si sospetta nell'insieme delle misure, in base alla pratica sperimentale. Inoltre l'adeguata applicazione di un noto teorema dell'algebra delle matrici consente il calcolo sequenziale della matrice di varianza-covarianza delle incognite.

Si osservi poi che una variazione del peso di un'equazione alle misure, come nella stima contemporanea delle incognite e dei pesi delle quantità osservate (effettuata con stime di tipo Helmert, ovvero con un algoritmo iterativo detto di riproduzione dei pesi) e nei problemi di ottimizzazione dei pesi delle quantità osservate, altrimenti detti di secondo ordine (SOD), corrisponde all'aggiungere o al togliere un'equazione alle misure, pesata tanto quanto l'aumento o la diminuzione di peso che si deve apportare. Per quanto riguarda invece i problemi di ottimizzazione dello schema di misura, altrimenti detti di primo ordine (FOD), se eseguiti iterativamente per mezzo dell'ottimizzazione di secondo ordine con arresto in base al controllo sull'affidabilità delle quantità osservate, questi comportano di aggiungere o di togliere un'equazione alle misure. Sempre una variazione del peso di un'equazione alle misure si presenta con l'uso di procedure robuste (quali la minima somma dei moduli, oppure i criteri di Huber o di Hampel), dove il calcolo della soluzione è ottenuto tramite la ripetizione ripesata di una compensazione minimi quadrati.

Ancora le stesse operazioni sono utili nei problemi in cui occorre aggiungere o togliere un punto e tutte le misure che lo determinano, oppure aggiungere o togliere un insieme di punti in un diverso sistema di riferimento e anche le misure relative a tutti i punti ivi compresi. In caso di introduzione, dapprima si aggiungono al sistema, equazione per equazione, tutti i coefficienti delle nuove equazioni relativi alle vecchie incognite e successivamente si aggiungono al sistema così modificato, un'incognita alla volta, tutti i coefficienti sempre delle nuove equazioni relative alle nuove incognite. Invece in caso di esclusione, dapprima si tolgono dal sistema, una incognita alla volta, tutti i coefficienti delle equazioni da eliminare relativi alle incognite da eliminare e successivamente si tolgono dal sistema così modificato, equazione per equazione, tutti i coefficienti delle equazioni da eliminare relativi alle incognite da conservare.

³² Questo paragrafo ed i seguenti contengono una versione riveduta e corretta dell'articolo: Barbarella M., Mussio L. (1989) Algoritmi esatti sequenziali per la modifica della soluzione di grandi sistemi. In: F. Sansò (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 5. CLUP, Milano, p. 171-194, a sua volta, ripreso nell'articolo: Bellone T., Mussio L. (1994) Algoritmi esatti sequenziali. In: F. Crosilla, L. Mussio (Ed's) *Metodi e procedure avanzate di modellizzazione e trattamento dei dati GPS*. CISM, Udine, p. 67-109.

Infine per l'interpolazione ad elementi finiti di un campione di dati con un insieme di funzioni splines specializzate rispettivamente per trattare i dati di una serie temporale (o altro campione monodimensionale) oppure quelli di un lattice a supporto territoriale o spaziale, nel caso in cui passi e finestre siano variabili da zona a zona, si opera pure sequenzialmente. In questo caso, tramite l'analisi di varianza (confronto fra la varianza spiegata e la varianza residua), si procede al campionamento progressivo, cioè all'acquisizione di nuove osservazioni, nelle zone dove l'approssimazione non è accettabile, mentre si procede al campionamento selettivo, cioè al diradamento delle osservazioni, nelle zone dove l'approssimazione è più che accettabile; questo approccio è particolarmente indicato con l'impiego di tecniche avanzate multirisoluzione e multilivello.

Gli algoritmi, esposti nel seguito, sono predisposti per aggiungere o per togliere, ogni volta, una sola equazione alle misure o una sola incognita; pertanto nel caso in cui si devono aggiungere o togliere più equazioni alle misure o più incognite, occorre ripetere l'applicazione di ciascun algoritmo richiesto tante volte quante sono le equazioni alle misure o le incognite da aggiungere o togliere.

Il vantaggio dell'uso di questi algoritmi consiste nella possibilità di modificare con essi i risultati già ottenuti con un numero di operazioni dell'ordine di n^2 , anziché n^3 , come si avrebbe utilizzando gli algoritmi di base, essendo n il numero delle incognite. Si noti perciò che anche l'aggiungere o il togliere più (poche) equazioni alle misure o più (poche) incognite è ancora un'operazione abbastanza sollecita; si ha infatti $kn^2 \ll n^3$ con k piccolo, essendo k il numero di equazioni alle misure o di incognite da aggiungere o da togliere.

La ragione dell'esposizione a parte di questi algoritmi sequenziali, rispetto agli algoritmi di base da cui discendono, sta nel fatto che, come appena osservato, ben differenti sono le finalità del loro utilizzo. Infatti mentre dal punto di vista dei metodi di calcolo numerico il capitolo algoritmi diretti deve considerarsi unico, dal punto di vista della loro applicazione, nello specifico, alle scienze geodetiche e geomatiche, una cosa è la compensazione minimi quadrati di un grande numero di osservazioni ed un'altra è l'eliminazione degli errori grossolani o la correzione degli errori sistematici o pseudo-sistematici e così via. Pertanto poiché come è evidente, si tratta di problematiche distinte, esporre insieme gli algoritmi di base e gli algoritmi sequenziali avrebbe contribuito a confondere anziché a chiarire.

2. L'algoritmo di Householder

Innanzitutto conviene richiamare l'algoritmo di base di Householder, in quanto da esso è pressoché immediato derivare l'algoritmo sequenziale di Householder e, da quest'ultimo, è abbastanza agevole ricavare l'algoritmo sequenziale di Cholesky. Si consideri, allo scopo, il sistema di equazioni alle misure (equiponderate), da risolvere con l'algoritmo di Householder³³, unitamente al principio dei minimi quadrati:

³³ Sull'algoritmo di base di Householder si veda anche: Benciolini G.B., Mussio L. (1984) Algoritmi esatti per la soluzione di grandi sistemi. In: M. Cuniatti (Ed) *Ricerche di Geodesia Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 5-46, da cui è liberamente tratta la seguente definizione.

Si chiama trasformazione unitaria di Householder la trasformazione rappresentata dalla matrice ortonormale $Q(m,m)$, avente forma:

$$Q = I - \frac{2hh^T}{h^T h}$$

$$Ax + b = v$$

$$v^T v = \min$$

dove, dato un vettore f di m elementi, moltiplicando lo stesso a sinistra per la suddetta matrice, si ottengono i vettori g e h sempre di m elementi: $g = Qf$, e: $h = f - g$, tali che:

$$g = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{l-1} \\ -\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e.} \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_l - \alpha \\ f_{l+1} \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

avendo posto:

$$\alpha = \text{sign}(f_l) \sqrt{\sum_{k=l}^m f_k^2} \quad \text{dove:} \quad \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che Q è ortonormale ed opera la trasformazione richiesta. Infatti essendo Q simmetrica, si ha:

$$Q^T Q = Q^2 = \left(I - \frac{2hh^T}{h^T h} \right) \left(I - \frac{2hh^T}{h^T h} \right) = I - \frac{2hh^T}{h^T h} - \frac{2hh^T}{h^T h} + \frac{4hh^T hh^T}{h^T h h^T h} = I$$

Eseguendo poi il prodotto Qf , essendo: $g^T g = \sum_{i=1}^{l-1} f_i^2 + \alpha^2 = \sum_{i=1}^{l-1} f_i^2 + \sum_{i=1}^m f_i^2 = f^T f$, si verifica:

$$\begin{aligned} Qf &= \left(I - \frac{2hh^T}{h^T h} \right) f = f - \frac{2}{(f-g)^T (f-g)} (f-g)(f-g)^T f = f - \frac{2}{f^T f + g^T g - f^T g - g^T f} (f-g)(f^T f - g^T f) = \\ &= f - \frac{2}{2(f^T f - g^T f)} (f-g)(f^T f - g^T f) = f - (f-g) = g \end{aligned}$$

Si consideri ora il seguente problema:

- dati i vettori f (qualsiasi) e g (nella forma sopraccitata) e la matrice ortogonale Q già definita in precedenza, tale che: $g = Qf$;
- dato inoltre un insieme arbitrario di vettori $r^{(i)}$, $i=1 \dots n$,

si vogliono calcolare i vettori $s^{(i)}$ risultanti dai prodotti: $s^{(i)} = Q r^{(i)}$. Questo problema è risolto riferendosi proprio alla trasformazione di Householder. Si osservi innanzitutto che la matrice Q è diagonale a blocchi ed il suo primo blocco diagonale principale, di dimensione $(l-1, l-1)$, è la matrice identità, e pertanto si ha: $h_j = f_j - g_j = 0$, con $j=1 \dots l-1$, da cui risulta:

$$s_j^{(i)} = r_j^{(i)} \quad j=1 \dots l-1$$

Inoltre essendo: $g=0$, con $j=l+1 \dots n$, si ha anche:

$$s_j^{(i)} = 0 \quad j=i+1 \dots n$$

mentre l'elemento di posto i ha espressione:

$$s_i^{(i)} = -\text{sign}(r_i^{(i)}) \sqrt{\sum_{k=i}^m r_k^{(i)2}}$$

Si osservi poi come si possono calcolare i vettori $s^{(i)}$, senza costruire la matrice Q , perché essa è funzione di f e, in particolare, di f_j con $j=i \dots m$.

Moltiplicando a sinistra il sistema dato per un'opportuna matrice ortogonale Q , questo si trasforma nel sistema:

$$QAx + Qb = Qv$$

cioè:

$$Ux + z = w$$

dove U è una matrice avente elementi in generale non-nulli solo in una sottomatrice triangolare superiore, di dimensione pari al numero delle incognite. Per una ben nota proprietà delle matrici ortogonali risulta:

$$w^T w = v^T v$$

e la soluzione a minimi quadrati del sistema trasformato è la stessa di quella di partenza. Infatti ricordando la definizione di matrice ortogonale, ovvero una matrice quadrata Q è ortogonale quando:

$$Q^T Q = I$$

e pertanto:

$$Q^T = Q^{-1}$$

proprio questa proprietà delle matrici ortogonali è utile nel problema appena esposto che può essere così sintetizzato: moltiplicando a sinistra il vettore degli scarti residui delle equazioni alle misure v per una matrice ortogonale Q , si ottiene un vettore w avente la medesima norma³⁴:

$$\|w\|^2 = w^T w = v^T Q^T Q v = v^T v = \|v\|^2$$

Le trasformazioni di A in U e di b in z si attuano in n passi, operando n trasformazioni elementari di Householder. Si pone inizialmente:

$$A^{(1)} = A$$

$$b^{(1)} = b$$

³⁴ Si chiama norma (euclidea) di un vettore v lo scalare $\sqrt{v^T v} = \sqrt{\sum_i v_i^2}$ indicata con il simbolo: $\|v\|$.

e si procede così per n passi, ottenendo alla fine:

$$A^{(n+1)} = U$$

$$b^{(n+1)} = z$$

Si forniscono, di seguito, le espressioni esplicite per il calcolo di $A^{(k+1)}$ e $b^{(k+1)}$. Si pone:

$$\alpha^{(k)} = \text{sign}(a_{kk}^{(k)}) \sqrt{\sum_{i=k}^m (a_{ik}^{(k)})^2} \quad 35$$

si ha poi:

$$\beta^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)} (\alpha^{(k)} + a_{kk}^{(k)})}$$

e si pone ancora:

$$\psi_j^{(k)} = \beta^{(k)} \left((\alpha^{(k)} + a_{kk}^{(k)}) \alpha_{kj}^{(k)} + \sum_{i=k+1}^m a_{ik}^{(k)} \alpha_{ij}^{(k)} \right) \quad j > k$$

$$\xi^{(k)} = \beta^{(k)} \left((\alpha^{(k)} + a_{kk}^{(k)}) b_k^{(k)} + \sum_{i=k+1}^m a_{ik}^{(k)} b_i^{(k)} \right)$$

ottenendo le espressioni dei coefficienti cercati:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} \quad \forall i, \quad j < k$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} \quad i < k, \quad j \geq k$$

$$a_{kk}^{(k+1)} = -\alpha^{(k)}$$

$$a_{ik}^{(k+1)} = 0 \quad i > k$$

$$a_{kj}^{(k+1)} = a_{kj}^{(k)} - (\alpha^{(k)} + a_{kk}^{(k)}) \psi_j^{(k)} \quad j > k$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} \psi_j^{(k)} \quad i > k, \quad j > k$$

³⁵ $\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} \quad i < k$$

$$b_k^{(k+1)} = b_k^{(k)} - (\alpha^{(k)} + a_{kk}^{(k)}) \xi^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} \xi^{(k)} \quad i > k$$

Sia data ora un'equazione alle misure da aggiungere o togliere ad un sistema di m equazioni in n incognite, già risolto in precedenza, ad es., con una trasformazione ortogonale di Householder. Si dispongono tutti i coefficienti dell'equazione data nella riga $m+1$ della matrice disegno A ed il termine noto della stessa equazione è collocato nell'elemento $m+1$ dal vettore termine noto b del sistema.

L'applicazione alla riga $m+1$ della trasformazione ortogonale di Householder, secondo lo schema appena presentato, consente il calcolo sequenziale della matrice dei coefficienti del sistema trasformato:

$$\alpha^{(k)} = \text{sign}(a_{kk}) \sqrt{a_{kk}^2 \pm (a_{(m+1)k}^{(k)})^2}$$

$$\beta^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)} + a_{kk}}$$

$$\psi_j^{(k)} = \beta^{(k)} ((\alpha^{(k)} + a_{kk}) a_{kj} \pm a_{(m+1)k}^{(k)} a_{(m+1)j}^{(k)}) \quad j > k$$

$$\xi^{(k)} = \beta^{(k)} ((\alpha^{(k)} + a_{kk}) b_k \pm a_{(m+1)k}^{(k)} b_{(m+1)}^{(k)})$$

$$a'_{kk} = -\alpha^{(k)}$$

$$a'_{(m+1)k} = 0$$

$$a'_{kj} = a_{kj} - (\alpha^{(k)} + a_{kk}) \psi_j^{(k)} \quad j > k$$

$$a'_{(m+1)j} = a_{(m+1)j} - a_{(m+1)k}^{(k)} \psi_j^{(k)} \quad j > k$$

$$b'_k = b_k - (\alpha^{(k)} + a_{kk}) \xi^{(k)}$$

$$b'_{(m+1)} = b_{(m+1)} - a_{(m+1)k}^{(k)} \xi^{(k)}$$

essendo:

$$a^{(1)}_{(m+1)j} = a_{(m+1)j} \quad \forall j$$

$$b^{(1)}_{(m+1)} = b_{(m+1)}$$

con $k = I, n$ e dove, in corrispondenza del doppio segno \pm , occorre utilizzare il primo o il secondo, rispettivamente, quando si vuole aggiungere o togliere un'equazione alle misure.

Terminata la modifica della matrice dei coefficienti e del termine noto del sistema trasformato, per ottenere la nuova soluzione occorre procedere, come quando si opera con l'algoritmo di base di Householder, alla soluzione di un sistema triangolare superiore eseguita, al solito, mediante la sostituzione all'indietro. Si noti invece che, quando si opera con l'algoritmo di base o sequenziale di Cholesky, la nuova soluzione si ottiene effettuando, una dopo l'altra, la sostituzione in avanti e quella all'indietro.

3. L'algoritmo di Givens

Un'alternativa vantaggiosa all'algoritmo di Householder è fornita dall'algoritmo di Givens. Infatti esso, sempre basandosi sull'applicazione al sistema dato di successive sequenze di trasformazioni elementari ortogonali, opera mediante rotazioni piane, anziché proiezioni e ribaltamenti, cosa che rende più semplice tutta la formulazione algoritmica. Pertanto dato un sistema di equazioni alle misure (equiponderate), unicamente al principio dei minimi quadrati:

$$Ax + b = v$$

$$v^T v = \min$$

moltiplicando a sinistra il sistema dato per un'opportuna matrice ortogonale Q , questo si trasforma nel sistema:

$$QAx + Qb = Qv$$

cioè:

$$Ux + z = w$$

dove U è una matrice avente elementi, in generale, non-nulli solo in una sottomatrice triangolare superiore, di dimensione pari al numero delle incognite. Ancora la sopraccitata nota proprietà delle matrici ortogonali fa sì che la soluzione a minimi quadrati del problema trasformato sia la stessa di quello di partenza.

Le trasformazioni di A in U e di b in z si attuano in $n + (m - n)$ passi, solo concettualmente diversi fra loro, a seconda che effettuino quelli del primo gruppo o quelli del secondo gruppo. Si pone, inizialmente:

$$A^{(1)} = A$$

$$b^{(1)} = b$$

e si procede per n passi, introducendo ad ogni passo insieme una nuova equazione ed una nuova incognita, opportunamente scelte per non incorrere in singolarità o, quantomeno, in malcondizionamenti, ottenendo alla fine la soluzione (isodeterminata) di una partizione minimale del problema dato:

$$A^{(n+1)} = U_0$$

$$b^{(n+1)} = z_0$$

Dopodiché si procede per altri $m-n$ passi, introducendo ad ogni passo solo una nuova equazione, senza alcun problema di scelta, ottenendo alla fine la soluzione (iperdeterminata) del problema a minimi quadrati:

$$A^{(m+1)} = U$$

$$b^{(m+1)} = z$$

Al generico passo k , si esegue una sequenza di trasformazioni elementari ortogonali (di Givens) la cui cardinalità vale, rispettivamente:

- nei primi n passi: $\frac{k(k-1)}{2} + (n-k+1)(k+1) + (k+1)$
- nei successivi $m-n$ passi: $\frac{n(n+1)}{2} + n$

operante ciascuna una rotazione piana:

$$R = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} c & s \\ -s & c \end{vmatrix}$$

dove:

$$c = \frac{a_{ii}^{(k,j)}}{r}$$

$$s = \frac{a_{ki}^{(k,i)}}{r}$$

$$r = \sqrt{(a_{ii}^{(k,i)})^2 + (a_{ki}^{(k,i)})^2}$$

e coinvolgendo, di volta in volta, solo quattro elementi alla volta:

- gli elementi pivotali della matrice $A^{(k)}$ di posizione: ii, ki ($i \leq k$)

□ gli elementi correnti della matrice $A^{(k)}$ di posizione: $ij, kj (j>i)$, oppure del vettore $b^{(k)}$ di posizione: i, k .

Si forniscono le espressioni esplicite per il calcolo di $A^{(k, i+1)}$ e $b^{(k, i+1)}$

$$a_{ii}^{(k, i+1)} = \sqrt{(a_{ii}^{(k, i)})^2 \pm (a_{ki}^{(k, i)})^2}$$

$$a_{ki}^{(k, i+1)} = 0$$

inoltre:

$$a_{ij}^{(k, i+1)} = \frac{a_{ii}^{(k, i)} a_{ij}^{(k, i)} \pm a_{ki}^{(k, i)} a_{kj}^{(k, i)}}{a_{ii}^{(k, i+1)}} \quad j > i$$

$$b_i^{(k, i+1)} = \frac{a_{ii}^{(k, i)} b_i^{(k, i)} \pm a_{ki}^{(k, i)} b_k^{(k, i)}}{a_{ii}^{(k, i+1)}}$$

$$a_{kj}^{(k, i+1)} = \frac{a_{kj}^{(k, i)} a_{ii}^{(k, i)} - a_{ki}^{(k, i)} a_{ij}^{(k, i)}}{a_{ii}^{(k, i+1)}} \quad j > i$$

$$b_k^{(k, i+1)} = \frac{b_k^{(k, i)} a_{ii}^{(k, i)} \pm a_{ki}^{(k, i)} b_i^{(k, i)}}{a_{ii}^{(k, i+1)}}$$

essendo:

$$a_{kj}^{(k, 1)} = a_{kj} \quad \forall j$$

$$b_k^{(k, 1)} = b_k$$

dove in corrispondenza del doppio segno: \pm , occorre utilizzare il primo o il secondo, rispettivamente, quando si vuole aggiungere o togliere un'equazione alle misure; nel qual caso il numero dei passi, varia a seconda del numero di eliminazioni e di eventuali reintroduzioni.

Terminata la modifica della matrice dei coefficienti e del termine noto del sistema trasformato, per ottenere la nuova soluzione occorre procedere alla soluzione di un sistema triangolare superiore eseguita, al solito, mediante la sostituzione all'indietro.

A commento della presentazione dell'algoritmo di Givens, resta da sottolineare come in esso non si distingua una versione di base da una versione sequenziale, essendo unica la trasformazione elementare ortogonale, eseguita in tutti i passi dell'algoritmo stesso. Inoltre come questo, attuati alcuni cambi di notazione, sia identico, non solo nella sostanza ma anche nella forma al successivo algoritmo sequenziale di Cholesky, ricavato invece, come già detto in precedenza, dall'algoritmo sequenziale di Householder.

4. L'algoritmo sequenziale di Cholesky (1ª parte)

Si osservi innanzitutto che la matrice triangolare superiore generata da una fattorizzazione di Cholesky T ed il triangolo superiore, a coefficienti non-nulli, della matrice dei coefficienti U del sistema trasformato con una trasformazione ortogonale di Householder sono del tutto identici (Fig. 3.1). Si ha infatti³⁶ :

$$T^T T = C = A^T A = U^T U$$

dove A è una matrice disegno, C una matrice normale e Q la matrice ortogonale che ha prodotto la trasformazione di Householder che, per l'unicità della fattorizzazione di Cholesky (a meno di un segno per ciascuna riga), prova quanto sopra affermato.

Così sostituendo l'espressione $\alpha^{(k)}$ nell'espressione a'_{kk} e calcolandone il valore assoluto³⁷, si ha subito l'espressione che fornisce la modifica degli elementi siti in diagonale principale di una matrice triangolare superiore, generata in precedenza eseguendo la fattorizzazione di Cholesky; inoltre l'annullamento del coefficiente $a_{(m+1)k}^{(k+1)}$ indica l'assegnazione a questo punto necessaria per l'elemento pivotale (i) del vettore

w :

$$t'_{ii} = -(-1)\sqrt{t_{ii}^2 \pm (w_i^{(i)})^2} = \sqrt{t_{ii}^2 \pm (w_i^{(i)})^2}$$

$$w_i^{(i+1)} = 0$$

avendo sostituito, nella simbologia, l'elemento a con l'elemento t e l'indice k con l'indice i ed essendo w un vettore di servizio, di dimensione n pari al numero delle incognite³⁸.

Infine per ottenere l'espressione che fornisce la modifica degli elementi siti fuori diagonale della stessa matrice triangolare superiore, basta utilizzare le espressioni $\psi_j^{(k)}$ e a'_{kj} , combinandole opportunamente fra loro e moltiplicando l'espressione trovata per -1 (corrispondentemente al calcolo del valore assoluto eseguito per gli elementi siti in diagonale principale), mentre utilizzando le espressioni $\psi_j^{(k)}$ e $a_{(m+1)j}^{(k+1)}$, opportunamente combinate fra loro, si ottiene l'espressione che fornisce la modifica degli elementi non-pivotali del vettore di servizio w , già definito in precedenza:

$$t'_{ij} = (-1) \left(t_{ij} - (\alpha^{(i)} + t_{ii}) \beta^{(i)} \left((\alpha^{(i)} + t_{ii}) t_{ij} \pm w_i^{(i)} w_j^{(i)} \right) \right) =$$

³⁶ Per semplicità di calcolo, si è supposto di effettuare la verifica avendo come matrice dei pesi la matrice identità; tuttavia questa assunzione non inficia la generalità dell'affermazione fatta, in quanto basta passare dalle equazioni alle misure alle stesse equiponderate.

³⁷ Si noti dalla prima espressione che, se a è positivo, anche α è positivo; pertanto per la seconda espressione a' è sempre negativo ed il calcolo del valore assoluto è sempre una moltiplicazione per -1 .

³⁸ Nelle seguenti espressioni i coefficienti del vettore w devono considerarsi già pesati.

$$\begin{aligned}
&= (-1) \left(t_{ij} - \frac{1}{\alpha^{(i)}} \left((\alpha^{(i)} + t_{ii}) t_{ij} \pm w_i^{(i)} w_j^{(i)} \right) \right) = \\
&= \frac{(-1) \left(-t_{ii} t_{ij} \mp w_i^{(i)} w_j^{(i)} \right)}{\alpha^{(i)}} = \\
&= \frac{t_{ii} t_{ij} \pm w_i^{(i)} w_j^{(i)}}{t'_{ii}} \qquad j > i
\end{aligned}$$

essendo:

$$\beta^{(i)} = \frac{1}{\alpha^{(i)} (\alpha^{(i)} + t_{ii})}$$

$$\alpha^{(i)} = \text{sign}(t_{ii}) \sqrt{t_{ii}^2 \pm (w_i^{(i)})^2} = t'_{ii}$$

inoltre:

$$\begin{aligned}
w_j^{(i+1)} &= w_j^{(i)} - w_i^{(i)} \beta^{(i)} (\alpha^{(i)} + t_{ii}) t_{ij} \pm w_i^{(i)} w_j^{(i)} = w_j^{(i)} - \frac{w_i^{(i)} t_{ij}}{\alpha^{(i)}} \mp \frac{(w_i^{(i)})^2 w_j^{(i)}}{\alpha^{(i)} (\alpha^{(i)} + t_{ii})} = \\
&= \left(w_j^{(i)} \alpha^{(i)} (\alpha^{(i)} + t_{ii}) - w_i^{(i)} t_{ij} (\alpha^{(i)} + t_{ii}) \mp \frac{(w_i^{(i)})^2 w_j^{(i)}}{\alpha^{(i)} (\alpha^{(i)} + t_{ii})} \right) = \\
&= w_j^{(i)} \left(t_{ii}^2 \pm (w_i^{(i)})^2 \right) + w_j^{(i)} \alpha^{(i)} t_{ii} - w_i^{(i)} t_{ij} (\alpha^{(i)} + t_{ii}) \mp \frac{(w_i^{(i)})^2 w_j^{(i)}}{\alpha^{(i)} (\alpha^{(i)} + t_{ii})} = \\
&= w_j^{(i)} t_{ii} (\alpha^{(i)} + t_{ii}) - \frac{w_i^{(i)} t_{ij} (\alpha^{(i)} + t_{ii})}{\alpha^{(i)} (\alpha^{(i)} + t_{ii})} = \frac{w_j^{(i)} t_{ii} - w_i^{(i)} t_{ij}}{t'_{ii}} \qquad j > i
\end{aligned}$$

Anche in questo caso si analizza l'algoritmo ponendo:

$$w_j^{(1)} = a_{(m+1)j} \quad \forall j$$

Terminata la modifica della matrice fattorizzata, come già detto in precedenza, la soluzione del sistema fornisce la nuova soluzione.

Si osservi che le espressioni appena fornite dell'algoritmo sequenziale di Cholesky operano su tutti gli elementi della matrice fattorizzata, come quelle dell'algoritmo di base di Cholesky, ma a differenza di quest'ultimo non contengono sommatorie, da cui si ha per il calcolo della modifica della soluzione un numero di operazioni dell'ordine di n^2 anziché di n^3 .

5. Lemma per l'inversione di una matrice

L'adeguata applicazione di un noto teorema dell'algebra delle matrici (cioè del lemma per l'inversione di una matrice di Faddejeva) consente il calcolo sequenziale della matrice di varianza–covarianza delle incognite, in corrispondenza all'aggiungere o al togliere un'equazione alle misure. Questo teorema viene dapprima enunciato in forma generale e successivamente particolarizzato per l'applicazione proposta (Fig. 3.2).

Siano date due Q, S quadrate e non–singolari ed inoltre due matrici R, T tali che sia possibile definire la seguente espressione:

$$Q \pm RST$$

Se anche la matrice risultante ed inoltre la matrice $(S^{-1} \pm TQ^{-1}R)$ sono matrici non–singolari allora vale il seguente teorema:

$$(Q \pm RST)^{-1} = Q^{-1} \mp Q^{-1}R (S^{-1} \pm TQ^{-1}R)^{-1} TQ^{-1}$$

che può essere facilmente dimostrato verificando che:

$$\begin{aligned} (Q \pm RST)(Q \pm RST)^{-1} &= (Q \pm RST)(Q^{-1} \mp Q^{-1}R (S^{-1} \pm TQ^{-1}R)^{-1} TQ^{-1}) = \\ &= QQ^{-1} \pm RSTQ^{-1} \mp QQ^{-1}R (S^{-1} \pm TQ^{-1}R)^{-1} TQ^{-1} - RSTQ^{-1}R (S^{-1} \pm TQ^{-1}R)^{-1} TQ^{-1} = \\ &= I \pm RSTQ^{-1} \mp RS (S^{-1} \pm TQ^{-1}R) (S^{-1} \pm TQ^{-1}R)^{-1} TQ^{-1} = \\ &= I \pm RSTQ^{-1} \mp RSTQ^{-1} = I \end{aligned}$$

Si noti che tutte le precauzioni prese per garantirsi della non–singolarità delle matrici sono proprio indispensabili, infatti il lemma per l'inversione di una matrice è valido se e solo se tutte le matrici di cui si richiede l'esistenza della matrice inversa sono non–singolari. Si osservi, a proposito, che l'insieme delle matrici quadrate Q , di una data dimensione, costituisce un anello e non un corpo, ovvero un gruppo rispetto all'operazione di somma (esiste sempre di ogni matrice la sua opposta $-Q$), ma solo un semigruppato rispetto alla operazione di prodotto, definito con il consueto prodotto matriciale righe per colonne (non esiste sempre di ogni matrice la sua inversa Q^{-1}).

Particolarizzando l'espressione del teorema, appena enunciato, con l'introduzione della matrice normale C , della matrice inversa C^{-1} , della riga $m+1$ della matrice disegno A isolata, per l'occasione, nel vettore riga a e del peso p corrispondente, si ottiene un'espressione che consente il calcolo sequenziale della matrice di varianza–covarianza delle incognite:

$$(C \pm a^T pa)^{-1} = C^{-1} \mp C^{-1}a^T (p^{-1} \pm aC^{-1}a^T)^{-1} aC^{-1}$$

Infatti, utilizzando un vettore di servizio e , si esegue dapprima la soluzione del sistema, al solito, mediante la sostituzione in avanti e all'indietro:

$$T^T T e = a^T$$

come si vedrà in seguito più conveniente del prodotto matriciale:

$$C^{-1} a^T = e$$

poi il prodotto scalare:

$$a e = f$$

ed infine, essendo:

$$g = \frac{1}{p} \pm f$$

il prodotto matriciale:

$$\frac{e e^T}{g} = H$$

Gli elementi della matrice H , addizionati o sottratti agli elementi della matrice inversa C^{-1} , ne forniscono la modifica richiesta.

Si osservi che le espressioni appena fornite per il lemma di inversione di una matrice operano su tutti gli elementi delle matrici fattorizzata ed inversa, ma non contengono sommatorie, fatta eccezione per il calcolo di un solo prodotto scalare, da cui si ha per il calcolo della modifica della matrice di varianza-covarianza delle incognite un numero di operazioni dell'ordine di n^2 anziché di n^3 .

6. L' algoritmo sequenziale di Cholesky (2^a parte)

Aggiungere o togliere un parametro (aggiuntivo) incognito significa aggiungere o togliere una colonna nella matrice disegno ed una riga e una colonna nella matrice normale. Per quanto riguarda la matrice fattorizzata, aggiungere un parametro (aggiuntivo) incognito non costituisce alcun problema. Infatti l'ultima colonna della matrice normale si aggiunge a tutte le altre senza modificarle affatto, come risulta evidente osservando che le usuali espressioni per la fattorizzazione di Cholesky sono eseguibili operando, una dopo l'altra, su tutte le colonne del triangolo superiore della matrice normale (Fig. 3.3.):

$$t_{ji} = \frac{c_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{jj}} \quad j < i$$

$$t_{ii} = \sqrt{c_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}$$

Sempre per quanto riguarda la matrice fattorizzata, togliere un parametro (aggiuntivo) incognito non modifica la matrice stessa fino alla riga il cui numero d'ordine corrisponde al numero d'ordine della colonna della matrice disegno da eliminare, come risulta evidente osservando che le usuali espressioni per la fattorizzazione di Cholesky contengono la sommatoria dei prodotti dei soli elementi della matrice fattorizzata di posizione più alta (numero d'ordine della riga più piccolo) della riga di volta in volta in esame.

Invece gli elementi della matrice fattorizzata di posizione più bassa (numero d'ordine della riga più grande) della riga il cui numero d'ordine corrisponde al numero d'ordine della colonna della matrice disegno da eliminare risultano modificati dal togliere un parametro (aggiuntivo) incognito. Per calcolarne la modifica, basta applicare a questo sistema triangolare l'algoritmo sequenziale di Householder ovvero, per le considerazioni fatte in precedenza, l'algoritmo sequenziale di Cholesky:

$$t'_{ij} = t_{ij} \quad i < h, \quad j \geq i$$

$$t'_{ii} = \sqrt{t_{ii}^2 + (w_i^{(i-h)})^2} \quad i > h$$

$$w_i^{(i-h+1)} = 0$$

$$t'_{ij} = \frac{(t_{ij} t_{ii} + w_i^{(i-h)} w_j^{(i-h)})}{t'_{ii}} \quad i > h, \quad j > i$$

$$w_j^{(i-h+1)} = \frac{w_j^{(i-h)} t_{ii} - w_i^{(i-h)} t_{ij}}{t'_{ii}} \quad j > i$$

dove:

$$w_j^{(1)} = t_{hj} \quad j > h$$

essendo h il numero d'ordine del parametro (aggiuntivo) incognito da togliere e w un vettore di servizio di dimensione n pari al numero delle incognite.

Si veda, invece, alla nota sull'utilizzo di algoritmi di riordino, per aggiungere un parametro (aggiuntivo) incognito, tenendo conto del numero d'ordine conferitogli dall'algoritmo di riordino, preliminarmente impiegato.

7. Blocchi di Gauss

L'adeguata applicazione della partizione di una matrice in blocchi (o sottomatrici) consente il calcolo sequenziale della matrice di varianza-covarianza delle incognite, in corrispondenza all'aggiungere o al togliere un parametro (aggiuntivo) incognito. Questa partizione viene dapprima esposta in forma generale e successivamente particolarizzata per l'applicazione proposta (Fig. 3.4). Sia data una matrice quadrata simmetrica e definita positiva³⁹, su questa matrice sia effettuata una partizione, in modo da evidenziare l'ultima riga, l'ultima colonna e l'ultimo elemento di entrambe, sito in diagonale principale:

$$\begin{vmatrix} C & r \\ r^T & s \end{vmatrix}$$

La matrice inversa di questa matrice:

$$\begin{vmatrix} \gamma & \rho \\ \rho^T & \sigma \end{vmatrix}$$

si ottiene eseguendo l'operazione di inversione con il procedimento dei blocchi di Gauss, riportato nel prosieguo:

$$\begin{vmatrix} C & r \\ r^T & s \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma & \rho \\ \rho^T & \sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} C\gamma + r\rho^T &= I \\ C\rho + r\sigma &= 0 \\ r^T\gamma + s\rho^T &= 0 \\ r^T\rho + s\sigma &= 1 \end{aligned}$$

da cui, risolvendo rispetto a γ, ρ, ρ^T e σ si ha:

$$\begin{aligned} \gamma &= C^{-1}(I - r\rho^T) \\ \rho &= -C^{-1}r\sigma \end{aligned}$$

³⁹ Si definisce matrice definita positiva una matrice quadrata Q che soddisfi le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} x^T Q x &\geq 0 & \forall x \\ x^T Q x &\geq 0 & \rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\rho^T = \frac{-r^T \gamma}{s}$$

$$\sigma = \frac{(1 - r^T \rho)}{s}$$

Dopodiché, sostituendo prima la quarta delle espressioni trovate nella seconda e risolvendo di nuovo rispetto a ρ :

$$\rho = - \left(C - \frac{rr^T}{s} \right)^{-1} \frac{r}{s}$$

e poi la seconda, così modificata, nella prima risulta:

$$\gamma = C^{-1} \left(I + \frac{rr^T}{s} \left(C - \frac{rr^T}{s} \right)^{-1} \right)$$

A questo punto, applicando il lemma per l'inversione di una matrice, già definito in precedenza, ovvero:

$$(Q \pm RST)^{-1} = Q^{-1} \mp Q^{-1}R (S^{-1} \pm TQ^{-1}R)^{-1} TQ^{-1}:$$

$$\left(C - \frac{rr^T}{s} \right)^{-1} = C^{-1} + \frac{C^{-1}rr^TC^{-1}}{s - r^TC^{-1}r}$$

si ottiene infine:

$$\gamma = C^{-1} + \frac{C^{-1}rr^TC^{-1}}{s} + \frac{C^{-1}rr^TC^{-1}}{s(s - r^TC^{-1}r)}$$

L'espressione appena trovata è di uso immediato per il calcolo della modifica della vecchia matrice di varianza-covarianza delle incognite C^{-1} , nella nuova matrice di varianza-covarianza delle incognite:

$$\begin{vmatrix} \gamma & \rho \\ \rho^T & \sigma \end{vmatrix}$$

in corrispondenza all'aggiungere un parametro (aggiuntivo) incognito.

Infatti utilizzando un vettore di servizio e , si esegue dapprima la soluzione del sistema, al solito mediante la sostituzione in avanti e all'indietro:

$$T^T T e = r$$

essendo T la matrice triangolare superiore ottenuta in precedenza eseguendo la fattorizzazione di Cholesky della matrice normale C , come si vedrà in seguito più conveniente del prodotto matriciale:

$$C^{-1} r = e$$

poi il prodotto scalare:

$$r^T e = f$$

ed infine i prodotti matriciali:

$$\frac{e e^T}{s} = G$$

$$\frac{e f e^T}{s(s-f)} = H$$

Gli elementi delle matrici G e H , addizionati agli elementi della vecchia matrice di varianza-covarianza delle incognite, ne forniscono la modifica richiesta:

$$\gamma = C^{-1} + G + H$$

L'ultima colonna (ovvero anche l'ultima riga, essendo ovviamente anche la nuova matrice di varianza-covarianza delle incognite simmetrica) e l'ultimo elemento di entrambe, sito in diagonale principale, sono facilmente calcolati come segue:

$$\begin{aligned} \rho &= -\left(C - \frac{r r^T}{s}\right)^{-1} \frac{r}{s} = \\ &= -C^{-1} \frac{r}{s} - \frac{C^{-1} r r^T C^{-1} r}{s s - r^T C^{-1} r} = \\ &= -\frac{e}{s} - \frac{e f}{s(s-f)} \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{1 - r^T \rho}{s}$$

Infine la stessa espressione, usata per il calcolo della modifica della matrice di varianza–covarianza delle incognite, in corrispondenza all'aggiungere un parametro (aggiuntivo) incognito, risolta rispetto a C^{-1} , è utile per il calcolo della modifica della matrice di varianza–covarianza delle incognite, in corrispondenza al togliere un parametro (aggiuntivo) incognito:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \gamma - \frac{C^{-1} r r^T C^{-1}}{s} - \frac{C^{-1} r r^T C^{-1} r r^T C^{-1}}{s(s - r^T C^{-1} r)} = \\ &= \gamma - \frac{e e^T}{s} - \frac{e f e^T}{s(s - f)} = \\ &= \gamma - G - H \end{aligned}$$

dove, come nel caso precedente, si ha ancora: $Ce = T^T T e = r$, $e: r^T e = f$. Si noti innanzitutto che l'espressione appena fornita di C^{-1} è solo apparentemente funzione di C^{-1} . Infatti l'espressione trovata non è iterativa, ma permette il calcolo esatto di C^{-1} , in quanto è sempre possibile calcolare invece del prodotto matriciale: $C^{-1} r = e$, la soluzione del sistema: $T^T T e = r$, essendo T la matrice triangolare superiore ottenuta in precedenza. eseguendo la fattorizzazione di Cholesky della matrice normale e (operazione indispensabile) già aggiornata, ad es., mediante l'algoritmo sequenziale di Cholesky.

Si osservi poi come, sempre nell'espressione di C^{-1} la posizione del parametro (aggiuntivo) incognito da togliere può essere qualsiasi in quanto, pre–e post–moltiplicando la matrice normale e la matrice inversa per un'opportuna matrice di scambio⁴⁰ è possibile portare all'ultima riga e all'ultima colonna la riga e la colonna corrispondenti al parametro (aggiuntivo) incognito da togliere:

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} I & 0 & 0 & C_{11} & r_1 & C_{12} \\ 0 & 0 & I & r_1^T & s & r_2^T \\ 0 & 1 & 0 & C_{12}^T & r_2 & C_{22} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc|ccc} I & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & r_1 \\ 0 & 0 & 1 & C_{12}^T & C_{22} & r_2 \\ 0 & I & 0 & r_1^T & r_2^T & s \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|ccc} C & r & & & & \\ r^T & s & & & & \end{array} \right|$$

Si noti infine che, per effettuare lo scambio, basta eseguire ogni prodotto matriciale e ogni soluzione del sistema, omettendo nella sommatoria tutti i prodotti relativi alla riga e alla colonna corrispondenti al parametro (aggiuntivo) incognito da togliere.

⁴⁰ Si chiama matrice di scambio una matrice, quadrata, non necessariamente simmetrica, ma sempre di rango pieno che, moltiplicata per se stessa, con il consueto prodotto (fra due matrici) righe per colonne, dà la matrice identità. Pertanto detta matrice è involutoria, cioè ha periodo due (come ad es., il numero -1 dell'algebra, le giaciture ed i moti da/di ribaltamento, rispettivamente, della geometria e della cinematica). Il prodotto fra una matrice di scambio S (a sinistra) ed un qualsiasi vettore x scambia, nel vettore risultante y , le componenti del vettore dato conformemente allo scambio definito dalla sopraccitata matrice, come ad es.:

$$S \underline{x} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underline{y} \quad \text{dove: } \dim(\underline{x}_2) = \dim(\underline{y}_3), \text{ e: } \dim(\underline{x}_3) = \dim(\underline{y}_2)$$

**Cholesky's sequential algorithm:
observations**

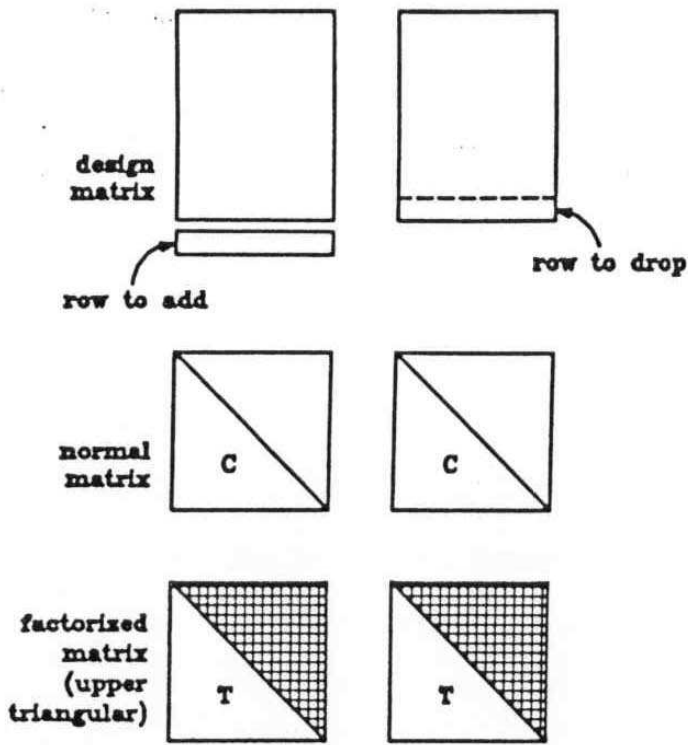


Fig. 3.1

**Faddejeva's theorem:
observations**

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C & a^T & p \\ \hline & \square & a \end{array} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{array}{c|c|c} C^{-1} & e & g^{-1} \\ \hline & \square & e^T \end{array}$$

where:

$$e: \begin{array}{c|c|c} T^T & T & e \\ \hline & & \square \end{array} = \begin{array}{c} a^T \\ \square \end{array}$$

$$f: \begin{array}{c|c} a & e \\ \hline & \square \end{array} = \begin{array}{c} f \\ \square \end{array}$$

$$g^{-1}: \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} p^{-1} \\ \square \end{array} \pm \begin{array}{c} f \\ \square \end{array}$$

Fig. 3.2

**Cholesky's sequential algorithm:
parameters**

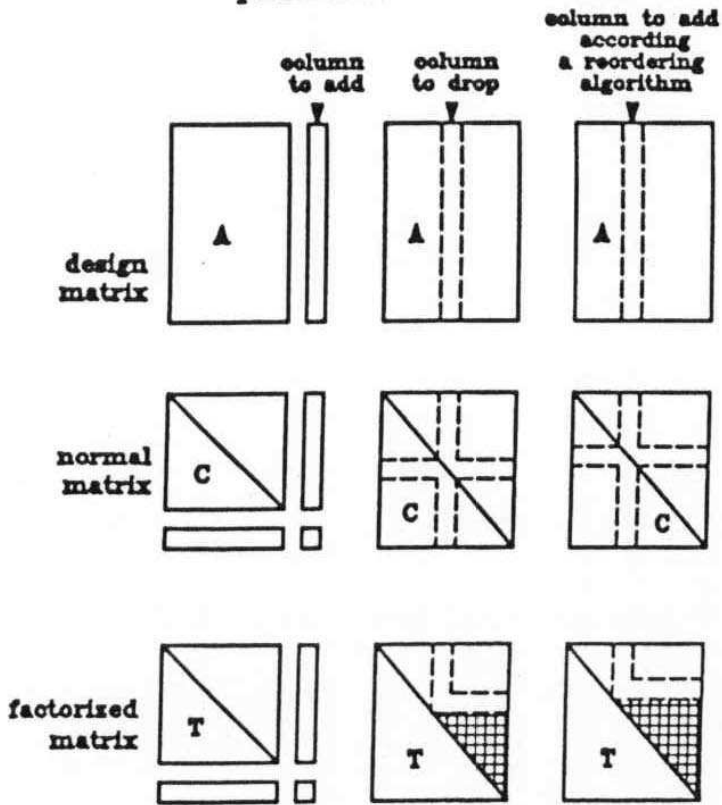


Fig. 3.3

**Faddejeva's theorem:
parameters**

$$\begin{aligned}
 \gamma &= C^{-1} + C^{-1} \begin{bmatrix} r \\ \vdots \end{bmatrix} s^{-1} r^T C^{-1} + \\
 &+ C^{-1} \begin{bmatrix} r \\ \vdots \end{bmatrix} \left(s + \begin{bmatrix} r^T \\ \vdots \end{bmatrix} C^{-1} \begin{bmatrix} r \\ \vdots \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r^T \\ \vdots \end{bmatrix} C^{-1} \\
 \rho &= - s^{-1} \begin{bmatrix} r \\ \vdots \end{bmatrix} \gamma \\
 \sigma &= s^{-1} \left(1 - \begin{bmatrix} r^T \\ \vdots \end{bmatrix} \rho \right) \\
 \text{notice: } C^{-1} &= \gamma - \dots
 \end{aligned}$$

Fig. 3.4

8. Nota sull'utilizzo di memorizzazioni compatte⁴¹

L'utilizzo di memorizzazioni compatte richiede sempre l'introduzione di liste e/o tabelle di indicatori, contatori e puntatori⁴², atti a conservare l'informazione relativa alla posizione (in termini di riga e/o colonna) degli elementi non-nulli delle matrici memorizzate in forma compatta. Tuttavia prima di affrontare il problema delle memorizzazioni compatte, è bene osservare come una struttura a puntatori sia necessaria già per gli algoritmi diretti sequenziali operanti con matrici piene. Infatti con specifico riferimento, ai quattro casi: aggiungere o togliere un'equazione alle misure o un parametro (aggiuntivo) incognito, già illustrati in precedenza:

- ❑ un puntatore diritto segnala all'ultimo posto operativo (al primo posto non-operativo) l'equazione o l'incognita già non-operativa (già operativa) da aggiungere (togliere);
- ❑ un puntatore rovescio tiene memoria della posizione originaria, nel sistema dato, di detta equazione o della incognita cosicché questa sia sempre identificata.

L'insieme dei puntatori diritti e rovesci delle equazioni e delle incognite formano quattro liste di dimensioni pari, rispettivamente, al numero delle equazioni e al numero delle incognite. Tutte le operazioni descritte nei paragrafi precedenti non presentano particolari difficoltà esecutive, quando si procede con matrici memorizzate in una forma compatta adatta ad operare con gli algoritmi diretti. In particolare, la matrice disegno può essere memorizzata in forma compatta per righe, le matrici normale e fattorizzata possono essere memorizzate in forma compatta a banda o a profilo, come pure la matrice inversa potendosi, come noto, calcolare questi elementi (di cui, in generale, è maggiore l'interesse), senza calcolare alcun elemento esterno alla banda o al profilo⁴³.

Allora se le matrici sono registrate utilizzando memorizzazioni compatte di questa forma, gli algoritmi diretti sequenziali intervengono a calcolare la modifica della soluzione proprio nello stesso modo in cui la soluzione è stata calcolata, in precedenza, con gli algoritmi diretti di base. Ciò significa che l'utilizzo di memorizzazioni compatte non viene inficiato in alcuna fase applicativa degli algoritmi diretti sequenziali, dove definita una memorizzazione compatta a banda o a profilo, idonea al problema dato, nessun elemento calcolato per mezzo di questi algoritmi viene mai a trovarsi all'esterno di detta banda o di detto profilo. Infatti bastando, per il teorema di annullamento del prodotto, la nullità di uno solo dei due fattori, un elemento esterno alla banda o al profilo e, conseguentemente, nullo, rimane nullo perché aggiornato da una o più sequenze di prodotti: di elementi soprastanti e, pertanto, nulli, oppure di coefficienti aggiornativi degli elementi soprastanti o dell'elemento stesso, a loro volta nulli, per non poter essere generatori.

⁴¹ Questo paragrafo nella sua versione attuale, come il successivo interamente nuovo, sono dovuti a due soggiorni di studio effettuata dall'autore, nel luglio 1990 e nel luglio 1992, presso lo Space Telescope Science Institute a Baltimora nel Maryland (USA). In quella sede, insieme a Tamara Bellone del Politecnico di Torino ed ospite di Beatrice Bucciarelli e Mario Lattanzi dell'Osservatorio Astronomico di Pino Torinese (TO) ed in collaborazione con gli stessi, sono stati studiati, implementati e sperimentati gli algoritmi diretti sequenziali, avendone lungamente dibattuto gli innumerevoli problemi che intercorrono fra la loro formulazione teorica e la loro effettiva utilizzazione.

⁴² Si chiama puntatore una variabile il cui valore indica (punta) l'indirizzo (cioè la posizione in memoria) di un'altra variabile; si chiama puntatore rovescio una terza variabile, associata alla seconda, il cui valore indica l'indirizzo della prima variabile (ovvero del puntatore diritto).

Resta da sottolineare che occorre utilizzare una riga in più nella matrice disegno, per aggiungere o togliere un'equazione alle misure, cioè proprio una riga della matrice disegno. Inoltre occorre utilizzare una colonna in più nelle matrici disegno, normale e fattorizzata, per aggiungere un'incognita, cioè una colonna sia della matrice disegno che delle matrici normale e fattorizzata (si ricordi che si opera solo sull'ultima colonna di entrambe), mentre per togliere un'incognita, ad operazione conclusa, basta compattare le matrici disegno, normale e fattorizzata, a partire dalla colonna tolta, oppure dalla riga e dalla colonna tolte di queste matrici, togliendo una colonna nella matrice disegno e insieme una riga e una colonna nelle matrici normale e fattorizzata.

Ancora solo per aggiungere un'equazione alle misure, occorre preliminarmente accertarsi che tutti i coefficienti da essa prodotti siano interni alla banda o al profilo della matrice normale (ovvero che queste memorizzazioni compatte siano veramente idonee al problema dato) e, in caso contrario, provvedere successivamente ad aumentare l'ampiezza di banda o ad espandere il profilo della matrice normale, a partire dall'ultima colonna di questa matrice, cosicché tutti i nuovi coefficienti risultino interni alla nuova banda o al nuovo profilo. Infine proprio perché gli algoritmi diretti sequenziali intervengono a calcolare la modifica della soluzione nello stesso modo in cui la soluzione è stata calcolata in precedenza con gli algoritmi diretti di base, nel caso di una memorizzazione compatta a profilo, si noti come sia conveniente procedere per colonne, essendo il profilo stesso memorizzato per colonne, anziché per righe, onde evitare lunghe ricerche tabellari.

Per quanto riguarda invece il calcolo della modifica della matrice di varianza–covarianza delle incognite, le procedure descritte nei paragrafi precedenti sono già appositamente predisposte per operare con la memorizzazione compatta a banda o a profilo, sia della matrice fattorizzata che della matrice inversa. Questa osservazione giustifica, tra l'altro, l'affermazione, fatta in precedenza, per cui sia più conveniente calcolare la soluzione del sistema: $T^T T e = a^T$ (dove: T è la matrice fattorizzata, a un vettore riga contenente un'equazione alle misure ed e un vettore di servizio), invece del prodotto matriciale: $C^{-1} a^T = e$ (essendo C^{-1} la matrice inversa).

Infatti mentre per risolvere il sistema occorre utilizzare la matrice fattorizzata memorizzata in forma compatta a banda o a profilo, per calcolare il prodotto matriciale serve tutta la matrice inversa (piena) di cui, come già detto in precedenza, si sono calcolati e si aggiorneranno solo gli elementi interni alla banda o al profilo della matrice normale. In conclusione, si osservi che gli ultimi prodotti matriciali, generanti gli elementi da aggiungere o sottrarre agli elementi della matrice inversa, per ottenere la modifica richiesta, possono essere calcolati, elemento per elemento, in modo tale da aggiornare solo gli elementi della matrice inversa interni alla banda o al profilo della matrice normale. Tutto ciò conferma i vantaggi degli algoritmi sequenziali, ovvero come essi consentano di modificare i risultati già ottenuti con un numero di operazioni dell'ordine di n^2 , anziché n^3 , come si avrebbe utilizzando gli algoritmi di base, essendo n il numero delle incognite.

⁴³ Sulle modalità di memorizzazione compatta delle matrici si veda la parte prima del presente lavoro ed inoltre: Benciolini G.B., Mussio L. (1984): Algoritmi esatti per la soluzione di grandi sistemi. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 5–46.

9. Nota sull'utilizzo di algoritmi di riordino

Ogniqualevolta la topologia del problema dato fa sì che la matrice disegno e la matrice normale dello stesso problema abbiano una sparsità rilevante, allora l'utilizzo di memorizzazioni compatte diviene conveniente. In questo caso, il successivo calcolo della matrice fattorizzata (ad es., di Cholesky) e della matrice inversa, se condotto per mezzo di algoritmi diretti di base o sequenziali, richiede di ridurre, per quanto possibile, la dispersione della matrice normale. In generale, un algoritmo di riordino delle incognite, ovvero di raggruppamento degli elementi extra-diagonali non-nulli attorno alla diagonale principale, risponde alla bisogna.

L'intersezione procedurale tra un algoritmo di riordino e gli algoritmi diretti è nulla, potendosi eseguire l'algoritmo di riordino preliminarmente a qualsiasi operazione algebrica. Tuttavia l'interazione pratica fra un algoritmo di riordino ed un algoritmo diretto sequenziale può dare inconvenienti, nel caso si voglia aggiungere un parametro (aggiuntivo) incognito. Infatti mentre nel caso si voglia aggiungere o togliere un'equazione alle misure oppure togliere un parametro (aggiuntivo) incognito, non si ha alcun inconveniente, in quanto la dispersione nella matrice normale non dipende dall'ordine dato alle equazioni alle misure e l'operazione di togliere riduce la dimensione della matrice stessa, cosa sicuramente vantaggiosa in termini di dispersione, l'operazione di aggiungere un parametro (aggiuntivo) incognito aumenta la dimensione della matrice normale, cosa certamente svantaggiosa in termini di dispersione.

Allora fermo restando lo svantaggio in termini di dispersione della matrice normale, non si hanno inconvenienti quando si aggiunge un parametro (aggiuntivo) incognito tenendo conto del proprio numero d'ordine conferitogli dall'algoritmo di riordino, preliminarmente impiegato, mentre si possono avere gravi inconvenienti, se detto parametro viene aggiunto, come usuale, quale ultimo parametro. Infatti in questo secondo caso, un'eventuale struttura a banda (o banda di bande) risulterebbe distrutta ed anche un compattamento a profilo, forma di memorizzazione compatta senz'altro più flessibile, potrebbe subire una crescita esplosiva. Nel primo caso, al contrario, l'interazione pratica con l'algoritmo di riordino salvaguarda la memorizzazione compatta prescelta. Allora grazie alla struttura a puntatori diritto e rovescio, definita in precedenza, la collocazione di un parametro (aggiuntivo) incognito, tenuto conto del proprio numero d'ordine conferitogli dall'algoritmo di riordino, avviene nella posizione corrispondente a detto numero, diminuito del numero di incognite attualmente non-operative e pertanto poste in fondo alla lista dei parametri (aggiuntivi) incogniti, il cui numero d'ordine è inferiore a quello del parametro (aggiuntivo) incognite da aggiungere.

La modifica degli algoritmi sequenziali capaci di aggiornare il fattore di Cholesky e la matrice inversa non è complessa e si articola nei seguenti punti.

A) Aggiornamento del fattore di Cholesky:

- elementi precedenti la colonna h : invariati;
- elementi della colonna h :

$$t_{ih} = \frac{c_{ih} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{kh} t_{ki}}{t_{ii}}$$

- elemento diagonale principale h, h :

$$t_{hh} = \sqrt{c_{hh} - \sum_{k=1}^{h-1} t_{kh}^2}$$

- elementi seguenti la colonna h soprastanti la riga h : invariati;
- elementi della riga h :

$$t_{hj} = \frac{c_{hj} - \sum_{k=1}^{h-1} t_{kh} t_{kj}}{t_{hh}}$$

- elementi seguenti la colonna h sottostanti la riga h :

$$t'_{ii} = \sqrt{t_{ii}^2 - w_i^{(i-h)^2}}$$

$$w_i^{(i-h+1)} = 0$$

$$t'_{ij} = \frac{t_{ij} t_{ii} - w_i^{(i-h)} w_j^{(i-h)}}{t'_{ii}} \quad j > i$$

$$w_j^{(i-h+1)} = \frac{w_j^{(i-h)} t_{ii} - w_i^{(i-h)} t_{ij}}{t'_{ii}}$$

dove:

$$w_j^{(1)} = t_{hj} \quad j > h$$

B) Aggiornamento della matrice inversa:

La definizione di un'opportuna matrice di scambio, pre- e post-moltiplicata alla matrice normale ed alla matrice inversa, permette di portare, all'ultima riga e all'ultima colonna, la riga e la colonna corrispondenti al parametro (aggiuntivo) incognito da aggiungere, così come già operato per togliere un parametro (aggiuntivo) incognito. (Tutto ciò deriva ovviamente dalla invarianza della matrice normale e della matrice inversa nei confronti di un qualsiasi riordino delle incognite.).

10. Nota sul ruolo di algoritmi sequenziali quando si opera con algoritmi iterativi

Gli algoritmi iterativi, per loro propria natura, sono già capaci di procedere sequenzialmente. Infatti:

- per aggiungere e togliere un'equazione, basta aggiungere o togliere un'equazione alle misure al sistema normale e riprendere l'algoritmo iterativo, facendo uso della soluzione calcolata come soluzione iniziale dello stesso;
- per togliere un parametro (aggiuntivo) incognito, basta ridurre opportunamente la matrice normale e riprendere l'algoritmo iterativo, facendo uso della soluzione calcolata dalla quale è stato eliminato il parametro (aggiuntivo) incognito da togliere;
- per aggiungere un parametro (aggiuntivo) incognito, basta accrescere opportunamente la matrice normale e riprendere l'algoritmo iterativo, facendo uso della soluzione calcolata nella quale è stato inserito anche il parametro (aggiuntivo) incognito da aggiungere (il suo valore sarà nullo, in mancanza di informazioni a priori, ed altrimenti conforme a queste).

In tutti questi casi, l'interazione fra gli algoritmi diretti sequenziali e gli algoritmi iterativi è nulla. Tuttavia l'interazione fra gli stessi algoritmi può essere effettiva, quando un algoritmo di preconditionamento precede l'algoritmo iterativo (propriamente detto) ed un algoritmo per il calcolo approssimato della matrice inversa segue lo stesso algoritmo iterativo. Come noto, è questo il caso dell'algoritmo ICCG che fa precedere la fattorizzazione incompleta di Cholesky al metodo del gradiente coniugato cui, se del caso, può seguire l'inversione incompleta (ed approssimata) della matrice normale. Allora:

- aggiungere o togliere un'equazione alle misure, modifica il fattore incompleto di Cholesky, in modo formalmente identico alla modifica apportata nel fattore (esatto) di Cholesky; e
- anche aggiungere o togliere un parametro (aggiuntivo) incognito, modifica il fattore incompleto di Cholesky, ancora in modo formalmente identico alla modifica apportata nel fattore (esatto) di Cholesky;
- analogamente aggiungere o togliere un'equazione alle misure, modifica la matrice incompleta (ed approssimata) inversa, in modo formalmente identico alla modifica apportata nella matrice inversa (esatta); e
- ancora aggiungere o togliere un parametro (aggiuntivo) incognito, modifica la matrice incompleta (ed approssimata) inversa, in modo formalmente identico alla modifica apportata nella matrice inversa (esatta).

Dopodiché l'algoritmo iterativo dal gradiente coniugato procede come descritto, in precedenza, per un qualsiasi algoritmo iterativo.

Si osservi che, data l'identità formale fra gli algoritmi diretti esatti e quelli incompleti, si ha identità formale anche fra gli stessi algoritmi sequenziali; pertanto poiché tutte le espressioni fornite operano su elementi delle matrici fattorizzata ed inversa, ma non contengono sommatorie, fatta eccezione per il calcolo di un solo prodotto scalare, si ha per il calcolo tanto della modifica della soluzione, quanto della modifica della matrice di varianza-covarianza delle incognite un numero di operazioni dell'ordine di n^2 anziché di n^3 . Inoltre il vantaggio della memorizzazione compatta ad elementi isolati, rispetto a quelle a banda o a profilo, dà ulteriori vantaggi nel numero effettivo di operazioni da eseguire.

PARTE IV – TEORIA DEI GRAFI

Introduzione⁴⁴

Le compensazioni a minimi quadrati connesse a molti problemi geodetici e geomatici richiedono la costruzione e la soluzione di un sistema lineare, il sistema normale, la cui matrice dei coefficienti è generalmente molto sparsa. Si chiamano matrici sparse quelle matrici che hanno solo una piccola frazione di elementi non-nulli rispetto al totale; le matrici sopra considerate hanno questa caratteristica in conseguenza della struttura topologica dei problemi in esame. Le matrici sparse possono avere gli elementi non-nulli raggruppati attorno alla diagonale principale oppure generalmente distribuiti.

Soprattutto per la soluzione con un metodo esatto (ad es., Gauss o Cholesky), ma anche per l'applicazione di qualche metodo iterativo (ad es., ICCG : gradiente coniugato preconditionato con matrice di Cholesky incompleta), è conveniente operare con una matrice normale i cui elementi non-nulli siano raggruppati il più possibile. Il raggruppamento degli elementi non-nulli può essere migliorato cambiando l'ordine delle incognite. Il riordino delle incognite può essere effettuato con alcuni algoritmi basati su differenti strategie. Un algoritmo classico è quello di Cuthill–McKee, che fa uso della teoria dei grafi; un altro algoritmo è stato proposto da Gibbs, Poole e Stockmeyer per superare alcuni limiti particolari dell'algoritmo di Cuthill–McKee. Per questo algoritmo, si espongono anche le modalità di applicazione alle compensazioni a minimi quadrati e la struttura usuale dei dati in ingresso.

1. Richiami di teoria dei grafi⁴⁵

Prima di procedere alla descrizione del procedimento, conviene ricordare alcune definizioni relative alla teoria dei grafi.

⁴⁴ Questo paragrafo ed i seguenti contengono una versione riveduta e corretta dell'articolo: Benciolini G.B., Mussio L. (1984) Algoritmi di riordino delle incognite nelle compensazioni ai minimi quadrati. In: M. Cunietti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 91–137, a sua volta, ripreso nell'articolo: Crespi M., Mussio L. (1990) Trattamenti matematici avanzati. In: F. Crosilla, L. Mussio (Ed's) *Dall'analitico al digitale: nuovi sviluppi della fotogrammetria applicata all'ingegneria*. CISM, Udine, p. 71–104.

⁴⁵ In geodesia e geomatica, l'insieme dei parametri aggiuntivi incogniti relativi ad uno stesso punto (o modello, o immagine) di una rete (e/o blocco fotogrammetrico) coinvolto nel sistema di equazioni alle misure, costituisce un vertice del grafo. L'insieme delle grandezze osservabili che sono state misurate fra due vertici, costituisce un lato del grafo.

Nelle reti di livellazione geometrica ogni caposaldo coincide con un vertice del grafo ed ogni tronco di linea di livellazione rappresenta un lato del grafo: esiste cioè totale coincidenza fra gli elementi delle due strutture.

Nelle reti topografiche, in generale, è vertice del grafo ogni punto (cioè l'insieme delle sue coordinate con l'eventuale orientamento della stazione), mentre è lato del grafo l'insieme delle misure effettuate fra due punti (distanze, componenti di basi, direzioni azimutali, angoli zenitali, dislivelli).

In fotogrammetria la corrispondenza fra gli elementi delle due strutture (blocco e grafo) è invece meno intuitiva: in questo caso sono vertici del grafo i punti–terreno ed i modelli (o le immagini), mentre sono lati dello stesso grafo i punti–modello (o i punti–immagine).

Infine quando si introducono nelle compensazioni i risultati di precedenti compensazioni nella forma di:

- differenze di coordinate di punti;
- punti in altri sistemi di riferimento, dove è necessario istituire origini fittizie;
- qualsivoglia tipo di informazione correlata, totalmente o anche solo parzialmente,

sono vertici del grafo i punti coinvolti da dette informazioni (comprese le origini fittizie), mentre sono lati del grafo le informazioni stesse (ivi inclusi i punti in altri sistemi di riferimento).

Con specifico riferimento al problema del riordino delle incognite, le reti geodetiche, soprattutto quando si intersecano ordini diversi, e le triangolazioni aeree, dove si determinano insieme punti e parametri di orientamento, e maggiormente se il blocco fotogrammetrico ha forma irregolare (ad es., con strisciate trasversali), hanno matrici normali sparse con elementi non-nulli generalmente distribuiti.

Definizione di grafo:

si consideri un insieme $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, si consideri poi un sottoinsieme E dell'insieme $\{(V_i, V_j), V_i \text{ e } V_j \in V\}$ di tutte le possibili coppie di elementi di V . La coppia (V, E) si definisce grafo G ; gli elementi di V sono i vertici del grafo, gli elementi di E sono i lati del grafo.

Corrispondenza matrice-grafo:

si consideri una matrice C simmetrica di ordine (cioè di dimensione) n ; ad essa si può far corrispondere un grafo G , con n vertici $\{1, 2, \dots, n\}$, i cui lati corrispondono agli elementi di C : esiste cioè il lato (i, j) , se e solo se l'elemento c_{ij} ($c_{ij} = c_{ji}$) di C è non-nullo.

Definizione di grafo connesso:

un grafo G si dice connesso se, dati due vertici qualsiasi, esiste sempre un cammino (ovvero una successione di lati contigui) che li congiunge. Si definisce distanza fra due vertici, il numero di lati costituenti il minimo cammino che li congiunge; il cammino corrispondente alla massima tra le distanze presenti in un grafo è detto diametro del grafo. In un grafo connesso ogni vertice è sempre coinvolto da almeno un lato; si chiama grado ρ_i di un vertice il numero di lati che lo coinvolgono.

Definizione di struttura a livelli:

si consideri una partizione in gruppi numerati (detti livelli): $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$, dei vertici del grafo G , tale che ogni vertice sia collegato solo con i vertici dello stesso livello o di quello precedente o seguente (si veda, ad es., l'albero disegnato sul grafo parziale di fig. 4.1⁴⁶).

Una struttura a livelli che abbia nel primo livello un solo elemento (detto radice) è detta radicata (gli elementi dell'ultimo livello sono detti foglie).

Il numero dei vertici che appartengono ad un livello si chiama ampiezza di quel livello; si definiscono poi l' ampiezza della struttura a livelli α e la sua profondità k , rispettivamente la massima tra le ampiezze dei livelli e il numero dei livelli stessi.

Corrispondenza struttura a livelli-numerazione:⁴⁷

si consideri una struttura a livelli L ; ad essa si può associare una numerazione N dei vertici del grafo G , numerandoli in successione livello per livello (l'ordine di numerazione all'interno di ogni livello è, in generale, arbitrario).

⁴⁶ Con specifico riferimento al grafo dell'esempio (completato dai lati: 3 – 8, 3 – 21, 6 – 15, 7 – 19, 7 – 22, 8 – 21, 14 – 16, 15 – 20, 19 – 22), un foglio di lavoro riporta le matrici disegno simbolica (o d'incidenza) e normale simbolica (o di connessione), due strutture a livelli radicate ed una struttura a livelli non – radicata di minima ampiezza, nonché le condizioni per l'assegnazione, alla struttura a livelli non – radicata, delle componenti disgiunte del grafo e per la nuova numerazione dei vertici, in base a quest'ultima struttura.

⁴⁷ Uno scambio di posizione, tra le incognite di un sistema, corrisponde allo scambio tra le corrispondenti righe e le corrispondenti colonne, nella matrice del sistema stesso, in quanto deve essere mantenuta la simmetria della matrice di partenza, e corrisponde ad uno scambio di numerazione dei vertici, nel grafo associato alla matrice.

Nome vertici	Totale e puntatori		Indicatori dei lati	Bande indietro – avanti		
		0				
1	2	2	1 6	0	13	
2	2	4	14 15	0	15	
3	3	7	30 31 32	0	18	
4	4	11	11 12 20 27	0	16	
5	3	14	12 13 16	1	12	
6	5	19	19 20 21 23 25	2	16	
7	3	22	24 25 26	1	15	
8	3	25	32 33 34	5	13	
9	3	28	15 16 17	7	3	
10	1	29	10	0	5	
11	3	32	3 4 7	0	7	
12	2	34	17 18	3	5	
13	2	36	5 6	12	3	
14	4	40	1 2 7 8	13	4	
15	5	45	9 10 11 19 28	11	5	
16	4	49	4 5 8 9	5	0	
17	3	52	13 14 18	15	0	
18	2	54	2 3	7	0	
19	3	57	21 22 26	13	3	
20	5	62	27 28 29 31 33	16	1	Matrice disegno simbolica (o d'incidenza)
21	3	65	29 30 34	18	0	
22	3	68	22 23 24	16	0	

N. vertici	Totale e puntatori		Indicatori dei vertici	Bande indietro – avanti		
		1				
1	3	4	1 13 14	0	13	
2	3	7	2 9 17	0	15	
3	4	11	3 8 20 21	0	18	
4	5	16	4 5 6 15 20	0	16	
5	4	20	4 5 9 17	1	12	
6	6	26	4 6 7 15 19 22	2	16	
7	4	30	6 7 19 22	1	15	
8	4	34	3 8 20 21	5	13	
9	4	38	2 5 9 12	7	3	
10	2	40	10 15	0	5	
11	4	44	11 14 16 18	0	7	
12	3	47	9 12 17	3	5	
13	3	50	1 13 16	12	3	
14	5	55	1 11 14 16	13	4	
15	6	61	4 6 10 15 16 20	11	5	
16	5	66	11 13 14 15 16	5	0	
17	4	70	2 5 12 17	15	0	
18	3	73	11 14 18	7	0	
19	4	77	6 7 19 22	13	3	
20	6	83	3 4 8 15 20 21	16	1	Matrice normale simbolica (o di connessione)
21	4	87	3 8 20 21	18	0	
22	4	91	6 7 19 22	16	0	

Livelli	Vertici (1 ^a struttura)	Vertici (2 ^a struttura)
1	2 (Radice scelta)	2 12
2	9 17	9 17
3	5 12	3 5 7 8 19 21 22
4	4	4 6 10 20
5	6 15 20	13 15
6	3 7 8 10 16 19 21 22	1 16
7	11 13 14	11 14
8	1 18	18 (Radice)

Due strutture a livelli radicate (di cui 2^a rovesciata, rispettivamente di ampiezza 8 e 7)

Componenti	N. totale livello max	Livello max 1 ^a struttura	Livello max 2 ^a struttura	Ampiezza	Coppia associata	Livelli assegnati
1	4 = 4	6	3	8 > 7	II	3 4
2	4 < 7	6	3		I	5 6
3	3 < 5	7	6		I	7 8
3	5 > 3	6	4		II	4
5	5 > 2	3	1		II	1

Assegnazione delle componenti ad una struttura a livelli non – radicata di minima ampiezza

Vertici	Coppia associata (I II)		Componente		Livelli	Vertice del livello precedente adiacente	Vertici vecchi	Vertici nuovi
	Livello							
1	8	6	3	8	1	Radice	2	1
2	1	1	0	1		Libero	12	2
3	6	3	2	6	2	1	9	3
4	4	4	0	4		1	17	4
5	3	3	0	5	3	3	5	5
6	5	4	1	4		Libero	7	6
7	6	3	1	3		6	19	7
8	6	3	2	6		6	22	8
9	2	2	0	2	4	5	4	9
10	6	4	4	4		6	6	10
11	7	7	0	7		Libero	10	11
12	3	1	5	1	5	4	15	12
12	7	5	3	7		4	20	13
14	7	7	0	7	6	13	3	14
15	5	5	0	5		13	8	15
16	6	6	0	6		12	16	16
17	2	2	0	2		13	21	17
18	8	8	0	8	7	14	11	18
19	6	3	1	3		14	13	19
20	5	4	2	5		14	14	20
21	6	3	2	6	8	18	1	21
22	6	3	1	3		19	18	22

Struttura a livelli non – radicata di minima ampiezza (pari a 4)

Numerazione dei vertici vecchia e nuova (dominante): per livelli, vertice adiacente del livello precedente e grado del vertice

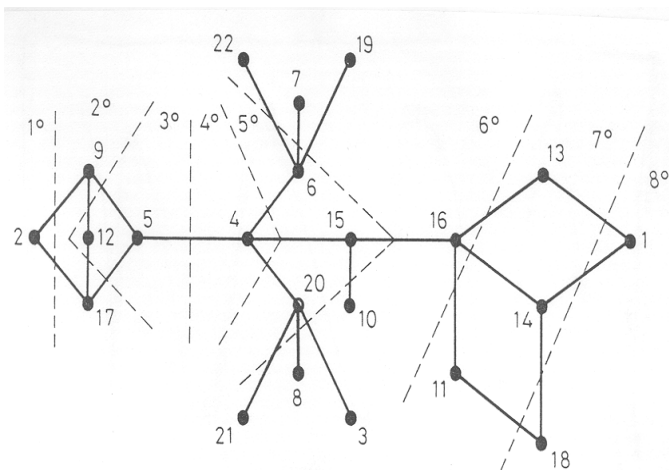
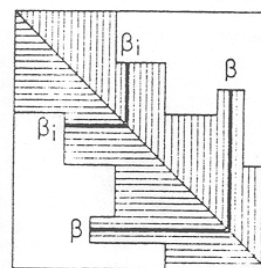


Fig. 4.1



β_i ampiezza di banda relativa all'incognita i
 β ampiezza (massima) di banda della matrice

▨ profilo del triangolo superiore della matrice
 ▤ " " " inferiore " "

Fig. 4.2

Uno scambio di posizione tra le incognite determina, di conseguenza, una variazione dell'ampiezza di banda e del profilo della matrice del sistema. Si ricordino, a proposito, le seguenti definizioni (fig. 4.2):

ampiezza di banda relativa all'incognita i : $\beta_i = \max_j (i - j) \quad j < i \text{ tale che: } c_{ij} \neq 0$

ampiezza (massima) di banda della matrice: $\beta = \max_i \beta_i$

profilo della matrice: $\gamma = \sum_{i=1}^n \beta_i$

ampiezza media di banda della matrice: $\bar{\beta} = \frac{\gamma}{n}$

2. Costruzione della matrice disegno simbolica e della matrice normale simbolica

Gli algoritmi di riordino operano, come già detto in precedenza, su una matrice quadrata simmetrica, come è nei problemi a minimi quadrati la matrice normale simbolica. Questa non è immediatamente disponibile, ma si può ottenere operando sulla matrice disegno simbolica. Si chiama matrice disegno la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni alle misure, contenente tutta l'informazione legata alla disposizione dei punti e ai collegamenti esistenti fra i punti stessi. A sua volta, la costruzione di una matrice disegno simbolica richiede di sostituire alla nomenclatura dei vertici una numerazione che sarà poi ottimizzata da un algoritmo di riordino.

La sostituzione di una numerazione alla nomenclatura dei vertici si effettua sfruttando le proprietà minimali di ordine che possiede anche una nomenclatura. Infatti una nomenclatura può essere costituita (come usuale nei problemi geodetici e geomatici) da numeri, comunque scelti, che si possono ovviamente disporre secondo l'ordine dei numeri naturali. Questa operazione si attua in tre passi:

- dapprima si scandiscono (cioè si analizzano in sequenza) tutte le misure utilizzando il nome di ogni vertice coinvolto come puntatore a un elemento di un elenco ordinato di numeri naturali; l'elemento puntato è, di volta in volta, contrassegnato;

- ❑ poi scandendo l'elenco ordinato dei numeri naturali, si associano a quelli contrassegnati numeri d'ordine progressivi e compatti, producendo così una corrispondenza biunivoca fra nomi e numeri d'ordine;
- ❑ infine si scandiscono nuovamente tutte le misure sostituendo al nome di ogni vertice coinvolto il suo numero d'ordine, sempre utilizzando l'informazione precedente quale puntatore ⁴⁸.

Sostituita alla nomenclatura dei vertici una numerazione, si ha una tabella di indicatori dei vertici coinvolti da ciascuna misura, ovvero la matrice disegno simbolica memorizzata per righe⁴⁹.

Invece nel caso di una nomenclatura costituita, come nei problemi geodetici antichi, da nomi toponomastici, a volte frammisti a numeri (con cifre romane e/o riferimenti del tipo: bis, ter, ecc.), questi possono essere disposti secondo l'ordine d'arrivo nei dati. Questa operazione si attua in quattro passi:

- ❑ dapprima si scandiscono tutte le misure attribuendo un numero d'ordine progressivo e compatto al nome di ogni nuova stazione (ciò presuppone che i dati siano quantomeno ordinati per stazione);
- ❑ poi si ordina l'elenco dei nomi delle stazioni secondo l'ordine alfabetico (un algoritmo del tipo dividi e migliora risponde alla bisogna);
- ❑ successivamente si scandiscono nuovamente tutte le misure confrontando (tramite ricerca binaria) il nome di ogni punto osservato con l'elenco dei nomi dei punti di stazione e, trovata la corrispondenza, attribuendo lo stesso numero d'ordine;
- ❑ infine si scandiscono due volte ancora tutte le misure individuando prima tutti i punti osservati, distinti dai punti di stazione, e ordinando questi secondo l'ordine alfabetico, in modo da evitare ripetizioni, ed attribuendo poi un numero d'ordine progressivo e compatto al nome di ogni nuovo punto osservato.

Questa operazione è del tutto generale e funzionerebbe anche con una nomenclatura costituita da soli numeri; tuttavia essendo per numero di confronti molto più lunga di quella presentata appositamente, la prima risulta preferibile da eseguirsi, benché antiintuitiva.

La costruzione della matrice normale simbolica memorizzata per elementi isolati è più agevole disponendo della matrice disegno simbolica memorizzata per colonne; pertanto è necessario eseguire un'operazione di trasposizione per passare dall'una all'altra forma di memorizzazione. Questa operazione si attua in due passi, scandendo ogni volta tutte le misure:

- ❑ dapprima si contano le misure in cui è coinvolto ciascun vertice, sostituendo alla loro numerosità il puntatore all'ultimo elemento di ogni colonna, ottenuto sommando alla numerosità della colonna stessa le numerosità di tutte le precedenti;
- ❑ successivamente si memorizzano vertice per vertice i numeri d'ordine delle misure che coinvolgono quel vertice, ovvero gli indicatori di riga.

⁴⁸ Si chiama puntatore una variabile il cui valore indica (punta) l'indirizzo di un'altra variabile.

⁴⁹ Le modalità di memorizzazione compatta delle matrici: disegno (per righe o per colonne), e normale (per elementi isolati) sono esposte nella prima parte del presente lavoro e nell'articolo: G.B., Mussio L. (1984): Algoritmi esatti per la risoluzione di grandi sistemi. In: M. Cuniatti (Ed) *Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 4. CLUP, Milano, p. 5–46, a sua volta, ripreso nell'articolo: Crespi M., Mussio L. (1989): Problemi di calcolo. In: F. Crosilla, L. Mussio (Ed's) *Progettazione ed ottimizzazione del rilievo topografico e fotogrammetrico di controllo*. CISM, Udine, p. 255–282.

Sempre per facilitare la costruzione della matrice normale è utile calcolare per ogni vertice la relativa ampiezza di banda indietro, ovvero la massima tra le distanze con i vertici precedenti collegati da una misura; analogamente si genera la relativa ampiezza di banda avanti.

La matrice normale simbolica, pur essendo simmetrica rispetto alla diagonale principale, per essere poi più efficiente negli algoritmi di riordino, serve tutta e non solo nel suo triangolo superiore. La costruzione della matrice normale simbolica si attua seguendo, vertice per vertice, i seguenti passi:

- ❑ dapprima utilizzando la corrispondente colonna della matrice disegno simbolica memorizzata per colonne, si individuano i numeri d'ordine delle misure coinvolgenti un vertice, cosicché accedendo tramite essi alle righe della matrice disegno simbolica, memorizzata per righe, si ottengono i numeri d'ordine dei vertici direttamente collegati al vertice in esame;
- ❑ successivamente, etichettati tutti questi vertici in un vettore di servizio in modo da evitare ripetizioni, questi sono poi memorizzati in forma compatta in una colonna della matrice normale simbolica, registrando contemporaneamente la lunghezza di questa colonna.

A tale proposito, si noti che, mentre l'etichettatura dei vertici in un vettore di servizio (lungo quanto il numero dei vertici) è automatica, in quanto guidata dai numeri d'ordine dei vertici direttamente collegati al vertice in esame, la memorizzazione in forma compatta di questi stessi vertici richiede di verificarne la presenza fra tutti gli elementi del vettore di servizio compresi fra l'ampiezza di banda indietro e l'ampiezza di banda avanti del vertice in esame. Da ultimo si sostituisce alla lunghezza di ciascuna colonna il puntatore al primo elemento di ogni colonna.

Prima di procedere con un algoritmo di riordino è necessario verificare se il grafo corrispondente alla matrice normale è connesso; questa condizione è infatti operativamente richiesta nella generazione di una struttura a livelli. D'altra parte, essendo questa operazione analoga alla generazione di una struttura a livelli (illustrata dopo la presentazione degli algoritmi di riordino) si rinvia ad essa per le spiegazioni del caso.

Dopo l'ottimizzazione della numerazione da parte di un algoritmo di riordino, occorre sostituire alla vecchia numerazione la nuova nella matrice disegno simbolica memorizzata per righe, trasporre la matrice disegno simbolica, in modo da averla memorizzata per colonne, e costruire la nuova matrice normale simbolica. Queste tre operazioni sono analoghe a quelle eseguite prima degli algoritmi di riordino, riducendosi la prima al solo terzo passo di quelli necessari per sostituire una numerazione alla nomenclatura dei vertici ⁵⁰.

⁵⁰ L'algoritmo (di riordino) di Rosen è il più elementare e consiste nell'operare alcuni scambi di posizione tra incognite, scelti controllando direttamente l'effetto prodotto sull'ampiezza (massima) di banda della matrice. Si operano cioè quegli scambi che riducono l'ampiezza stessa, o che potrebbero permetterne altri che la riducono a loro volta. L'algoritmo viene descritto, di seguito, per punti.

- 1) Si selezionano i due vertici che determinano l'ampiezza (massima) di banda; in caso di molteplicità si sceglie la prima coppia di vertici.
- 2) Se il vertice selezionato di numerazione più alta può essere scambiato con un qualsiasi vertice di numerazione più bassa, per ridurre l'ampiezza (massima) di banda, si salta al passo 8).
- 3) Se il vertice selezionato di numerazione più bassa può essere scambiato con un qualsiasi vertice di numerazione più alta, per ridurre l'ampiezza di banda, si salta al passo 8).
- 4) Se il vertice selezionato di numerazione più alta si può scambiare con uno qualsiasi di numerazione più bassa, mantenendo la stessa ampiezza (massima) di banda, si salta al passo 7).

3. Algoritmo di Cuthill – McKee

Questo algoritmo si basa sulla costruzione di una struttura a livelli radicata, cioè con un solo elemento (detto radice) nel primo livello. La nuova numerazione è generata numerando in sequenza opportunamente i vertici di ogni livello. Ricordando le definizioni di ampiezza (massima) di banda della matrice e di ampiezza della struttura a livelli con cui si è generata una numerazione, si dimostra che, in generale, vale la relazione (fig. 4.3): $\beta \leq 2\alpha - 1$, mentre, se la struttura a livelli è radicata, si ha anche (fig. 4.4): $\beta \geq \alpha$.

Da queste disuguaglianze, è evidente che conviene costruire una struttura a livelli di ampiezza più bassa possibile, allo scopo di ridurre l'ampiezza (massima) di banda della matrice; ciò si ottiene con l'algoritmo descritto nel prosieguo. Si minimizza l'ampiezza (massima) di banda, poiché non sono note disuguaglianze che consentano di minimizzare direttamente il profilo della matrice normale simbolica. D'altra parte, in generale, alla minima ampiezza (massima) di banda corrisponde anche il minimo profilo.

- 1) Si generano le strutture a livelli radicate in ciascuno dei vertici di grado basso (opportunamente scelto) e se ne calcolano le ampiezze (si veda, ad es., l'albero di fig. 4.1).
- 2) Per ciascuna struttura di minima ampiezza, generata al passo 1, si numerano i vertici, livello per livello, nel modo seguente:
 - si assegna il numero 1 al vertice radice;
 - per ogni successivo livello (a partire dal secondo), si numerano, in ordine di grado crescente, dapprima i vertici adiacenti a quella di minimo numero del livello precedente (in caso di ambiguità la scelta dell'ordine è arbitraria). I vertici rimanenti, adiacenti al primo dei successivi di minimo numero del livello precedente, sono ancora numerati in ordine di grado crescente. Si continua così, finché tutti i vertici di un livello, sono stati numerati e si passa poi al livello successivo procedendo, fino all'ultimo livello.
- 3) Per ciascuna delle numerazioni prodotte al passo precedente, si calcola la relativa ampiezza (massima) di banda e si sceglie la numerazione che genera la minima fra queste ampiezze.
- 4) Si inverte la numerazione così ottenuta (ponendo j al posto di $n - i + 1$). Quest'ultimo passo qualifica la variante del metodo detta algoritmo di Cuthill–McKee inverso.

5) Se il vertice selezionato di numerazione più bassa si può scambiare con uno qualsiasi di numerazione più alta, mantenendo la stessa (massima) ampiezza di banda, si salta al passo 7).
(Lo scopo dei passi 4) e 5) è di modificare l'ordine dei vertici senza aumentare l'ampiezza (massima) di banda, cosicché si possano operare successivamente altri scambi utili ai passi 2) e 3)).

- 6) Nessun altro scambio è possibile, l'ampiezza (massima) di banda è stata perciò ridotta al minimo e pertanto l'algoritmo si arresta.
- 7) Se nei passi 4) e 5) è stato operato un numero massimo (opportunamente scelto) di scambi consecutivi, o se due vertici, già scambiati tra loro sono di nuovo scelti per uno scambio, si salta al passo 6).
- 8) Si esegue lo scambio fra i vertici selezionati ai passi 2) o 3), oppure 4) o 5), si ritorna al passo 1).

Come è stato rilevato da vari autori, il difetto principale di questo algoritmo è la lentezza di esecuzione; infatti il numero totale di confronti e di operazioni da eseguire è, in generale, molto grande. Inoltre è facile costruire matrici la cui banda, benché riducibile con scambi di posizione tra incognite, non può essere ridotta da questo algoritmo.

Dato il grafo, mostrato in fig. 4.5, la nuova numerazione è mostrata sul grafo in fig. 4.6 ed il guadagno ottenuto è qualificato dagli indici della tabella sottoriportata.

	Prima del riordino	Dopo il riordino
Profilo della matrice	168	71
Ampiezza della banda	18	8

Questo algoritmo è il più citato in letteratura, è usato per varie applicazioni ed è comunque di base per lo studio di altri algoritmi che ne costituiscono generalizzazioni o estensioni.

4. Algoritmo di Gibbs, Poole e Stockmeyer

Questo algoritmo riduce sensibilmente il numero di strutture a livelli radicate da costruire, rispetto a quelle necessarie con l'algoritmo di Cuthill – McKee, inoltre fa uso di una struttura a livelli non radicata, in base alla quale numerare opportunamente i vertici. L' algoritmo viene descritto per punti, se del caso, integrati da commenti sulle idee guida sul metodo (riportati fra parentesi, per separarli dalla descrizione dell'algoritmo)

I. Ricerca degli estremi di uno pseudodiametro

(La ricerca di una struttura a livelli di minima ampiezza si può far coincidere, in generale, con la ricerca di una struttura a livelli di massima profondità. Infatti quanto più numerosi sono i livelli, tanto minore sarà l'ampiezza di ciascun livello e, in generale, anche l'ampiezza massima diminuirà. Benché ciò possa sembrare intuitivo, si noti come questo non sia né necessario né sufficiente; pertanto l'espressione in generale serve proprio ad ammettere la possibilità di costruire opportuni controesempi. Sembra conveniente costruire una struttura a livelli radicata su un estremo di un diametro; tuttavia risultando laboriosa la ricerca degli estremi di un diametro, si individuano gli estremi di uno pseudodiametro, cioè due vertici la cui distanza sia vicina alla distanza massima.)



Fig.4.3

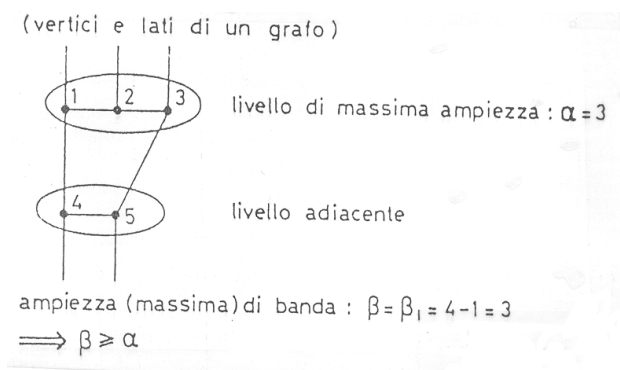


Fig. 4.4

- 1) Si sceglie un vertice arbitrario di grado minimo, e lo si chiama v .
- 2) Si genera una struttura a livelli L_v , radicata in v , e si chiama S l'insieme dei vertici appartenenti all'ultimo livello di L_v .

- 3) Si generano via, via le strutture a livelli L_s , radicate in tutti gli $s \in S$ selezionati in ordine di grado crescente. Se per qualche vertice $s \in S$, la profondità di L_s è maggiore di quella di L_v , allora si sostituisce s a v , e si ritorna al primo passo.
- 4) Individuata una struttura a livelli L_u di minima ampiezza, radicata in $u \in S$ e avente la stessa profondità k della struttura a livelli L_v , radicata in v (in caso di ambiguità la scelta di u è arbitraria), i vertici v ed u costituiscono gli estremi di uno pseudodiametro.

II. Costruzione di una struttura a livelli non radicata di minima ampiezza

(La nuova struttura a livelli si costruisce intersecando le due strutture a livelli radicate sugli estremi di uno pseudodiametro. In generale, essa ha ampiezza minore, e comunque non maggiore, di quelle radicate.)

- 5 Usando le due strutture a livelli radicate L_v e L_u , aventi la stessa profondità k ed, ampiezze rispettivamente, α_v e α_u , si associa a ciascun vertice w del grafo la coppia ordinata (i, j) in cui i è l'indice del livello in L_v contenente w , e $j = k + 1 - h$ essendo h l'indice del livello in L_u contenente anch'esso w . La coppia $(1, 1)$ è associata solo al vertice v , mentre la coppia (k, k) è associata al solo vertice u .
- 6 I vertici del grafo sono assegnati ai livelli di una nuova struttura a livelli L , avente la stessa profondità k , ma minore ampiezza, in generale.
 - A. Se la coppia ordinata associata a un vertice w ha forma (i, i) , allora il vertice w è posto nel livello l_i , inoltre esso e tutti i lati che lo coinvolgono sono rimossi dal grafo (rimuovere un vertice e tutti i lati che coinvolgono significa passare a considerare il grafo senza quel vertice e quei lati). Compiuta questa operazione, se tutti i vertici sono stati rimossi dal grafo, si effettua direttamente la numerazione dei vertici.
 - B. Effettuate le rimozioni di cui al passo precedente, ora il grafo è composto da una o più componenti connesse, fra loro disgiunte, sulle quali è possibile operare, separatamente, al fine generare una struttura a livelli non radicata di minima ampiezza.

(Con l'intersezione delle due strutture a livelli radicate nei due estremi di uno pseudodiametro, stabilita ogni qual volta la coppia ordinata associata ad ogni vertice ha forma (i, i) , si ottiene un insieme connesso di vertici che congiunge i due estremi dello pseudodiametro. Infatti se il grafo fosse una semplice catena, la coppia ordinata associata ad ogni vertice avrebbe sempre forma (i, i) . Inoltre i vertici della catena occuperebbero già tutti i livelli individuati, mantenendo così

invariata la profondità e non contribuendo alla riduzione dell'ampiezza di ciascun livello. Ciascuna delle componenti connesse, fra loro disgiunte, che si ottengono rimuovendo dal grafo ogni vertice della catena e tutti i lati che lo coinvolgono, costituisce una differente diramazione della catena (si veda, ad es., il grafo disgiunto di fig. 4.7). Inoltre i vertici di ogni diramazione non occupano mai tutti i livelli individuati e, conseguentemente, possono essere opportunamente distribuiti dando un qualche contributo alla riduzione dell'ampiezza dei livelli volta a volta interessati. Procedendo dalle più grandi alle più piccole per numero di vertici, ogni componente può essere ordinata separatamente dalle altre componenti, nei livelli individuati, in modo da realizzare una struttura a livelli non radicata di minima ampiezza. Ciò si ottiene scegliendo, per tutti i vertici la cui coppia ordinata associata ha forma (i, j) , proprio quell'indice (I) o (II) della coppia ordinata associata che meno fa aumentare l'ampiezza di quel livello che, componente per componente, più va riempiendosi.)

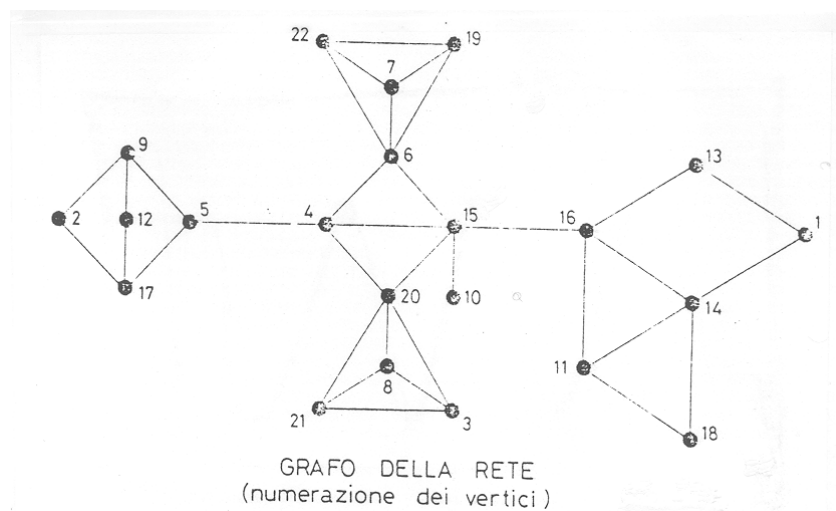


Fig. 4.5

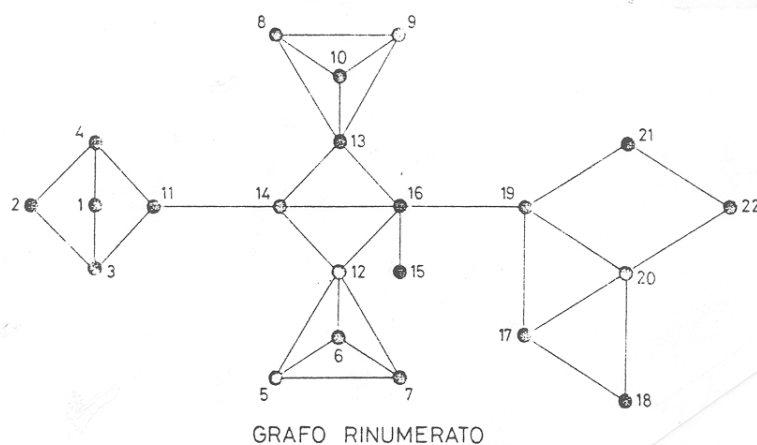


Fig. 4.6

Per ogni componente, ordinata per numero decrescente di vertici, si procede nel modo seguente:

- a) Si calcolano le numerosità (n_1, n_2, \dots, n_k) dei livelli (l_1, l_2, \dots, l_k) della struttura a livelli L , utilizzando solo i vertici già assegnati ad essa a quel dato passo.
- b) Si prova a porre, in ciascun livello l_i , i vertici aventi come primo elemento (I) della coppia ordinata associata (i, j) proprio lo stesso i del livello; analogamente si prova a porre, in ciascun livello l_j , i vertici aventi come secondo elemento (II) della coppia ordinata associata (i, j) proprio lo stesso j del livello.
- c) Si calcolano le numerosità $(n_{v_1}, n_{v_2}, \dots, n_{v_k})$ e $(n_{u_1}, n_{u_2}, \dots, n_{u_k})$, dove il generico numero n_{v_i} è la numerosità del livello l_i , se a questo livello si prova ad aggiungere i vertici aventi come primo elemento (I) della coppia ordinata associata (i, j) proprio lo stesso i del livello, e dove, analogamente, n_{u_i} è la numerosità del livello l_j , se a questo livello si prova ad aggiungere i vertici aventi come secondo elemento (II) della coppia ordinata associata (i, j) proprio lo stesso j del livello.
- d) Si calcolano $n_{v_{max}}$ e $n_{u_{max}}$, come i valori massimi delle numerosità n_{v_i} e n_{u_i} maggiori delle corrispondenti numerosità n_i (ciò significa non tener conto dei livelli l_i , la cui numerosità non aumenta assegnando i vertici appartenenti alla componente del grafo in esame).
- e) Dopodiché si procede al confronto fra $n_{v_{max}}$ e $n_{u_{max}}$.
- Se $n_{v_{max}} < n_{u_{max}}$, si pongono, definitivamente, tutti i vertici della componente del grafo in esame nel livello indicato dal primo elemento (I) della coppia ordinata associata a ciascun vertice.
 - Se $n_{v_{max}} > n_{u_{max}}$, si pongono, definitivamente, tutti i vertici della componente del grafo in esame nel livello indicato dal secondo elemento (II) della coppia ordinata associata a ciascun vertice.
 - Se $n_{v_{max}} = n_{u_{max}}$, si pongono, definitivamente, tutti i vertici della componente del grafo in esame nel livello indicato dall'elemento (I) o (II) della coppia ordinata associata a ciascun vertice, proveniente dalla struttura a livelli radicata in v o in u la cui ampiezza α è minore. Se le ampiezze delle due strutture a livelli radicate L_v ed L_u sono uguali, allora si sceglie, ad arbitrio, il primo elemento (I) della coppia ordinata associata a ciascun vertice.

(E' così evidente perché la struttura a livelli non radicata L , in generale, ha ampiezza minore, e comunque non maggiore, di quella di ciascuna delle due strutture a livelli radicate L_v e L_u dalla cui opportuna intersezione è stata generata. Infatti ogni suo livello è riempito, dopo aver messo i vertici la cui coppia ordinata associata ha forma (i, j) , scegliendo per tutti gli altri vertici la cui coppia ordinata associata ha forma (i, j) , opportunamente raggruppati in componenti, proprio quell'indice (I) o (II) che meno fa aumentare l'ampiezza di quel livello che, volta a volta, più va riempiendosi.)

III. Numerazione

(Questa operazione è simile all'analogia dell' algoritmo di Cuthill–McKee; le differenze sono dovute all'uso di una struttura a livelli più generale.)

- 7) Se il grado del vertice u è minore del grado del vertice v , allora si scambiano u e v , e si ribalta la struttura a livelli L ponendo l_i al posto di l_{k-i+1} (questo assicura che la numerazione inizi dall'estremo di minimo grado dello pseudodiametro).
- 8) Si numerano i vertici di ciascuno dei livelli l_1, l_2, \dots, l_k nel modo seguente:
 - A. Nel primo livello, si assegna il numero uno al vertice v e nei livelli successivi l_2, \dots, l_k , sia w il vertice di minimo numero in l_{i-1} avente in l_i vertici adiacenti non–numerati: si numerano questi, in ordine di grado crescente, e si ripete questo passo, finché tutti i vertici di l_i adiacenti a vertici di l_{i-1} sono numerati (in questo modo, la numerazione prosegue strettamente parallela fra due livelli, precedente e successivo).
 - B. Sia w il vertice di minimo numero in l_i , avente in l_i vertici adiacenti non–numerati: si numerano questi, in ordine di grado crescente. Si ripete questo passo, finché tutti i vertici di l_i adiacenti a vertici numerati sono anch'essi numerati.
 - C. Se rimane in l_i qualche vertice non–numerato, si numera quello di minimo grado, e si ritorna al passo precedente.
- 9) Si ribalta la numerazione ottenuta, ponendo i al posto di $n-i+1$, se si ha una delle due seguenti condizioni (in generale, questo garantisce un'ulteriore riduzione del profilo senza modificare, invece, l'ampiezza (massima) di banda):
 - nel primo passo dell'algoritmo di numerazione, si sono scambiati i vertici u e v , e, nel secondo passo dell'algoritmo per la costruzione di una struttura a livelli non radicata di

minima ampiezza, si è scelto il secondo elemento (II) della coppia ordinata associata per la prima componente;

- nel primo passo dell'algoritmo di numerazione, non si sono scambiati i vertici u e v , e, nel secondo passo dell'algoritmo per la costruzione di una struttura a livelli non radicata di minima ampiezza, si è scelto il primo elemento (I) della coppia ordinata associata per la prima componente.

In fig. 4.8, è rappresentato il grafo con la nuova numerazione. Il guadagno ottenuto è quantificato dagli indici della tabella sottoriportata.

	Prima del riordino	Dopo il riordino
Profilo della matrice	168	79
Ampiezza della banda	18	6

Il profilo della matrice normale simbolica può essere, a parità di ampiezza (massima) di banda, ulteriormente ridotto a 73, effettuando il ribaltamento della numerazione, ed a 69 (ampiezza di banda = 4), effettuando la numerazione dei vertici secondo le modalità esposte nella nota⁵¹ e pertanto minimizzando anche la dispersione zonale, invece della sola dispersione locale.

L'esempio esposto consente di sottolineare, ancora una volta, due punti di forza dell'algoritmo:

- la ricerca degli estremi di uno pseudodiametro avviene in modo piuttosto veloce e con un procedimento che, in generale, è insensibile alla scelta del vertice selezionato come prima radice;
- l'intersezione di due strutture a livelli radicate, per costruire una struttura a livelli non radicata, permette di minimizzare l'ampiezza della struttura a livelli risultante, perché i livelli più pieni possono essere scaricati verso quelli più vuoti, compresi il primo e l'ultimo livello.

Dopo l'ottimizzazione della numerazione, come già detto in precedenza, occorre sostituire alla vecchia numerazione la nuova numerazione della matrice disegno simbolica memorizzata per righe, trasporre la matrice disegno simbolica, in modo da averla memorizzata per colonne, e costruire, operando su quest'ultima matrice, la nuova matrice normale simbolica.

Calcolate per ogni vertice le relative ampiezze di banda indietro e avanti, se la somma delle bande avanti di tutti i vertici è minore della somma delle bande indietro degli stessi si può ridurre ulteriormente il profilo della matrice normale, a parità di ampiezza (massima) di banda della matrice normale, effettuando il ribaltamento della numerazione prodotta dagli algoritmi di riordino.

⁵¹ Nell'algoritmo di numerazione, l'ordinamento per grado crescente determina la minimizzazione della dispersione locale, prodotta dai vertici di grado più alto, mentre per i grafi molto irregolari un ordinamento alternativo dapprima per componente decrescente, tenendo per ultima la componente zero, e solo successivamente per grado crescente favorisce la minimizzazione della dispersione zonale prodotta dalle diramazioni più grandi della catena.

5. Generazione di una struttura a livelli radicata e partizione di un grafo in una o più componenti connesse, fra loro disgiunte

Questo paragrafo vuole approfondire quei punti dell' algoritmo appena proposto, dove ad una descrizione non sempre facile, corrispondono operazioni solo apparentemente di immediata realizzazione. Si badi infatti come, in particolare, tutto quanto è visivamente evidente sia spesso estremamente complesso da essere formalizzato in algoritmi e/o procedure.

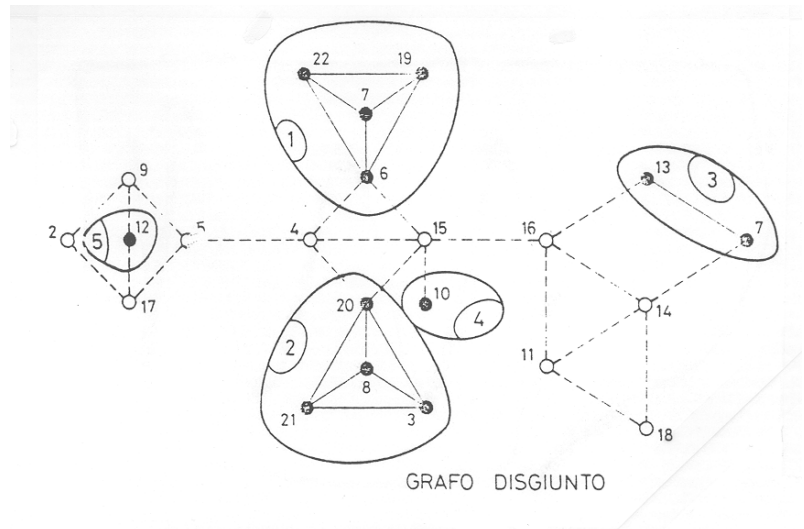


Fig. 4.7

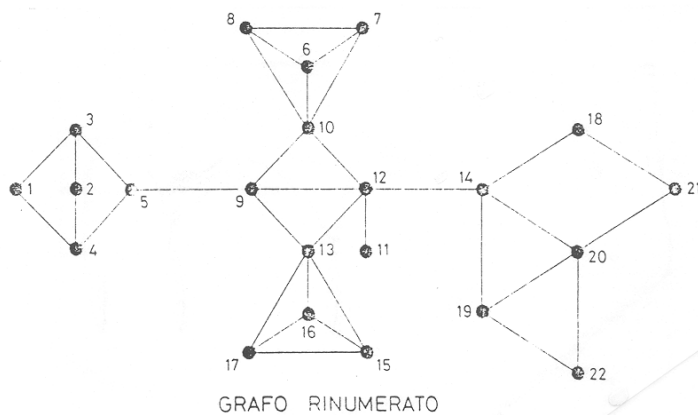


Fig. 4.8

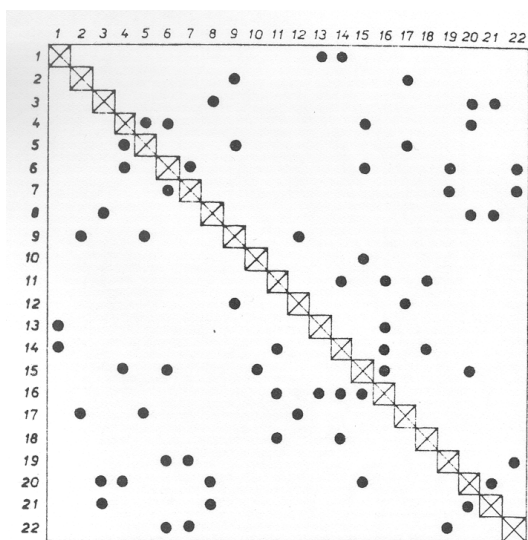
La generazione di una struttura a livelli radicata (di cui ai passi 2) e 3) del paragrafo precedente) è una operazione abbastanza semplice se si ha a disposizione tutta la matrice normale simbolica e non solo il suo triangolo superiore. Essa si attua in sette passi.

- 1) Si mette nel primo livello il vertice radice, ovvero la si contrassegna come appartenente al primo livello.
- 2) Si passa a costruire il livello successivo.
- 3) Facendo uso della matrice normale simbolica, si individuano i vertici-corona dei vertici assegnati al livello precedente, cioè i vertici ad essi direttamente collegati da un lato⁵².

⁵² L'individuazione dei vertici-corona è immediata, proprio se si ha a disposizione tutta la matrice normale simbolica, trovandosi questi uno di seguito all'altro.

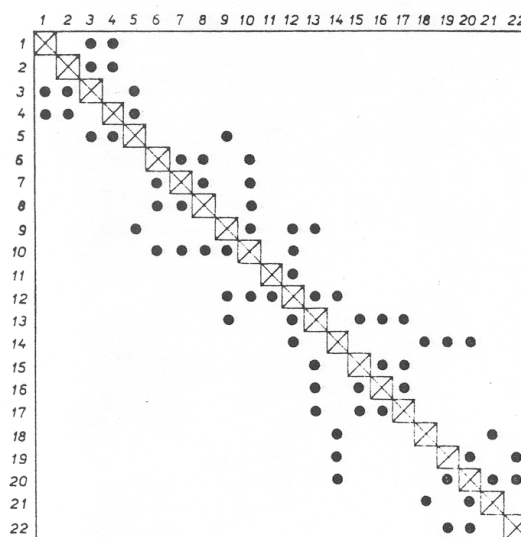
- 4) Si mettono, nel livello in esame, i vertici-corona che non siano già stati assegnati a un livello precedente, ovvero li si contrassegnano come appartenenti a questo livello.
- 5) Si calcola l'ampiezza del livello in esame e, se essa è maggiore delle ampiezze di tutti i livelli precedenti, si aggiorna l'ampiezza della struttura a livelli.
- 6) Se l'ampiezza del livello in esame non è nulla, si ritorna al passo 2); altrimenti si è ultimata la costruzione della struttura a livelli.
- 7) Si calcola la profondità della struttura a livelli.

La partizione di un grafo in una o più componenti connesse, fra loro disgiunte (di cui al passo 6B) del paragrafo precedente) è un'operazione più complessa e, anch'essa, ha bisogno di tutta la matrice normale simbolica. Essa si attua in tredici passi.



MATRICE NORMALE PRIMA DEL RIORDINO

Fig. 4.9



MATRICE NORMALE DOPO IL RIORDINO

Fig. 4.10

- 1) come appartenenti alla componente zero (ad es., con dei segni meno⁵³) gli elementi di un vettore di servizio corrispondenti ai numeri d'ordine dei vertici rimossi: questi vertici infatti costituiscono, per convenzione, la componente zero.
- 2) Se tutti i vertici sono stati assegnati alla componente zero, il grafo non ha altre componenti; altrimenti il grafo ha una o più componenti connesse, fra loro disgiunte.
- 3) Si passa a costruire la componente successiva (il procedimento più immediato per effettuare la partizione del grafo nelle varie componenti connesse, fra loro disgiunte, consiste nel costruire per ogni componente una struttura a livelli di servizio, radicata in un qualsiasi vertice che non sia già stato assegnato ad una componente precedente, anche se queste strutture a livello di servizio non servono, di per sé, nel prosieguo degli algoritmi di riordino).

⁵³ La forma del contrassegno è del tutto arbitraria, bastando per questo contrassegnamento solo un informatore logico (sì-no, più-meno, zero-uno, ecc.) sull'avvenuta o meno rimozione dal grafo.

- 4) Si mette nel primo livello della componente in esame un qualsiasi vertice che non sia già stato assegnato ad una componente precedente, e lo si rimuove dal grafo, ovvero lo si contrassegna come appartenente a questa componente (ad es., con dei segni meno) nel sopraccitato vettore di servizio.
- 5) Si passa a costruire il livello successivo della componente in esame.
- 6) Facendo uso della matrice normale simbolica, si individuano i vertici-corona dei vertici assegnati al livello precedente di questa componente, cioè i vertici ad essi direttamente collegati da un lato.
- 7) Si mettono nel livello in esame di questa componente i vertici-corona che non siano già stati assegnati alla componente zero o ad un livello precedente di questa componente, e li si rimuove dal grafo, ovvero li si contrassegna come appartenenti a questa componente (ad es., con dei segni meno) sempre nel sopraccitato vettore di servizio.
- 8) Si calcola l'ampiezza del livello in esame di questa componente.
- 9) Se l'ampiezza del livello in esame di questa componente non è nulla, si ritorna al passo 5); altrimenti è stata ultimata la costruzione della struttura a livelli di servizio.
- 10) Si calcola la cardinalità della componente in esame, cioè il numero di vertici assegnati alla componente.
- 11) Se qualche vertice non è ancora stato assegnato ad alcuna componente, si ritorna al passo 3); altrimenti è stata ultimata la partizione del grafo in componenti connesse, fra loro disgiunte.
- 12) Si calcola il numero di componenti connesse, fra loro disgiunte, in cui è stato partizionato il grafo.
- 13) Si ordinano le componenti connesse, fra loro disgiunte, esclusa la componente zero, in ordine decrescente di cardinalità.

Si noti come la generazione di strutture a livelli produca l'etichettatura di tutti i vertici di un grafo con il livello cui ciascuno appartiene, mentre per la loro numerazione (di cui al passo 8) del paragrafo precedente) è più utile il raggruppamento dei vertici livello per livello: pertanto è necessario eseguire un'operazione di trasposizione per passare dall'una all'altra forma di memorizzazione. Questa operazione si attua in due passi, scandendo ogni volta tutti i vertici:

- dapprima si contano, per ogni livello, i vertici che gli appartengono, sostituendo al loro numero un puntatore;
- successivamente si memorizzano, livello per livello, i numeri d'ordine dei vertici che gli appartengono.

Tutti gli altri passi sono operazioni abbastanza semplici la cui comprensione è già capacità esecutiva.

6. Dissezione del grafo e riordino delle sue parti

La matrice normale di minima ampiezza di banda non corrisponde sempre alla matrice normale di minimo profilo. Nei problemi geodetici e geomatici, questo fatto si verifica sempre quando:

- una rete presenta collegamenti tra punti distanti, provenienti da misure lunghe di componenti di basi o distanze o direzioni;
- un blocco contiene anche poche/i immagini e/o modelli a piccola scala;

- le coordinate di parecchi punti sono espresse in sistemi di riferimento diversi, cosicché si devono introdurre origini fittizie;
- esiste una combinazione dei casi precedenti.

Tali casi si manifestano frequentemente combinando misure di geodesia spaziale e di fotogrammetria dallo spazio con le tradizionali misure topografiche e fotogrammetriche. In estrema sintesi, la corrispondenza tra una matrice normale di minima ampiezza di banda e una matrice normale di minimo profilo è impedita nei seguenti due casi anomali:

- lati la cui lunghezza è fortemente eccedente rispetto alla media potata delle lunghezze degli altri lati (lati lunghi in senso geometrico o, quantomeno, topologico, come sarà spiegato nella nota di cui al successivo punto 3.1) di questo stesso paragrafo);
- vertici connessi al grafo da un elevato numero di lati (vertici di grado elevato).

Un procedimento cautelativo consiste nell'eseguire l'algoritmo di riordino classico con e senza i lati ed i vertici anomali e nel confrontare i due risultati. Esso si articola in dieci passi.

- 1) Applicazione dell'algoritmo di riordino classico agli n vertici di un grafo connessi da tutti gli m lati e calcolo del profilo classico.
- 2) Calcolo della lunghezza di ogni lato e costruzione dell'istogramma delle frequenze di queste lunghezze.
- 3) Se tale diagramma è bimodale, rimozione degli l lati più lunghi dal grafo.
- 4) Calcolo del grado di ogni vertice e costruzione dell'istogramma delle frequenze di questi gradi.
- 5) Se tale diagramma è bimodale, rimozione degli h vertici di grado più elevato e dei k lati corrispondenti; se qualche vertice o qualche piccola parte del grafo è connessa solamente ad un vertice rimosso, anch'essa deve essere rimossa.
- 6) Applicazione dello stesso algoritmo di riordino agli $n - h$ vertici rimanenti connessi dagli $m - l - k$ lati rimanenti⁵⁴ e calcolo del profilo ridotto.
- 7) Duplicazione dei $2l$ vertici connessi dagli l lati rimossi e loro collocazione alla fine dell'elenco dei vertici insieme con gli h vertici di grado più elevato.
- 8) Istituzione di $2l$ nuovi lati che colleghino ogni vertice duplicato con il suo originale: questa operazione corrisponde all'aggiunta di $2l$ vincoli, per fissare l'uguaglianza tra ogni vertice duplicato ed il suo originale nella matrice normale del problema a minimi quadrati in esame.
- 9) Calcolo del margine destro: le sue dimensioni sono approssimativamente uguali ad $h + 2l$ (cioè il numero dei vertici rimossi sommato a quello dei vertici duplicati) per n (cioè il numero dei vertici originali), ed aggiunta del suddetto margine destro al profilo ridotto per ottenere il profilo esteso.

⁵⁴ A rigore, l'algoritmo di riordino dovrebbe essere applicato ad ogni parte connessa del grafo; in pratica, nei problemi geodetici e geomatici il numero delle parti si riduce ad uno.

10) Confronto del profilo classico con il profilo esteso e scelta del profilo minore da utilizzare nel seguito della soluzione del problema a minimi quadrati in esame.

Se viene scelto il profilo esteso i numeri degli insiemi di equazioni di osservazione (lati) e degli insiemi di parametri incogniti (vertici) diventano rispettivamente $m + 2l$ ed $h + 2l$. Si noti che i valori: l , h , k , $2l$, sono solamente indicativi, poiché un caso può presentarsi insieme all'altro e ciò determina una loro riduzione.

La rimozione dei lati e dei vertici (di cui, rispettivamente, ai passi 3) e 5) dell'algoritmo) è una dissezione del grafo. Questa procedura si articola nelle seguenti operazioni.

3.1) Ordinamento per valori decrescenti del vettore contenente le lunghezze dei lati⁵⁵.

3.2) Definizione della dimensione del campione di lunghezze (costituito dalle lunghezze più elevate) nel quale viene cercata la massima differenza tra due lunghezze consecutive nel vettore ordinato contenente il campione stesso.

3.3) Conteggio del numero di lati candidati alla rimozione.

3.4) Verifica che la distribuzione delle lunghezze sia significativamente bimodale: ciò avviene, se la massima differenza è maggiore di un valore critico, proporzionale allo sqm potato di un campione di lunghezze (ovvero senza le lunghezze più elevate e più piccole).

5.1) Ordinamento per valori decrescenti del vettore contenente i gradi di tutti i vertici.

5.2) Definizione della dimensione del campione di gradi (costituito dai gradi più elevati) nel quale viene cercata la massima differenza tra due gradi consecutivi nel vettore ordinato contenente il campione stesso.

5.3) Conteggio del numero di vertici candidati alla rimozione.

5.4) Verifica che la distribuzione dei gradi sia significativamente bimodale: ciò avviene, se la massima differenza è maggiore di un valore critico, ricavato da una curva logistica, secondo il numero di vertici del grafo.

La scelta per la rimozione dei lati e dei vertici potrebbe essere perfezionata. Tuttavia, se il numero dei lati e dei vertici rimossi è piccolo, ovvero se è piccolo il numero dei casi anomali, le variazioni sono trascurabili e pertanto una ricerca più sofisticata ha scarso significato.

A mo' di esempio, si consideri il grafo mostrato in fig. 4.11. Le fig. 4.12, 4.13 e 4.14 illustrano, rispettivamente, la forma della matrice normale simbolica prima e dopo il riordino, eseguito tanto con il procedimento classico, quanto con quello nuovo proposto.

⁵⁵ In molti problemi geodetici e geomatici, la conoscenza del valore delle lunghezze dei lati è un dato in ingresso, oppure può essere facilmente ricavato dalle coordinate dei parametri dei vertici. Tuttavia la richiesta di questo tipo di conoscenza, pur pregevole se disponibile o facilmente acquisibile, limita la generalità della trattazione. Pertanto nel caso, più generale, di mancanza di conoscenza dei valori delle lunghezze occorre procedere nel modo seguente.

- Per ogni vertice del grafo, occorre costruire i primi livelli (solitamente da uno a tre) di una struttura a livelli radicata nel vertice, di volta in volta, in esame.
- Tutti i vertici che hanno nei primi livelli della propria struttura a livelli radicata vertici comuni ai primi livelli di altri vertici (in numero maggiore di uno) costituiscono vertici non estremi di lati

7. Dimensionamento delle matrici

L'opportuno dimensionamento delle matrici disegno, normale e fattorizzata si ricava dall'individuazione di alcuni parametri con i quali è possibile avere una stima, a priori, del numero dei loro elementi non-nulli:

- m il numero di equazioni del sistema;
- n il numero di incognite del sistema;
- M il numero di lati del grafo corrispondente;
- N il numero di vertici del grafo corrispondente;
- i il numero di incognite per vertice del grafo, variabile da vertice a vertice, e pertanto
- \bar{i} il numero medio di incognite per vertice del grafo;
- j il numero di incognite per equazione del sistema, variabile da equazione ad equazione, e pertanto
- \bar{j} il numero medio di incognite per equazione del sistema;
- k il numero di equazioni per lato del grafo, variabile da lato a lato, e pertanto
- \bar{k} il numero medio di equazioni per lato del grafo;
- l il numero di equazioni per incognita del sistema, variabile da incognita ad incognita, e pertanto
- \bar{l} il numero medio di equazioni per incognita del sistema;
- h il numero di presenze nelle equazioni di una coppia di incognite non appartenenti ad uno stesso vertice, variabile da coppia a coppia, e pertanto
- \bar{h} il numero medio di presenze nelle equazioni di una coppia di incognite non appartenenti ad uno stesso vertice;
- $f = m/n$ il fattore di ridondanza, ovvero: $f = 1 + v/n$, essendo v i gradi di libertà del sistema;
- b l'ampiezza locale di banda, variabile da vertice a vertice, e pertanto
- \bar{b} l'ampiezza media di banda.

Nel prosieguo, si farà uso esclusivamente di valori medi. Il dimensionamento della matrice disegno risulta immediatamente dal prodotto del numero di equazioni e del numero medio di incognite per equazione e si conserva, comunque venga memorizzata: per righe o per colonne, essendo invariante per trasposizione:

$$\dim A = m \bar{j}$$

Per il dimensionamento del triangolo superiore della matrice normale, è utile calcolare separatamente:

- Il numero degli elementi generati dal prodotto scalare di due colonne della matrice disegno le cui corrispondenti incognite appartengono ad uno stesso vertice;
- Il numero di elementi generati dal prodotto scalare di due colonne della matrice disegno le cui corrispondenti incognite appartengono a vertici diversi.

Nel primo caso, dato il numero medio di incognite per vertice è immediato il calcolo del numero degli elementi non-nulli: $\bar{i}(\bar{i} + 1)/2$. Per determinare il numero totale di elementi non-nulli, è necessario moltiplicare l'ultima espressione per il numero di incognite e dividerla per il numero medio di incognite per vertice: $n(\bar{i}(\bar{i} + 1)/2)/\bar{i} = n(\bar{i} + 1)/2$. Nel secondo caso, bisogna osservare che esiste un elemento extradiagonale non-nullo, se e solo se esiste un'equazione, dove siano presenti due incognite, aventi numero d'ordine corrispondente agli indici dell'elemento considerato.

Dato il numero medio di incognite per vertice, è immediato il calcolo del numero di elementi non-nulli, generati da un'equazione, purché quell'equazione coinvolga solo due vertici: \bar{i}^2 . Per determinare il numero totale di elementi non-nulli, è necessario moltiplicare l'ultima espressione per il numero di equazioni e dividerla per il numero medio di presenze nelle equazioni di una coppia di incognite, non appartenenti ad uno stesso vertice: $m \cdot \bar{i}^2 / \bar{h}$. Infatti se una coppia d'incognite è presente in più equazioni, questa non genera più elementi non-nulli, bensì uno solo, ricordando la ben nota regola del prodotto scalare con cui si esegue la normalizzazione. Pertanto il dimensionamento del triangolo superiore della matrice normale è dato dalla somma dei due addendi trovati, in corrispondenza ai due casi presentati:

$$\dim C = n(\bar{i} + 1)/2 + m \cdot \bar{i}^2 / \bar{h} \quad \text{con: } C = A^T P A$$

Per calcolare il dimensionamento della matrice fattorizzata, basta ricordare che questa ha, in generale, elementi non-nulli all'interno del profilo e che la dimensione del profilo corrisponde al prodotto del numero delle incognite per l'ampiezza media di banda:

$$\dim T = n \bar{b} \quad \text{con: } T : T^T T = C$$

Infatti il profilo della matrice fattorizzata è costruito prendendo in considerazione, per ogni colonna del triangolo superiore della matrice normale, tutti gli elementi, fino alla diagonale principale, a partire dal primo già non-nullo nel triangolo superiore della suddetta matrice normale. In generale, l'ampiezza media di banda è difficilmente valutabile a priori, ma può essere facilmente calcolata, una volta costruita la matrice disegno simbolica (prima e dopo il riordino della numerazione) come media delle differenze massime in ogni riga (cioè in ogni equazione) fra gli indici delle colonne (cioè delle incognite).

Invece nel caso particolare di una struttura reticolare regolare di forma rettangolare, l'ampiezza media di banda è data dalla dimensione del lato minore del contorno, ovvero dal numero di vertici che stanno su quel lato; pertanto se è possibile approssimare una qualsiasi struttura reticolare con una più semplice struttura reticolare di forma reticolare, allora si può avere una ragionevole valutazione a priori dell'ampiezza media di banda.

Un'osservazione conclusiva sulla teoria dei grafi nota come i grafi stessi, oltre a rendere evidente la corrispondenza grafo – matrice, si prestino bene anche per molte altre applicazioni, quali ad es., gli alberi grammaticali e sintattici, le rappresentazioni grafiche della cluster analysis e soprattutto la strutturazione dei dati in sistemi informativi a referenza spaziale, eventualmente estensibili, dinamici e non, a seconda che i dati contenuti siano tempo varianti (cioè variabili nel tempo) o meno.

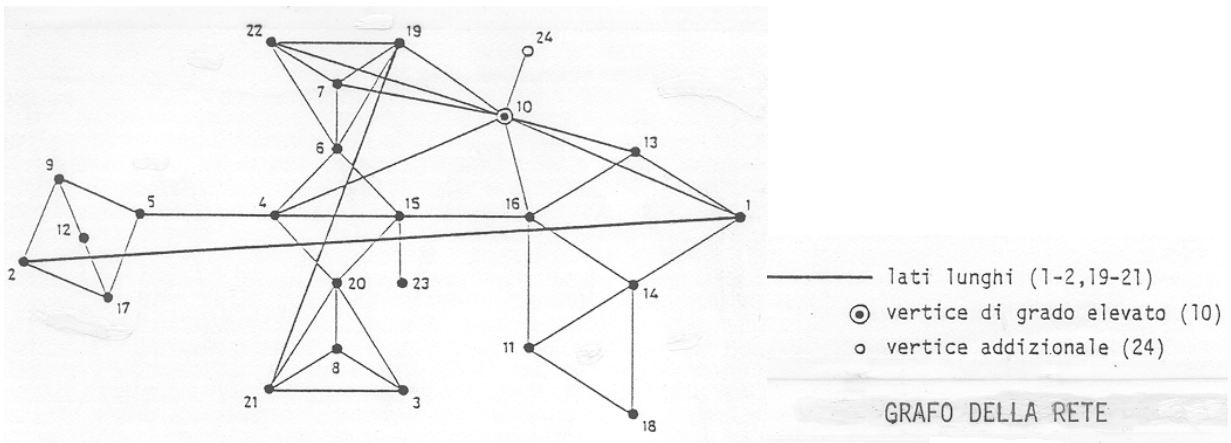


Fig. 4.11

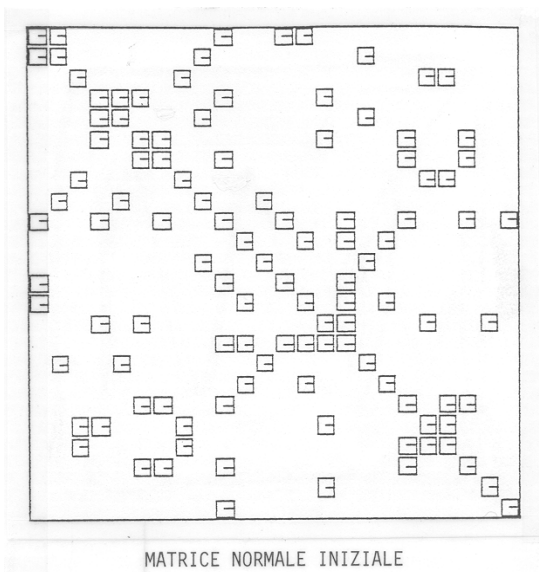


Fig. 4.12

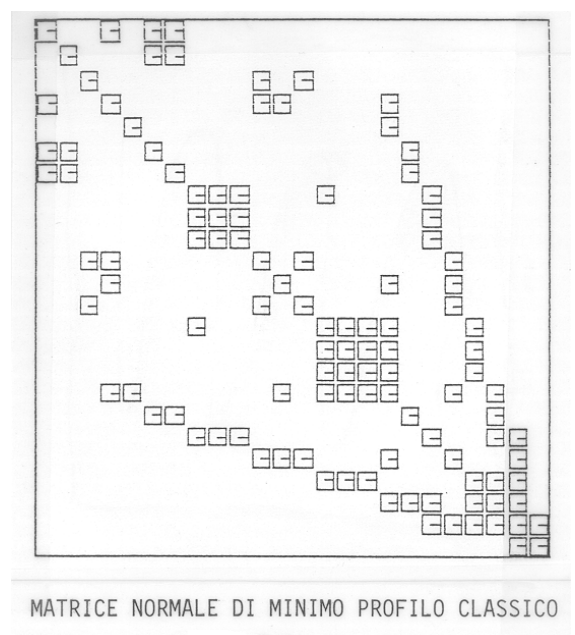
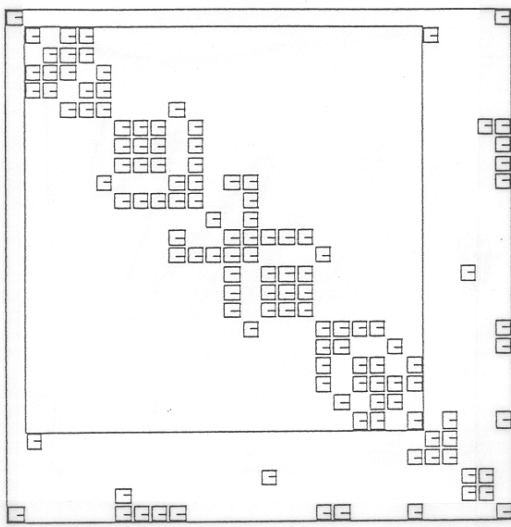


Fig. 4.13



MATRICE NORMALE DI MINIMO PROFILO ESTESO (IL RIQUADRO INTERNO EVIDENZIA UNA SOTTOMATRICE IDENTICA ALLA MATRICE NORMALE PROFILO (CLASSICO) CORRISPONDENTE ALLA SOLA RETE DI 22 VERTICI E 34 LATI)

Fig. 4.14

A riguardo, si osservi come una referenza spaziale forte sia indotta dalle coordinate, mentre una referenza spaziale debole dipenda da altre informazioni di luogo, ad esempio, gli indirizzi, le zone censuarie e le particelle catastali). In entrambi i casi, la raccolta e l'organizzazione di dati spazialmente distribuiti, come pure il loro aggiornamento e la loro manutenzione, costituiscono una parte fondamentale di un sistema informativo a referenza spaziale, dove le metodologie di implementazione, fanno uso di strutture dati vettoriali o raster, oppure miste.

APPENDICE C – TABELLE E MATRICI DELLE STRUTTURE PER L'ANALISI DEI DATI

Le matrici sono potenti modelli matematici capaci di rappresentare differenti strutture nei vari rami dell'analisi multivariata, come il campionamento dei dati, l'analisi fattoriale, l'analisi della connessione, la regressione multipla, l'analisi di varianza, delle componenti della varianza e della struttura di covarianza. Nel prosieguo, abbastanza liberamente, si fa uso alternato dei nomi: matrice e tabella, per lo più, riservando il primo ai valori argomentali di grandezze ed il secondo a voci e/o ranghi (cioè numeri d'ordine) di attributi. Il campionamento dei dati può essere realizzato tramite:

- tabelle di inventario, in seguito ad un campionamento senza classificazione;
- matrici qualitative, in seguito ad un campionamento con classificazione per attributi;
- matrici quantitative, in seguito ad un campionamento con classificazione per grandezze.

Si noti come la scelta di operare una classificazione sia un'operazione complessa che richiede di passare da un ordinamento a lista ad un ordinamento in tabella (eventualmente a più dimensioni, secondo il numero degli strati fissati), dove una dimensione contiene le ripetizioni ed una seconda (od altre ancora) esprime (esprimono) la/e classificazione/i effettuata/e.

Per quanto riguarda analisi fattoriale, si possono usare tabelle di contingenza e/o matrici correlazione. Le tabelle di contingenza contengono:

- frequenze assolute o presenze (eventualmente cumulate);
- frequenze relative (eventualmente cumulate);
- contingenze assolute (derivate a partire dalle presenze);
- contingenze relative;
- frequenze condizionate assolute o presenze condizionate (eventualmente cumulate);
- frequenze condizionate relative (eventualmente cumulate).

Le matrici di correlazione, a loro volta, derivano o contengono:

- varianze e covarianze (oppure coefficienti di correlazione);
- autovalori ed autovettori.

Sia nel caso di tabelle di contingenza, come in quello matrici correlazione, l'eventuale stratificazione dà luogo a matrici spaziali (od a dimensioni ancora maggiori), dove l'inevitabile riduzione bidimensionale è ottenuta tramite tabelle di tabelle e matrici di matrici, facendo uso di liste ausiliarie di contatori, indicatori e puntatori per accedere facilmente all'informazione, così disposta. Occorre infatti osservare come questa riduzione bidimensionale toglie le proprietà di vicinanza, proprie di una disposizione spaziale (o iper-spaziale). L'analisi della connessione richiede invece:

- tabelle di rango (cioè composte da numeri d'ordine);
- matrici di prossimità (dove non sia possibile definire una metrica del posizionamento dei dati);
- matrici di dissimilarità (essendo la dissimilarità pressoché il contrario della prossimità);
- matrici di distanza (dove sia possibile definire una metrica del posizionamento dei dati);
- tabelle di peso;
- tabelle logiche di descrizione.

Si noti come le tabelle di peso possono essere suddivise in suddividersi in:

- tabelle di segno (aritmetico: più / meno, capaci di definire presenze ed assenze, ma non gradazioni);
- tabelle di preferenza (più complesse delle precedenti, dove le preferenze esprimono gradazioni),

e le tabelle logiche di descrizione basarsi su:

- una logica binaria (o booleana);
- una logica fuzzy (dove gli elementi sono calcolati in base a funzioni d'appartenenza).

Infine l'analisi di varianza e la regressione multipla fanno uso di:

- matrici di configurazione (o disegno), matrici normali;
- matrici dei pesi (oppure, più in generale, di cofattori);

- matrici di varianza – covarianza e matrici di correlazione;
- matrici di ridondanza locale e matrici d'affidabilità (interna ed esterna).

Si noti come le matrici di configurazione rappresentino:

- interpolazione ed approssimazione di fenomeni e/o processi geomatici;
- compensazioni di reti di tipo geodetico,

dove i modelli funzionali non – lineari coinvolgono le matrici Jacobiana e Hessiana, rispettivamente per lo studio delle derivate prime e seconde delle equazioni d'osservazione, pseudo – osservazione e vincolo, mentre le matrici dei pesi sono collegate ai modelli stocastici delle suddette quantità.

A rigore, solo la matrice Jacobiana (come ben noto, formata dalle derivate prime) serve costituire il modello funzionale di un problema non – lineare, ricondotto a forma lineare sui cui operare poi iterativamente. Tuttavia proprio per il carattere non – lineare di molti problemi, la matrice Hessiana (come altrettanto noto, formata dalle derivate seconde) serve a studiare la curvatura delle funzioni non – lineari dello specifico problema in esame.

Infatti un'eventuale eccessiva curvatura, metterebbe in crisi la linearizzazione effettuata e non garantirebbe la convergenza delle iterazioni ad un'unica soluzione attesa. Di conseguenza, solo lo studio della curvatura delle suddette funzioni riesce a controllare, a priori, il modello funzionale costruito (del resto, nel corso degli ultimi decenni, l'algebra lineare permea quasi tutta la matematica, a partire dalla geometria, ma interessando notevolmente anche l'analisi matematica).

Resta da osservare come, sempre legate a modelli stocastici, l'analisi delle componenti della varianza e l'analisi della struttura di covarianza ⁵⁶ richiedano matrici di varianza – covarianza o correlazione, oppure semplicemente pesi, nel caso particolare di campionamenti bernoulliani, con osservazioni indipendenti che si riducano ai numeri uno delle matrici identità, nel caso particolarissimo, di uguale precisione.

Un'osservazione conclusiva coinvolge importanti aspetti di statistica computazionale. Infatti solo le matrici che derivano da tabelle o matrici, composte da colonne linearmente indipendenti ed aventi un numero di righe uguale o (meglio!) maggiore del numero delle suddette colonne, sono matrici definite positive, ovvero matrici dove tutti gli autovalori sono positivi. Solo per esse è possibile mettere in gioco tutti i metodi e gli algoritmi propri della statistica computazionale.

Per tutte le altre tabelle o matrici, dove si riscontrano difetti di rango, è invece necessario provvedere alla sua individuazione e superamento con metodi più complessi, sempre di statistica computazionale, il cui limite maggiore sta nelle limitate dimensioni di un problema praticamente computabile. Infatti se il campo dei problemi computabili è relativamente piccolo, rispetto all'intero campo dei problemi possibili, il campo dei problemi praticamente computabili (perché ciascuna soluzione deve poter essere attesa in un tempo ragionevole) è ancora più ristretto, dipendendo strettamente dalle capacità di calcolo, in una data epoca ed in un dato posto, ovvero dalle potenzialità hardware e software disponibili, nonché ovviamente dalle conoscenze di è preposto ad operare.

⁵⁶ S noti come l'analisi della struttura di covarianza apra all'analisi fine dei modelli di dati, cioè a modelli di secondo ordine, dove un modello stocastico è derivato dalla struttura interna dei dati, ovvero una memoria, espressa in termini lineari proprio da covarianze.

BIBLIOGRAFIA DI RIFERIMENTO

1. Akaike H. (1973): Block Toeplitz matrix inversion. In: *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 24, n. 2.
2. Blais J.A.R. (1982): Recursive least-squares estimation using Givens Transformations. In: *Int. Arch. Photogram. Remote Sensing*, Helsinki, Vol. 24, Part 3.
3. Blais J.A.R. (1984): Optimization of least-squares computations in on-line photogrammetry. In: *Int. Arch. Photogram. Remote Sensing*, Rio de Janeiro, Vol. 25, Part 3
4. Cuthill E., Mckee J. (1969): Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. In: *Proc. ACM National Conference*. New York, p.157–172.
5. Dufour H.M. (1974): Propriétés des systèmes linéaires symétriques déduits des leur forma spectrale. In: *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, anno 33, n. 4.
6. Dufour H.M. (1964): Résolution des systèmes linéaires par le méthode des résidus conjugués. In: *Bulletin Géodésique*, n. 71 (1964).
7. Dufour H.M., Burette D. (1974): Présentation synthétique des méthodes semi-itératives des résolution des systèmes linéaires. In: *Bulletin Géodésique*, n. 113 (1974).
8. Edberg E. (1976): Matrix computation. In: *Lectures given in the Academic Training Program of CERN 1975–1976*, CERN 76–22, Ginevra.
9. Ehler D. (1975): Die verkürzte Inversion von Bandmatrizen. In: *Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen*. Verlag des Instituts für angewandte Geodäsie, Sonderheft, Francoforte sul Meno, p.15–22.
10. Erisman A.M., Tinney W.F. (1975): On computing certain elements of the inverse of sparse matrix. In: *Comunication of the ACM*, Vol. 18, n. 3, New York, p. 177–179.
11. Gibbs N.E., Poole W.G., Stochmeyer (1976): An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix. In: *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 13, n. 2.
12. Golub G.H., van Loan C.F. (1983): Matrix computation. North Oxford Academic, Oxford.
13. Gentle J.E., Kennedy W.J. (1980): Statistical computing. Dekker, Basilea.
14. George A., Liu J.W.H. (1981): Computer solution of large sparse positive definite systems. Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ).
15. Gottschalk S., Wrobel B.P. (1978): Reducing the bandwidth of normal-equation matrices. In: *Processing of Special Large Matrices for Geodesy Interpretation of the Results (CERN)*, Ginevra, p. 22–35.
16. Groten E., Hein G. (1978): On the use of bandwidth minimization in geodetic and photogrammetric problems. In: *Processing of Special Large Matrices for Geodesy Interpretation of the Results (CERN)*, p. 18–22, Ginevra.
17. Grudig L.: Feasibility study of the conjugate gradient method for solving large sparse equation sets. NOAA Technical Report, NOS 82 NGS 13.
18. Hestenes M.R., Stiefel E. (1952): Methods of conjugate gradients for solving linear systems. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 49, n. 6.
19. Kershaw P.S. (1978): The incomplete Cholesky conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations. In: *Journal of Computational Physics*, n. 26 (1978).
20. Lawson G.L., Handson R.J. (1974): Solving least squares problems. Prentice Hall, *Series in Automatic Computation*, Englewood Cliffs (NJ).
21. Mark A.N., Poder K. (1981): Ordering and dissection of geodetic least squares equations. In: *Proc. of the 6th International Symposium on Geodetic Computations*, DGK Reihe B Heft 258/VIII, p. 100–112.
22. Meijering J.A., Van Der Vorst H.A. (1977): An iterative solution method for linear system of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix. In: *Mathematics of Computation*, Vol. 31, n. 138.
23. Rosen R. (1968): Matrix bandwidth minimization. In: *Proc. ACM National Conference*, Brandon System Press, Princeton (NJ), p. 585–595.
24. Schwarz H.R. (1970): Die Methode der cojugierten Gradienten in der Ausgleichsrechnung. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen*, anno 95, n. 4.
25. Strang G. (1988): Linear algebra and its applications. Harcourt Brace Janovich, San Diego.
26. Tewarson R. P. (1972): Sparse matrices. Academic Press, *Mathematics in Science and Engineering*, n. 99, New York.
27. Trench W.F. (1964): An algorithm for the inversion of finite Toeplitz matrices. In: *Journal of Soc. Industr. Applied Mathematics*, Vol. 12, n. 3.
28. Trench W.F. (1965): An algorithm for the inversion of finite Hankel matrices. In: *Journal of Soc. Industr. Applied Mathematics*, Vol. 13, n. 4.
29. Trench W.F. (1974): Inversion of Toeplitz band matrices. In: *Mathematics of Computation*, Vol.28, n.128.
30. Varga M.S. (1962): Matrix iterative analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ).